

# Quelques aspects de la physique de la Terre

## Un corrigé

### A Première partie - L'étude physique des séismes

#### A.1 Les ondes sismiques

##### A.1.1 Ondes mécaniques au lycée

1. Ondes longitudinales : ondes de compression dans un ressort, ondes sonores.

Ondes transversales : déformation d'une corde, ondes à la surface de l'eau présentes par exemple dans une cuve à ondes, hola dans un stade.

On qualifie l'onde de transversale lorsque la perturbation se fait dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation.

Une onde est longitudinale lorsque la perturbation se fait dans la même direction que la direction de propagation de l'onde

2.

a) Exemple de séance de TP :

- Matériel : un émetteur d'onde ultrasonore avec générateur (émission de salves), deux récepteurs, un support gradué, un oscilloscope
- Manipulations : l'émetteur émet des salves. Les deux récepteurs sont positionnés côte à côte, sur un support permettant de mesurer leur distance. On recueille à l'oscilloscope les signaux reçus par chacun des deux récepteurs. On vérifie que quand ils sont à même distance de l'émetteur, les signaux sont confondus. Puis on mesure le décalage temporel  $\Delta t$  entre le début de chaque signal reçu en fonction de la distance  $d$  entre les deux récepteurs quand on déplace un des deux récepteurs.
- Exploitation : tracer la courbe  $\Delta t$  en fonction de  $d$ , en déduire la célérité des ondes ultrasonores dans l'air.
- Si possible, passer dans l'eau (si on a le matériel nécessaire) pour montrer que la célérité dépend du milieu.

b) Autres exemples :

- Même manipulation mais avec des ondes sonores (émission d'un clap et réception par deux micro).
- Utilisations de vidéos montrant des ondes dans un ressort, ou sur un échelle de perroquet ou dans une cuve à ondes.

c) Prérequis : onde progressive, définition de la célérité.

d) Objectifs visés : mesurer un retard à l'oscilloscope, relier ce retard à la propagation et en déduire la célérité.

#### 3. Le séisme de Honshu

L'observation de l'heure du début du signal permet de voir que la secousse arrive avant à Taipei qui est plus près : il y a propagation de l'onde sismique.

Le signal relevé à Taipei a une amplitude plus importante que le signal enregistré en Guadeloupe : l'onde s'atténue en se propageant.

Informations qualitatives : le séisme a eu lieu à 5h46 à Honshu, le début du signal est détecté à 5h51 à Taipei :  $c \simeq \frac{2360 \cdot 10^3}{5 \times 60} \simeq 8 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ .  
 et à 6h10 en Gaudeloupe :  $c \simeq \frac{1350010^3}{25 \times 60} \simeq 9 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ .  
 L'ordre de grandeur est le même.

### A.1.2 Étude de la propagation des ondes P

4. La longueur de la tranche située au repos entre  $x$  et  $x + dx$  devient :

$$(x + dx + \xi(x + dx, t)) - (x + \xi(x, t)) \simeq \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)dx + dx$$

Son allongement est donc :  $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)dx$ .

Remarque :  $dx$  est choisi petit devant la distance caractéristique de variation de  $\xi(x, t)$ , notée  $L^*$ , et on travaille au premier ordre en  $dx/L^*$ .

5. L'allongement relatif de la tranche élémentaire étudiée est :  $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$ .

La force cherchée est donc :

$$\vec{F}(x, t) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \vec{u}_x$$

6. La tranche située au repos entre les plans d'abscisse  $x$  et  $x + dx$  est soumise à  $\vec{F}(x + dx, t)$  à son extrémité  $x + dx$  et à  $-\vec{F}(x, t)$  à son extrémité  $x$  (principe des actions réciproques). Le principe fondamental de la dynamique appliquée à cet élément s'écrit :

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) \vec{u}_x = \vec{F}(x + dx, t) - \vec{F}(x, t)$$

avec  $dm = \rho S dx$ .

En projection sur  $\vec{u}_x$  :

$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) dx = ES \frac{\partial \xi}{\partial x}(x + dx, t) - ES \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) \simeq ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t) dx$$

au premier ordre en  $dx/L^*$ .

Après simplification par  $S dx$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

7. C'est une équation de d'Alembert à une dimension.

8. La célérité des ondes de compression dans le barreau est :  $v_P = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

9. Le module d'Young est homogène à une pression c'est-à-dire à une force par unité de surface donc :  $[E] = ML^{-1}T^{-2}$ . Finalement :

$$\left[ \frac{E}{\rho} \right] = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}} = L^2T^{-2}$$

La grandeur :  $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$  est bien homogène à une vitesse.

**10.** Les discontinuités de vitesse correspondent à un changement de milieu : le globe terrestre est constitué de différentes couches de natures différentes. On en observe essentiellement quatre : une couche superficielle (la croûte), le manteau (solide, jusqu'à une profondeur de l'ordre de 3000 km), le noyau externe (liquide, entre 3000 km et 5000 environ) puis la graine (solide).

Dans la couche superficielle, la célérité des ondes sismiques est de l'ordre de la dizaine de kilomètres par seconde, ce qui correspond aux valeurs déduites des enregistrements précédents.

## A.2 Les sismographes

### A.2.1 Le système solide - ressort en classe de Terminale S

11.

a) Activité expérimentale :

- mesurer l'allongement d'un ressort vertical quand on lui suspend une masse, étude de l'allongement en fonction de la masse, le tracé de la courbe donnant l'allongement en fonction de la masse permet de déterminer la valeur de  $k$  ;
- enregistrement de la position d'un mobile autoporteur relié à un ressort, mesure de la période ou traitement de la vidéo (par Avimeca par exemple) : tracé de la courbe donnant l'accélération en fonction de la position. La pente donne la valeur de  $k$ .

b) Connaissances : expression de la tension d'un ressort en fonction de l'allongement, deuxième loi de Newton.

c) Compétences : tracer une courbe expérimentale, déterminer la pente de la droite obtenue et en déduire la valeur à mesurer ; réaliser et exploiter un enregistrement vidéo.

**12.** Séance de cours en Terminale S sur la résonance mécanique :

- Projection de films présentant des phénomènes de résonance (par exemple le « ChinookGround-Resonance » : un hélicoptère au sol est soumis à des oscillations forcées dues à la rotation des pales, disponible à l'adresse suivante : [http://pedagogie.ac-toulouse.fr/sc\\_phy/site\\_php/spip.php?article188](http://pedagogie.ac-toulouse.fr/sc_phy/site_php/spip.php?article188)).

- Manipulation : un ressort vertical auquel on suspend une masse et dont l'extrémité supérieure est reliée à un vibreur. La masse trempe dans une éprouvette remplie d'eau dans un premier temps.

Détermination préalable de la fréquence propre de l'oscillateur.

On fait varier la fréquence du vibreur, on observe les mouvements de la masse. Quand la fréquence du vibreur est proche de la fréquence propre du système solide-ressort, on constate que les mouvements sont de grande amplitude.

On montre des enregistrements faits au préalable permettant de mesurer l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence du vibreur. On trace la courbe correspondante.

- Définition du phénomène de résonance.
- Facteur influençant celle-ci, acuité de la résonance. On recommence l'expérience en remplaçant l'eau par de l'huile. On observe les modifications.
- Retour sur des exemples pratiques. Quand faut-il éviter la résonance (amortisseur de voiture par exemple) ?
- Éventuellement : ouverture vers des résonances dans d'autres domaines : tuyaux sonores et instruments de musique (en enseignement de spécialité), circuits électriques.

## A.2.2 Sismographe simple

13. Préliminaire : à l'équilibre, le solide ( $\Sigma$ ) est soumis à son poids et à la tension du ressort :

$$\vec{0} = -mg\vec{u}_z + k(L_1 - L_0)\vec{u}_z$$

avec  $L_1 = h - z_1$ . On en déduit :

$$z_1 = h - L_0 - \frac{mg}{k}$$

Étude dans le référentiel non galiléen lié au boîtier :

Le référentiel lié au boîtier (noté  $\mathcal{R}_S$ ) est en translation rectiligne non uniforme par rapport au référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .

La force d'inertie d'entraînement ressentie par le solide ( $\Sigma$ ) s'écrit :  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_c = -m\frac{d^2 Z_S}{dt^2}\vec{u}_z$ .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide ( $\Sigma$ ) dans le référentiel lié au boîtier s'écrit :

$$m\overline{a(M)}_{/\mathcal{R}_S} = m\vec{g} + k(L(t) - L_0)\vec{u}_z - \lambda\frac{dz}{dt}\vec{u}_z - m\frac{d^2 Z_S}{dt^2}\vec{u}_z$$

En projection sur  $\vec{u}_z$ , on obtient :

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -mg + k(h - z - L_0) - \lambda\frac{dz}{dt} + m\omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

En soustrayant la relation à l'équilibre établie en préliminaire, on en déduit :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

C'est bien de la forme voulue avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$ .

Étude dans le référentiel fixe :

On peut également mener l'étude dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Dans ce cas, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\overline{a(M)}_{/\mathcal{R}} = m\vec{g} + k(L(t) - L_0)\vec{u}_z - \lambda\frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

avec  $\overline{a(M)}_{/\mathcal{R}} = \frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} = \frac{d^2(z(t) + Z_S(t))}{dt^2}\vec{u}_z = \frac{d^2 z}{dt^2} - \omega^2 Z_0 \cos(t)\vec{u}_z$ . On retrouve bien évidemment la même équation.

$\omega_0$  est homogène à une pulsation :  $[\omega_0] = \left(\frac{MLT^{-2} \times L^{-1}}{M}\right)^{1/2} = L^{-1}$ .

$Q$  est sans dimension :  $[\lambda] = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$  a la même dimension que le produit  $m\omega_0$ .

$\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur,  $Q$  son facteur de qualité.

14. On passe en notation complexe :  $\underline{x}(t) = X_0 \exp(i(\omega t + \varphi)) = \underline{X} \exp(i\omega t)$ . En injectant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$(-\omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2)\underline{X} = \omega^2 Z_0$$

donc :

$$\frac{X}{Z_0} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}} = \frac{u^2}{1 - u^2 + i \frac{u}{Q}}$$

avec  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

On prend le module de cette relation :

$$\frac{X_0}{Z_0} = \left| \frac{X}{Z_0} \right| = \frac{u^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

**15.** Quand  $u$  tend vers 0,  $\frac{X_0}{Z_0}$  tend vers 0, ce que l'on retrouve sur le graphe.

Quand  $u$  tend vers l'infini,  $\frac{X_0}{Z_0}$  tend vers 1, ce que le graphe confirme.

Ce filtre laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses fréquences : c'est un filtre passe-haut.

**16.**  $Y(\zeta) = (\zeta^2 - 1)^2 + \frac{\zeta^2}{Q^2}$  puis :

$$Y'(\zeta) = 4\zeta(\zeta^2 - 1) + 2\frac{\zeta}{Q^2}$$

La dérivée de la fonction  $Y(\zeta)$  s'annule en  $\zeta = 0$  ou  $\zeta = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ . La première solution correspond à  $u$  infini, ce qui traduit le fait que les courbes représentées sur le graphe ont une asymptote horizontale en l'infini. La seconde solution n'existe que si  $Q > Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Dans ce cas,  $Y(\zeta)$  présente un minimum donc  $X_0(u)$  un maximum : il y a résonance.

Donc, si  $Q$  est inférieur à  $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il n'y a pas de résonance, ce que montre le graphe.

**17.** On souhaite que le mouvement du solide restitue ceux du sol donc que :  $X_0 = Z_0$ . Il faut pour cela que  $\omega \gg \omega_0$ . Dans ces conditions, le solide ( $\Sigma$ ) reste pratiquement immobile dans le référentiel galiléen, le ressort est si souple que le solide ( $\Sigma$ ) ignore les mouvements du sol.

**18.** Si on choisit un facteur de qualité proche de la valeur critique  $Q_0$ , la réponse du sismographe reproduit le mouvement du sol dès que  $\omega$  est environ égale à  $3\omega_0$  alors que pour un facteur de qualité plus faible, il faut une fréquence beaucoup plus grande pour que la courbe soit confondue avec son asymptote. La valeur  $Q_0$  semble donc être le meilleur choix. Il correspond de plus à un temps d'amortissement du régime transitoire le plus court : les deux critères sont donc compatibles.

**19.** À l'équilibre, l'allongement du ressort est :  $\Delta L = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_0^2}$ . Sachant que  $\omega \gg \omega_0^2$ , on en déduit :  $\Delta L \gg \frac{g}{4\pi^2 f^2}$  où  $f$  est la fréquence enregistrée. En prenant  $f = 1$  Hz, on trouve  $\Delta L \gg 25$  cm. Si on veut par exemple un facteur 3 entre  $\omega$  et  $\omega_0$ , on obtient  $\Delta L \simeq 2,3$  m : le sismographe est très encombrant !

Les sismographe construits selon ce modèle avaient des dimensions impressionnantes (masse de plusieurs centaines de kilogrammes, taille de plusieurs mètres).

### A.2.3 Sismographe de LACOSTE

20. Le disque est soumis à son poids et à la tension du ressort. À l'équilibre :

$$\vec{\Omega A} \wedge (m \vec{g} + k \vec{AB}) = \vec{0}$$

ou encore :

$$(\ell \cos \theta \vec{u}_y + \ell \sin \theta \vec{u}_z) \wedge (-mg \vec{u}_z + k(-\ell \cos \theta \vec{u}_y + (d - \ell \sin \theta) \vec{u}_z)) = \vec{0}$$

ce qui donne :

$$k\ell \cos \theta (d - \ell \sin \theta) + k\ell^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \cos \theta = 0$$

qui se simplifie en :

$$(kd - mg) \cos \theta = 0$$

21. À l'équilibre,  $mg = kd$  ou  $\cos \theta = 0$ . On veut que  $\theta = 0$  soit position d'équilibre, il faut donc que  $mg = kd$ . Cet équilibre est indifférent : le moment des forces en  $O$  est nul quel que soit l'angle  $\theta$ , il reste nul tout au long du mouvement de la masse  $m$ .

22. Maintenant :

$$\vec{AB} = (-\ell \cos \theta + d \sin \alpha) \vec{u}_y + (d \cos \alpha - \ell \sin \theta) \vec{u}_z$$

L'énergie potentielle élastique associée au système disque-ressort s'écrit :

$$\mathcal{E}_{P,\text{ressort}} = \frac{1}{2} k AB^2 + \text{cste}_1$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\mathcal{E}_{P,\text{ressort}} = -k\ell d (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) + \text{cste}_1$$

23.  $\mathcal{E}_{P,\text{pesanteur}} = mgl \sin \theta + \text{cste}_2$ .

24. On veut que  $\frac{d}{d\theta} (\mathcal{E}_{P,\text{ressort}} + \mathcal{E}_{P,\text{pesanteur}})(\theta = 0) = 0$  donc que :  $-k\ell d \cos \alpha + mgl = 0$ , ce qui donne bien :  $\cos \alpha = \frac{mg}{kd}$ .

25. L'énergie potentielle du système est :

$$\mathcal{E}_P = -k\ell d (\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta) + mgl \sin \theta + kd\ell \sin \alpha$$

en choisissant l'origine des énergies potentielles en  $\theta = 0$ .

Au voisinage de  $\theta = 0$ , elle s'écrit :

$$\mathcal{E}_P = -k\ell d \left( \sin \alpha \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + \theta \cos \alpha \right) + mgl\theta + kd\ell \sin \alpha = \frac{1}{2} kd\ell \sin \alpha \theta^2$$

La conservation de l'énergie du système permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} m \ell^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kd\ell \sin \alpha \theta^2 = \mathcal{E}_0$$

où  $\mathcal{E}_0$  est une constante. Après dérivation par rapport au temps et simplification par  $\frac{d\theta}{dt}$ , on obtient :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{kd \sin \alpha}{m\ell} \theta = 0$$

Remarque : on peut aussi commencer par dériver l'équation traduisant la conservation de l'énergie puis effectuer ensuite le développement limité au voisinage de  $\theta = 0$ . Dans ce cas, le développement limité se fera à l'ordre 1 et non 2 en  $\theta$ .

26. On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation :  $\omega_1 = \sqrt{\frac{kd \sin \alpha}{m\ell}}$ . Or  $\sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha = \frac{mg}{kd} \tan \alpha$ . On en déduit la relation demandée :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{\ell}}$$

27. Le mouvement du disque ( $\mathcal{D}$ ) reproduira celui du sol pour des pulsations  $\omega$  telles que  $\omega \gg \omega_1$ . On peut ajuster  $\omega_1$  grâce à l'angle  $\alpha$  et la choisir suffisamment faible pour enregistrer des secousses sismiques de plus grande période qu'avec le premier sismographe étudié.

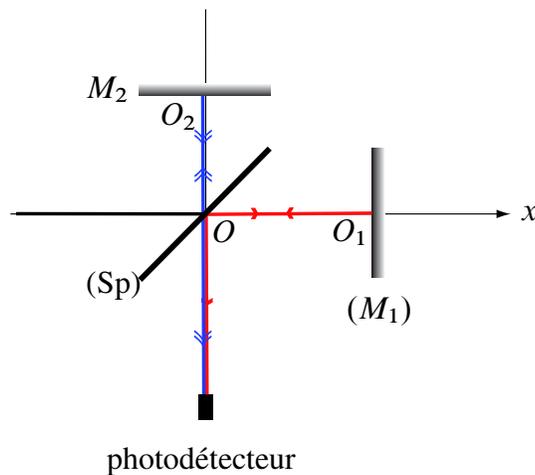
Si on veut  $\omega \simeq 3\omega_1$  comme précédemment :  $2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g \tan \alpha}} \simeq 30$ , c'est-à-dire :  $\frac{\ell}{\tan \alpha} \simeq 200$ . Si on prend par exemple  $\ell = 1$  m, on obtient  $\alpha \simeq 0,3^\circ$ .

#### A.2.4 Un sismographe optique

28. La puissance d'un laser Hélium-Néon utilisé par le professeur est de l'ordre de 1 mW. Le diamètre du faisceau est de l'ordre du millimètre. La puissance par unité de surface (ou éclairement) est donc de l'ordre de :

$$\mathcal{E}_0 \sim \frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 10^3 \text{ W.m}^2$$

29.



30. Les deux ondes qui interfèrent ont chacune subi une transmission et une réflexion au niveau de la séparatrice. Leur éclairement est donc :  $\mathcal{E}_1 = RT\mathcal{E}_0$ . La conservation de l'énergie de l'onde au passage de la séparatrice impose :  $R + T = 1$ .

L'éclairement des ondes qui interfèrent est de la forme :  $\mathcal{E} = R(1 - R)\mathcal{E}_0$ .

**31.** Cet éclairage est maximal pour  $R = 0,5$ . Cette valeur permet d'avoir le signal le plus lumineux possible.

**32.** La différence de marche entre les ondes qui interfèrent au niveau du photodétecteur est :  $\delta = 2e_{12}$ . La formule de Fresnel des interférences à deux ondes s'écrit :

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_1 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} 2e_{12} \right) \right)$$

Or  $\mathcal{E}_1 = R(1 - R)\mathcal{E}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{4}$ . On en déduit :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} 2e_{12} \right) \right) = \mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{2\pi e_{12}}{\lambda} \right)$$

### A.2.5 Le déplacement du miroir

**33.** Dans le référentiel non galiléen lié au support, le miroir ( $M_1$ ) est soumis à la force de frottement fluide et à la force d'inertie d'entraînement. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au miroir ( $M_1$ ) dans le référentiel  $\mathcal{R}_S$  lié au support s'écrit :

$$\overrightarrow{ma(M_1)}_{/\mathcal{R}_S} = -\lambda \frac{dy}{dt} \vec{u}_x - m \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x$$

En projection sur  $\vec{u}_x$ , on obtient :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dy}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2}$$

**34.** On passe en notation complexe. Il vient :

$$\underline{Y} = \frac{\omega^2 X_M}{-\omega^2 + i\omega \frac{\lambda}{m}} = Y \exp(-i\varphi)$$

avec  $Y = |\underline{Y}|$  et  $\varphi = \arg \left( -\omega^2 + i\omega \frac{\lambda}{m} \right)$

Il vient :

$$Y_M = \frac{X_M \omega}{\sqrt{\omega^2 + \left( \frac{\lambda}{m} \right)^2}}$$

et :  $\tan \varphi = -\frac{\lambda}{m\omega}$  avec  $\cos \varphi < 0$  et  $\sin \varphi > 0$  donc  $\varphi \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  donc

$$\varphi = \arctan \left( \frac{\lambda}{m\omega} \right) + \pi$$

### A.2.6 Le signal enregistré

35. L'épaisseur  $e_{12}$  de la lame d'air équivalente est maintenant  $e_{12} = d_0 + y(t)$  donc, d'après ce qui précède, l'intensité délivrée par le photodétecteur est :

$$I(t) = I_{\max} \cos^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} (d_0 + y(t)) \right)$$

36. On lit la période du signal  $T$  sur les courbes. On trouve :  $T \simeq 0,2$  s. C'est la période de  $y(t)$  donc celle de la secousse sismique. La fréquence de celle-ci est donc  $f = \frac{1}{T} = 5$  Hz.

37.  $I(t)$  est de la forme :  $I(t) = I_{\max} \cos^2(\Psi(t))$  où

$$\Psi(t) = \frac{2\pi}{\lambda} (d_0 + y(t)) = \frac{2\pi}{\lambda} (d_0 + Y_M \cos(\omega t - \varphi))$$

Sa dérivée par rapport au temps s'écrit :  $\frac{dI}{dt} = -2I_{\max} \cos(\Psi(t)) \sin(\Psi(t)) \frac{d\Psi}{dt}$ . Elle vaut 1 ou 0 quand  $\cos(\Psi(t))$  ou  $\sin(\Psi(t))$  sont nuls (ça correspond au maxima et minima globaux de la fonction). Elle présente un extremum local quand  $\frac{d\Psi}{dt} = 0$ , c'est-à-dire quand  $\sin(\omega t - \varphi) = 0$  donc quand  $y(t) = \pm Y_M$ .

Finalement, les extrema locaux de  $I(t)$  correspondent à une intensité :

$$I_1 = I_{\max} \cos^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} (d_0 + Y_M) \right)$$

et

$$I_2 = I_{\max} \cos^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} (d_0 - Y_M) \right)$$

Connaissant  $d_0$ , la mesure de  $I_1/I_{\max}$  ou de  $I_2/I_{\max}$  permet de déterminer  $Y_M$ . Comme on connaît  $\omega$  et  $\lambda/m$ , on peut en déduire l'amplitude  $X_M$  de la secousse sismique.

## B Deuxième partie - L'origine du champ magnétique terrestre

### B.1 Variations temporelles du champ magnétique terrestre

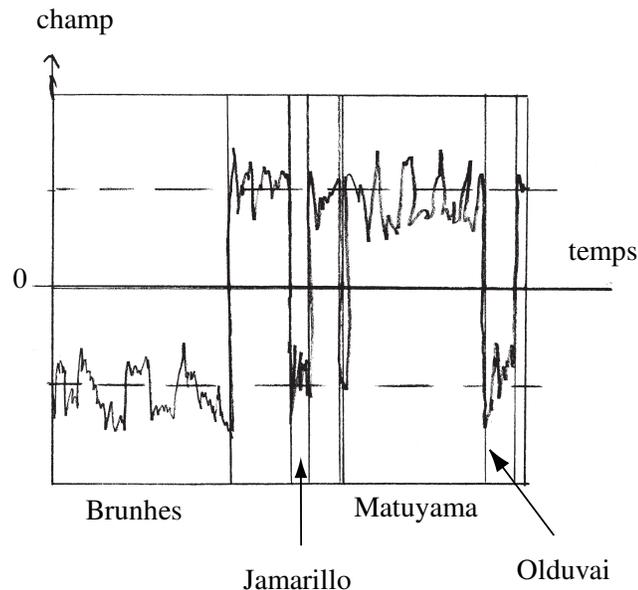
38. Ces deux courbes nous informent que la polarité du champ magnétique terrestre change aux cours des temps géologiques.

Ses inversions sont désordonnées.

Au cours d'une période où le sens du champ ne change pas, l'intensité du champ géomagnétique varie également de manière aléatoire.

Le changement de polarité est beaucoup plus rapide que la durée pendant laquelle le champ géomagnétique garde un signe constant.

39. L'allure de la courbe ressemble à :



### B.2 Observation expérimentale d'une dynamo turbulente

#### B.2.1 L'expérience VKS2

40. VKS : Von Karman Sodium.

41. L'expérience VKS2 a mis en évidence la génération d'un champ magnétique par un écoulement turbulent de sodium liquide ainsi que les inversions aléatoires de la polarité de ce champ.

42. Démarche scientifique :

- Interrogation : quelle est l'origine du champ magnétique des planètes, étoiles, etc. ?
- Modèle théorique : la dynamo.
- Simulations numériques insuffisantes.
- Reproduction en laboratoire : étude préalable, réalisation de l'expérience, mesures.
- Amélioration, ouverture.

43. Le fluide utilisé dans cette expérience doit être bon conducteur de l'électricité, liquide à la température de l'expérience avec une viscosité et une masse volumique qui permettent d'obtenir de grands nombres de Reynolds cinématique et d'atteindre la valeur critique du nombre de Reynolds magnétique. Le sodium répond à ses exigences comme nous le verrons dans la suite du problème.

44. Le sodium brûle spontanément dans l'air et réagit très vivement avec l'eau. Les conditions dans lesquelles se déroulent l'expérience sont donc très particulières.

45. Les sondes de champ magnétique fonctionnent sur le principe de l'effet Hall (avec des semi-conducteurs). Il faut une sonde par direction donc trois sondes pour mesurer les trois composantes du champ magnétique.

46. 1 tesla = 10000 gauss.

47. Les chercheurs ont fait tourner les turbines à des vitesses différentes pour simuler la rotation d'ensemble de la planète.

48. Le reversement de la direction du champ et ses variations aléatoires sont mis en évidence par cette expérience, de même que le fait que la durée de retournement du champ est très faible devant la durée pendant laquelle le champ garde un signe constant.

### B.2.2 Le nombre de Reynolds cinématique

49. Le terme  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  est l'accélération de la particule de fluide, composée de l'accélération locale :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  et de l'accélération convective :  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ .

–  $\overrightarrow{\text{grad}} P$  est la densité volumique des forces de pression,  $\vec{j} \wedge \vec{B}$  la densité volumique des forces de Laplace et  $\eta \Delta \vec{v}$  la densité volumique des forces de viscosité.

50. Le nombre de Reynolds cinématique permet de comparer l'ordre de grandeur de  $\rho \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|$  et celui de  $\eta \left\| \Delta \vec{v} \right\|$ . Le premier correspond au transport convectif de quantité de mouvement, le second au transport diffusif, ce qui est bien la signification donnée dans l'encadré à la fin de l'article.

51. Il faut trouver l'ordre de grandeur de la vitesse et de la taille de l'écoulement. Pour la taille, on peut prendre le rayon de la cuve, à savoir  $L \sim 0,3$  m (on note par  $\sim$  l'ordre de grandeur) et pour la vitesse de rotation d'un point à la périphérie de la cuve, à savoir  $\Omega L$  où  $\Omega$  est la vitesse de rotation, de l'ordre de 1000 tours par minutes, c'est-à-dire :  $U \sim \frac{1000 \times 2\pi}{60} \times 0,3 \simeq 30 \text{ m.s}^{-1}$ . On en déduit :

$$\text{Re} = \frac{30 \times 0,3 \times 900}{6 \cdot 10^{-4}} \simeq 10^7 : \text{c'est bien l'ordre de grandeur donné dans le texte.}$$

*Attention, la valeur donnée dans l'énoncé pour la viscosité du sodium comporte une erreur d'un facteur 10.*

### B.2.3 Le nombre de Reynolds magnétique

52. L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, avec l'approximation suggérée par l'énoncé :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Or, d'après l'équation de Maxwell-Faraday,  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère. Il vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \sigma \left( \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) \right)$$

Or  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B}$  puisque  $\text{div} \vec{B} = 0$ .

Finalement :

$$-\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{B}) \right)$$

ou encore :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B}$$

**53.** Le nombre de Reynolds magnétique compare l'ordre de grandeur de  $\|\text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B})\|$  et celui de  $\frac{1}{\mu_0 \sigma} \|\Delta \vec{B}\|$ .

**54.**  $Rm = \mu_0 \sigma UL \simeq 4\pi 10^{-7} \times 10^7 \times 30 \times 0,3 \simeq 100$ . C'est un peu grand mais la vitesse caractéristique est sans doute un peu surestimée.

### B.3 Alternateur en classe de troisième

**55.**

**56.**

### B.4 Modèle de la dynamo auto-entretenu

**57.** Le disque conducteur, en mouvement dans le champ magnétique, est le siège d'un courant induit. Il apparaît une force électromotrice entre les points  $O$  et  $C$ , égale à la circulation de  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  le long de  $OC$ .  $\vec{v}$  est selon  $\vec{u}_\theta$ ,  $\vec{B}$  selon  $\vec{u}_z$  donc  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  est selon  $\vec{u}_r$ , dans le même sens que l'élément de longueur  $\vec{dl}$  le long de  $OC$  : la fem induite est positive, le courant induit circule dans le sens du courant  $I$  représenté sur la figure et crée un champ magnétique dans le même sens que le champ initial. Le champ induit accroît le champ initial : le phénomène s'amplifie et la génération spontanée du champ est donc possible à partir de légères perturbations qui assurent le démarrage du processus. Si le sens de rotation du disque est inversé, la vitesse est dans l'autre sens donc la fem induite est négative de  $O$  à  $C$ , le courant induit est dans l'autre sens et le champ induit s'oppose au champ initial. La génération spontanée du champ magnétique n'est pas possible.

**58.** La distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe  $Oz$ , le champ magnétique ne dépend pas de l'angle  $\theta$ .

Soit un point  $M$  n'appartenant pas à l'axe  $Oz$ . Le plan contenant le point  $M$  et l'axe  $Oz$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ magnétique est donc dans le plan engendré par les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_z$ , il n'a pas de composante orthoradiale.

**59.**  $M$  s'exprime henry (H).

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{1}{I_1} \int_{P \in (C_2)} \vec{B}_1(P) \cdot d\vec{S}_P \\ &= \frac{1}{I_1} \int_{r=0}^{r=R_2} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \vec{B}_1(P) \cdot (dr \, r d\theta) \vec{u}_z = \frac{2\pi}{I_1} \int_0^{R_2} r B_{1z}(r, d) dr \end{aligned}$$

**60.** La fem induite s'écrit :

$$e_{OC} = \int_{M \in OC} (\vec{v}(M) \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}_M = \int_0^a \omega r B_z(r, d) dr = \frac{\omega MI}{2\pi}$$

**61.** La fem totale induite est la somme de  $e_{OC}$  et de la fem auto-induite,  $e = -L \frac{dI}{dt}$ . La résistance électrique du circuit étant  $R$ , l'équation électrique est :  $e_{OC} - L \frac{dI}{dt} = RI(t)$ , soit :

$$(E) \quad L \frac{dI}{dt} + RI(t) - \frac{MI(t)}{2\pi} \omega(t) = 0$$

**62.** Le moment par rapport à l'axe des forces de Laplace s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_\Delta &= \int_{P \in OC} \left( \overrightarrow{OP} \wedge (I \overrightarrow{dl}_P \wedge \overrightarrow{B}(P, t)) \right) \cdot \overrightarrow{u}_z \\
 &= \int_0^b r \overrightarrow{u}_r \wedge (-I B_z(r, d) dr \overrightarrow{u}_\theta) \cdot \overrightarrow{u}_z \\
 &= -I \int_0^b B_z(r, d) r dr \\
 &= -I \times \frac{MI}{2\pi}
 \end{aligned}$$

**63.** Le dispositif tournant est soumis à son poids de moment nul par rapport à l'axe vertical, aux forces de Laplace et à l'action du couple moteur. Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe  $\Delta$  appliqué au dispositif tournant s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta \Gamma$$

ou encore :

$$(M) \quad J \frac{d\omega}{dt} + \frac{M}{2\pi} I^2(t) - \Gamma = 0$$

**64.** Afin d'établir le bilan énergétique du dispositif, on multiplie l'équation électrique par  $I dt$  et l'équation mécanique par  $\omega dt$  :

$$\begin{cases}
 LI \frac{dI}{dt} dt + RI^2 dt - \frac{MI^2 \omega}{2\pi} dt = 0 \\
 J \frac{d\omega}{dt} + \frac{MI^2 \omega}{2\pi} - \Gamma \omega dt = 0
 \end{cases}$$

On additionne ces deux équations et on regroupe les termes pour arriver à l'équation suivante :

$$\Gamma \omega dt = d \left( \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} LI^2 \right) + RI^2 dt$$

L'énergie fournie par le couple moteur  $\Gamma$  fait varier l'énergie totale du dispositif (énergie cinétique + énergie magnétique) mais une partie est dissipée par effet Joule.

**65.** Pour  $I = I_C$  et  $\omega = \omega_C$  constants, les équations (E) et (M) deviennent :

$$\begin{cases}
 RI_C = \frac{M}{2\pi} \omega_C I_C \\
 \frac{M}{2\pi} I_C^2 = \Gamma
 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$I_C = \sqrt{\frac{2\pi\Gamma}{M}} \quad \text{et} \quad \omega_C = \frac{2\pi R}{M}$$

Homogénéité :

$[\Gamma] = [F][L] = ML^2T^{-2}$  et  $[M] = \left[ \frac{E}{I^2} \right] = ML^2T^{-2}I^{-2}$  donc l'expression de  $I_C$  est bien homogène.

$[R] = \left[ \frac{E}{TI^2} \right] = ML^2T^{-1}I^{-2}$  donc  $[\omega_C] = T^{-1}$  : l'expression de  $\omega_C$  est bien homogène.

**66.** Le bilan énergétique en régime permanent devient :  $\Gamma\omega_C = RI_C^2$  : l'énergie fournie par le couple moteur sert à compenser les pertes par effet Joule.

**Fin**