

Corrigé du problème :

Quelques applications plus ou moins futuristes des nanotubes de carbone

Partie A

Astronomie au lycée

1. (a) Dans l'ordre chronologique : Ptolémée, Copernic, Tycho Brahé, Képler et Galilée sont contemporains, Newton.
 - (b) – Ptolémée : 2^{ème} siècle
 - Copernic (1473-1543) : Travaux début 16^{ème} siècle
 - Ticho Brahé (1546-1601) : Travaux fin 16^{ème} siècle
 - Kepler (1571-1630) : Travaux début 17^{ème} siècle
 - Galilée (1564 - 1642) : Travaux les plus célèbres début du 17^{ème} siècle
 - Newton (1642 - 1727) : Travaux fin 17^{ème} siècle
 - (c) – Nicolas Copernic propose un modèle héliocentrique pour décrire le mouvement des planètes. Mais les résultats ne sont pas plus précis que les tables de Ptolémée, aucune table astronomique ne sera construite à partir de ce modèle.
 - Galilée : Si Galilée n'a pas inventé la lunette, il en a construit plusieurs en s'appuyant sur des travaux hollandais. Ses observations l'ont conduit à des résultats inattendus : la Lune n'est pas une sphère lisse ; certaines planètes comme Jupiter ont des satellites ; la Voie Lactée est formée d'étoiles. Mais c'est surtout l'observation des phases de Vénus qui le conduise à affirmer la primauté du modèle héliocentrique.
 - Newton : Newton marque le début de la mathématisation de la physique. Il pose les fondements de la mécanique classique avec en particulier la loi de l'interaction gravitationnelle qui permet d'expliquer les lois de Kepler.
 - (d) En août 2006, lors de sa 26^{ème} assemblée générale, L'Union Astronomique Internationale a donné la définition d'une planète. Selon cette définition, le système solaire ne compte plus que huit planètes : Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Pluton se classe dans la catégorie des planètes naines.
2. Le *Transit de Vénus* correspond au passage de Vénus devant le soleil quand cette planète est observée depuis la Terre. Lors du *transit* du 8 juin 2004, une nouvelle campagne de mesure de l'unité astronomique a été lancée.
 3. La Lune : satellite de la Terre.
 - (a) – La méthode la plus précise utilisée actuellement est la télémétrie laser qui consiste à mesurer de temps mis par la lumière pour faire un aller retour entre la Terre et la Lune. Une impulsion laser est envoyée depuis la Terre et réfléchié par un réflecteur posé sur la Lune.

- Cette technique peut être exploitée en classe de seconde dans la partie *Exploration de L'espace, - De l'atome aux galaxies - Propagation rectiligne de la lumière, vitesse de la lumière.*
 - La précision sur la mesure de la distance est directement liée à la précision de la mesure du temps : une erreur de 10^{-9} s = 1 ns conduit à une erreur de 30 cm. Si on souhaite utiliser ce type de méthode pour des distances de l'ordre du mètre, il est nécessaire d'avoir un appareil de mesure du temps très précis.
- (b) - L'utilisation d'un logiciel de simulation, permet d'observer l'effet de la vitesse initiale sur la portée d'un tir. Ce travail de simulation permet d'une part d'atteindre un des objectifs du programme : *Prévoir qualitativement comment est modifié le mouvement d'un projectile lorsqu'on modifie la vitesse initiale* et d'autre part de faire comprendre aux élèves que la Lune est en chute libre.

4. Astronomie en terminale S.

Un exemple de scénario :

- **Eléments supposés acquis par les élèves avant le début de la séance :** Tout le cours a été fait, les lois de Kepler ont été vues mais la 3ème loi n'est pas encore vérifiée pour une orbite circulaire.
- **Contenus, connaissances et savoir-faire exigibles développés :** Exploiter des informations concernant le mouvement des satellites et des planètes. Retrouver la troisième loi de Kepler pour un mouvement circulaire uniforme.
- **Plan de la séquence :**

Travail élève : Quelle exploitation peut-on faire des données fournies ?

Résultat attendu : Vérification de la troisième loi de Képler

Travail prof/élève : Retrouver la troisième loi de Képler pour un mouvement circulaire uniforme.

Comme la trajectoire est circulaire, on sait que l'accélération est centripète et vaut v^2/R , où v est la vitesse de la planète et R le rayon de son orbite. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc :

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$$

où m est la masse de la planète et M celle de l'astre autour duquel elle gravite.

La période de révolution T est donnée par $T = 2\pi R/v$ de sorte que :

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler qui prédit que pour toutes les planètes gravitant autour d'un même astre, le rapport R^3/T^2 est constant.

Travail élève : Comment retrouver la masse du Soleil puis de la Terre à partir des données fournies.

Du tableau de l'énoncé, on déduit :

Astre	$R(m)$	$T(s)$	$4\pi^2 R^3/GT^2(kg)$
Mercur	$5,81 \cdot 10^{10}$	$7,60 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^{30}$
Vénus	$1,08 \cdot 10^{11}$	$1,94 \cdot 10^7$	$2,00 \cdot 10^{30}$
Terre	$1,50 \cdot 10^{11}$	$3,16 \cdot 10^7$	$2,01 \cdot 10^{30}$
Mars	$2,28 \cdot 10^{11}$	$5,93 \cdot 10^7$	$1,99 \cdot 10^{30}$
Jupiter	$7,80 \cdot 10^{11}$	$3,75 \cdot 10^8$	$2,00 \cdot 10^{30}$
Saturne	$1,43 \cdot 10^{12}$	$9,29 \cdot 10^8$	$2,01 \cdot 10^{30}$
Uranus	$2,88 \cdot 10^{12}$	$2,65 \cdot 10^9$	$2,01 \cdot 10^{30}$
Neptune	$4,52 \cdot 10^{12}$	$5,20 \cdot 10^9$	$2,01 \cdot 10^{30}$
Lune	$3,84 \cdot 10^8$	$2,36 \cdot 10^6$	$6,02 \cdot 10^{24}$

On constate que la troisième loi de Kepler est bien vérifiée pour les planètes gravitant autour du soleil et on déduit la masse du soleil $M_S = 2,00 \cdot 10^{30}$ kg. Des données concernant la Lune, on déduit également la masse de la terre $M_T = 6,02 \cdot 10^{24}$ kg.

Partie B

Réalisation d'un ascenseur spatial

1 Satellite géostationnaire

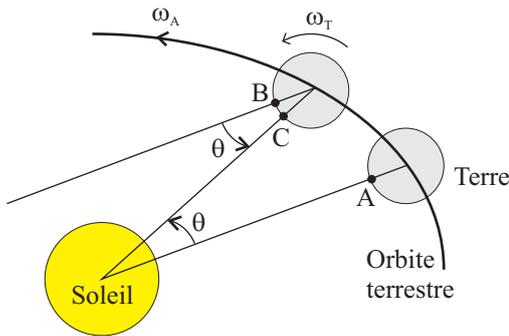
1. Un satellite géostationnaire est un satellite fixe par rapport à la terre. Son orbite est circulaire, dans le plan équatorial. On y trouve par exemple les satellites de télécommunication.
2. Dans le référentiel terrestre, le satellite (de masse m) est immobile et 2 forces s'exercent sur lui : son poids $-GM_T m/R_s^2 \vec{u}$ et la force d'inertie d'entraînement $m\omega_T^2 R_s \vec{u}$ (force centrifuge), où \vec{u} est le vecteur unitaire pointant de la Terre vers le satellite.

Dans le référentiel géocentrique, supposé Galiléen, le satellite est uniquement soumis à son poids et il est en mouvement circulaire uniforme d'accélération centripète $-\omega_T^2 R_s \vec{u}$.

Dans les 2 cas, l'application du principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$R_s = \left(\frac{GM_T}{\omega_T^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

3. Comme la terre tourne autour du soleil en même temps qu'elle tourne sur elle-même, la durée du jour solaire est différente de la période de rotation propre de la terre (jour sidéral). Comme les deux rotations s'effectuent dans le même sens, le jour sidéral (T_T) est plus court que le jour solaire (T_J). On peut le comprendre à l'aide de la figure 3.



- Figure 1 -

On part d'une position de la terre où le soleil est à la verticale du lieu situé au point A. Au bout d'un jour sidéral, ce lieu se trouve au point B et le soleil n'est pas encore revenu à sa verticale. On constate sur la figure 3 que l'angle manquant est égal à l'angle parcouru sur l'orbite terrestre. Lors d'une rotation autour du soleil, il y a donc exactement un jour sidéral de plus que de jours solaires. On en déduit :

$$\frac{T_A}{T_T} = \frac{T_A}{T_J} + 1$$

soit

$$\frac{T_T}{T_J} = \frac{\frac{T_A}{T_J}}{\frac{T_A}{T_J} + 1} = \frac{365,25}{366,25} = 0,997$$

4. *Application numérique* : $R_s = 42200$ km.
5. On aurait pu appliquer la troisième loi de Kepler à la Lune et à un satellite géostationnaire (tous deux satellites de la terre, de périodes de révolution respectives T_{lune} et T_T , et avec des rayons d'orbite respectifs R_{lune} et R_s). On aurait alors obtenu directement :

$$R_s = R_{lune} \left(\frac{T_s}{T_{lune}} \right)^{\frac{2}{3}} = 2,56 \cdot 10^{-3} \times 1,50 \cdot 10^{11} \times \left(\frac{0,997}{27,3} \right)^{\frac{2}{3}} = 42200 \text{ km}$$

2 Câble de section constante

1. Dans le référentiel terrestre, la force d'inertie d'entraînement qui s'exerce sur un élément du câble, de longueur dr et de masse dm , situé à la distance r du centre de la Terre s'écrit $dm \omega_T^2 r \vec{u}$.
2. La condition d'équilibre de cet élément de câble projetée sur \vec{u} s'écrit :

$$T(r+dr) - T(r) - \underbrace{dm \frac{GM_T}{r^2}}_{\text{Poids de l'élément de câble}} + \underbrace{dm \omega_T^2 r}_{\text{force centrifuge}} = 0$$

Comme $dm = \rho S dr$, $\omega_T^2 = GM_T/R_s^3$ et $g_0 = GM_T/R_T^2$, on trouve :

$$T(r+dr) - T(r) - dP(r) = 0$$

où

$$dP(r) = \rho S g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_s^3} \right) dr$$

$dP(r)$ est le poids apparent de l'élément de câble dans le référentiel terrestre. $dP(r) = 0$ pour $r = R_s$. Sur l'orbite géostationnaire, le poids apparent dans le référentiel terrestre d'un objet est nul. C'est pourquoi un satellite peut y rester immobile par rapport à la terre.

3. Comme l'extrémité du câble sur l'orbite géostationnaire est libre et que le poids apparent d'un élément de câble sur l'orbite géostationnaire est nul, on déduit :

$$T(R_s) = 0$$

D'après ce qui précède :

$$\frac{dT}{dr} = \rho S g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_s^3} \right)$$

On en déduit :

$$T(r) = \rho S g_0 R_T^2 \left(-\frac{1}{r} - \frac{r^2}{2R_s^3} \right) + \text{Constante}$$

La condition aux limites $T(R_s) = 0$ permet d'obtenir la valeur de la constante et :

$$T(r) = \rho S g_0 R_T^2 \left(-\frac{1}{r} - \frac{r^2}{2R_s^3} + \frac{3}{2} \frac{1}{R_s} \right)$$

4. On écrit le bilan des forces exercées sur le câble dans le référentiel terrestre. Comme l'extrémité du câble sur l'orbite géostationnaire est libre, il n'est soumis qu'à 2 forces : la force $-\vec{T}(R_T)$ exercée par la fixation du câble sur la terre et son poids apparent. Le câble étant à l'équilibre dans le référentiel terrestre, on en déduit immédiatement que $\vec{T}(r = R_T)$ est le poids apparent du câble dans le référentiel terrestre.

L'expression de $T(r)$ obtenue ci-dessus donne :

$$T(R_T) = \rho S g_0 R_T^2 \left(-\frac{1}{R_T} - \frac{R_T^2}{2R_s^3} + \frac{3}{2} \frac{1}{R_s} \right)$$

S'il se trouvait entièrement dans le champ de pesanteur g_0 , le câble aurait un poids $P_0 = \rho S(R_s - R_T)g_0$. On en déduit :

$$T(R_T) = P_0 \frac{R_T^2}{R_s - R_T} \left(-\frac{1}{R_T} - \frac{R_T^2}{2R_s^3} + \frac{3}{2} \frac{1}{R_s} \right) = -P_0 \frac{x}{1-x} \left(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} \right)$$

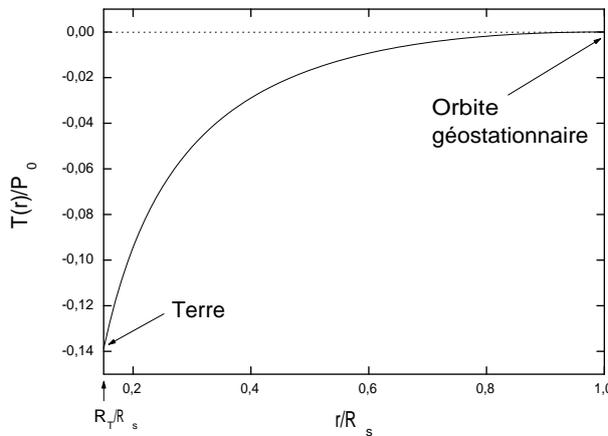
où $x = R_T/R_s$.

On a donc :

$$|T(R_T)| = P_0 \frac{x}{1-x} \left(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} \right)$$

Application numérique : $x \approx 0,15$ et $|T(R_T)|/P_0 \approx 14\%$.

5. La figure 2 présente la tension du câble en fonction de r .



- Figure 2 - Tension d'un câble de longueur $R_s - R_T$

Le câble est en compression (tension négative). Il y a risque d'effondrement.

6. Le poids apparent d'un élément de longueur du câble situé à $r > R_s$ est dans le sens de \vec{u} (la force centrifuge est plus grande que le poids en valeur absolue).
7. Lorsque le poids apparent total du câble est positif, la tension du câble au niveau de la terre est positive (voir question 4). Elle passe par un maximum et s'annule à l'extrémité libre du câble. Le câble est donc partout en tension et le risque d'effondrement a disparu. La valeur limite R_0 correspond donc à l'annulation du poids apparent total du câble. Pour l'obtenir, on écrit donc :

$$\int_{R_T}^{R_0} dP(r) = \int_{R_T}^{R_0} \rho S g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_s^3} \right) dr = 0$$

soit

$$\left[-\frac{1}{r} - \frac{r^2}{2R_s^3} \right]_{R_T}^{R_s} = 0$$

R_0 est donc solution de l'équation :

$$1 + \frac{R_0^3}{2R_s^3} - \frac{R_0}{R_T} - \frac{R_0 R_T^2}{2R_s^3} = 0$$

Dans le membre de gauche de l'équation précédente, le 2^{ème} et le 3^{ème} termes sont nettement plus grands que le 1^{er} et le 4^{ème} (en supposant que R_0 vaut quelques R_s , ce que l'on vérifiera *a posteriori*).

On a donc :

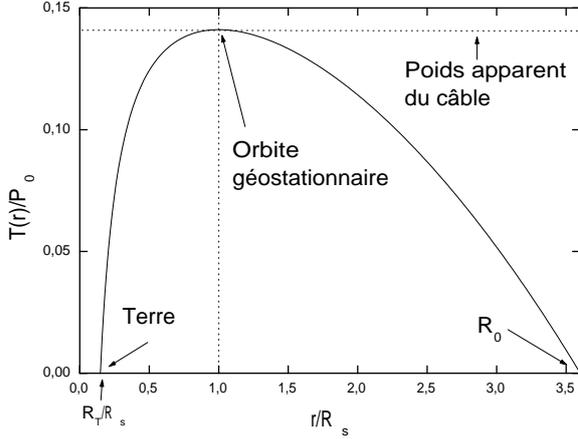
$$\frac{R_0^3}{2R_s^3} - \frac{R_0}{R_T} \approx 0$$

d'où :

$$R_0 \simeq \sqrt{\frac{2R_s^3}{R_T}}$$

Application numérique : $R_0 \approx 153600\text{km} \approx 3,6 R_s$, ce qui valide l'hypothèse ci-dessus.

8. La figure 3 présente les variations de la tension d'un câble longueur $R_0 - R_T$ en fonction de r .



- Figure 3 - Tension d'un câble de longueur $R_0 - R_T$

Le maximum T_{max} de $T(r)$ est atteint lorsque $dP(r) = 0$, c'est à dire sur l'orbite géostationnaire. $|T_{max}|$ est alors égale au poids apparent dans le référentiel terrestre de la portion de câble $r < R_s$. $T(r)$ s'annule en $r = R_T$ et $r = R_0$.

3 Câble de section variable

1. Comme $S(r) = T(r)/\sigma(r)$ et $\sigma \leq \sigma_c$, on doit forcément choisir $S(r) \geq T(r)/\sigma_c$ si l'on veut éviter la rupture du câble. Pour minimiser la masse du câble, on a intérêt à choisir en tout point la surface minimale donnée par $S(r) = T(r)/\sigma_c$. La contrainte dans le câble est alors constante égale à σ_c .

2. En utilisant :

$$\frac{dT}{dr} = \rho S g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_s^3} \right) \quad \text{et} \quad T(r) = \sigma_c S(r)$$

on trouve immédiatement :

$$\frac{dS}{S(r)} = \frac{R_T^2}{h} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R_s^3} \right] dr \quad \text{où} \quad h = \frac{\sigma_c}{\rho g_0}$$

h a la dimension d'une longueur.

3. L'intégration de l'équation ci-dessus conduit à :

$$\text{Ln} \frac{S(r)}{S_s} = \frac{R_T^2}{h} \left[-\frac{1}{r} - \frac{r^2}{2R_s^3} \right]_{R_s}^r$$

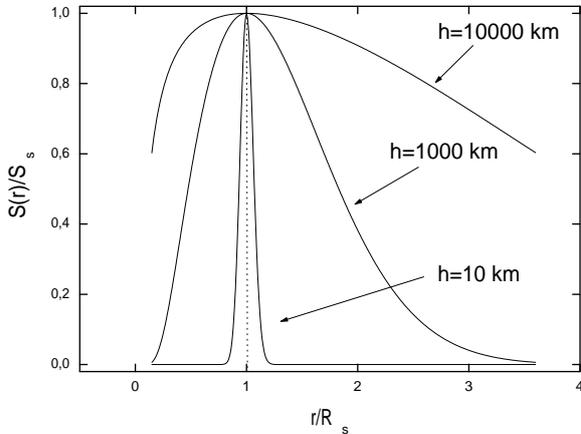
soit :

$$\text{Ln} \frac{S(r)}{S_s} = \frac{R_T^2}{h} \left[-\frac{1}{r} - \frac{r^2}{2R_s^3} + \frac{3}{2R_s} \right]$$

On en déduit :

$$S(r) = S_s e^{\frac{3R_T^2}{2hR_s}} e^{(-\frac{R_T}{h})\left(\frac{R_T}{r} + \frac{R_T r^2}{2R_s^3}\right)}$$

La figure 4 présente les variations de la surface optimale $S(r)$ en fonction de r pour 3 valeurs de h . $S(r)$ est maximale sur l'orbite géostationnaire et le rapport d'aspect du câble S_s/S_T , que l'on étudie quantitativement à la question suivante, est d'autant plus grand que h est petit.



- Figure 4 - Surface optimale

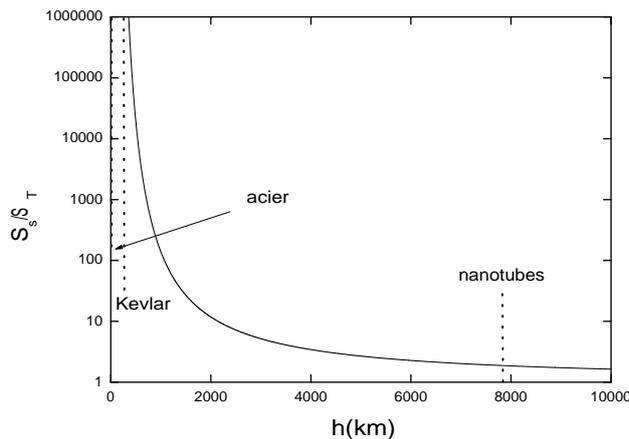
4. De la question précédente, on déduit pour $r = R_T$:

$$S_T = S_s e^{\frac{3R_T^2}{2hR_s}} e^{(-\frac{R_T}{h})(1+\frac{R_T^3}{2R_s^3})} = S_s e^{(-\frac{R_T}{h})(1+\frac{R_T^3}{2R_s^3}-\frac{3R_T}{2R_s})}$$

d'où

$$\frac{S_s}{S_T} = e^{\frac{R_T}{h}(1+\frac{R_T^3}{2R_s^3}-\frac{3R_T}{2R_s})} = e^{0,775 \frac{R_T}{h}}$$

La figure 5 présente S_s/S_T en fonction de h . Le rapport d'aspect du câble reste raisonnable (de l'ordre de l'unité) lorsque h est comparable ou supérieur au rayon terrestre R_T . Il diverge exponentiellement pour les faibles valeurs de h . On a indiqué sur la figure les valeurs de h correspondant aux matériaux étudiés dans la partie suivante.



- Figure 5 - Rapport d'aspect du câble

Puisque $T(r) = \sigma_c S(r)$, $T(r)$ varie exactement comme $S(r)$. Les variations de $T(r)$ sont donc aussi données par la figure 4.

4 Choix du matériau

1. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de h pour les différents matériaux considérés.

Matériau	Acier	Kevlar	Nanotubes
$h(\text{km})$	13	246	7840

2. A l'aide des résultats de la partie précédente, on obtient pour le rapport d'aspect S_s/S_T les valeurs reportées dans le tableau ci-dessous.

Matériau	Acier	Kevlar	Nanotubes
S_s/S_T	$\approx 10^{164}$	$5,2 \cdot 10^8$	1,88

Seuls les nanotubes de carbone permettent d'envisager la réalisation d'un tel câble.

3. L'allongement relatif σ_c/E du câble sous contrainte σ_c est donné dans le tableau ci-dessous pour les différents matériaux considérés.

Matériau	Acier	Kevlar	Nanotubes
$\delta l/l$	$5 \cdot 10^{-3}$	0,12	0,1

L'allongement relatif est beaucoup plus important dans le cas du Kevlar et des nanotubes que dans le cas de l'acier.

4. En utilisant $T(R_T) = \sigma_c S_T$ et $S_s/S_T = e^{0,775 R_T/h}$, on calcule, pour $T(R_T) = 10^6 \text{ N}$ (i.e. à peu près 10 fois le poids d'une masse de 10 tonnes à la surface de la terre), les valeurs suivantes de S_T et S_s :

Matériau	Acier	Kevlar	Nanotubes
$S_T (\text{m}^2)$	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-4}$	10^{-5}
$S_s (\text{m}^2)$	$\approx 10^{161}$	$1,5 \cdot 10^5$	$1,9 \cdot 10^{-5}$

On constate que seuls les nanotubes de carbone permettent d'envisager la réalisation d'un câble de dimensions raisonnables et suffisamment résistant.

Partie C

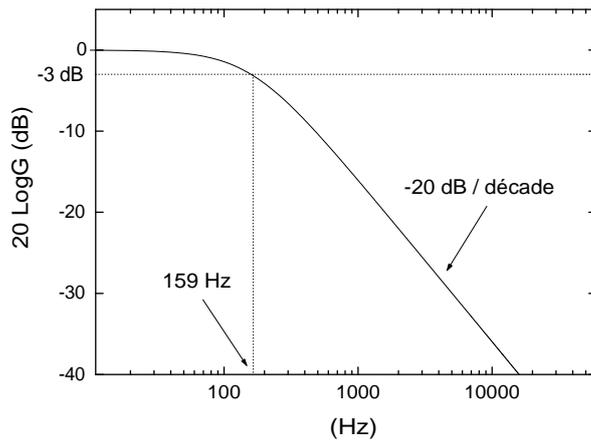
Electricité : le dipôle RC

- Un exemple de séance de travaux pratiques :
 - Objectifs en termes de savoir acquis**
 - Continuité de la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur.
 - Un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en régime permanent
 - Le temps de réponse τ augmente avec proportionnellement avec R et avec C . Analyse dimensionnelle pour retrouver $\tau = RC$.
 - Compétences développées**
 - Compétences expérimentales :
Analyser des résultats expérimentaux.
Proposer une expérience susceptible de répondre à un objectif précis.
 - Compétences manipulatoires :
Réaliser un montage à partir d'un schéma.
 - Compétences scientifiques :
Identifier les paramètres jouant un rôle dans un phénomène physique.
Utiliser l'analyse dimensionnelle.
Construire une courbe à partir d'un ensemble de mesures.
 - Exemple de plan de la séquence**
 - Travail élève :
Suivi d'un protocole expérimental donné par le professeur : observer $U_C(t)$ et $U_R(t)$, agir sur les différents paramètres du circuit. Tous les élèves n'ont pas obligatoirement les mêmes valeurs de R et C .

- Mise en commun :
 Au bout d'un certain temps $U_C(t) = E$ et $U_R(t) = 0$.
 A $t = 0$, $U_C(t)$ est continu, $U_R(t)$ ne l'est pas.
 Les valeurs de R et C ont clairement un impact sur le temps caractéristique. C'est moins évident pour E . Il est donc nécessaire de définir une méthode commune de mesure du temps caractéristique.
 - Travail élève :
 Partage du travail : un groupe travaille sur un paramètre et doit caractériser l'influence de ce paramètre.
 - Travail de synthèse :
 Continuité de $uc(t)$.
 C se comporte comme un interrupteur ouvert en régime permanent.
 Le temps de réponse augmente proportionnellement à R et à C .
 Analyse dimensionnelle pour retrouver $\tau = RC$.
2. (a) La période T du signal créneau doit être nettement supérieure à la constante de temps du circuit. En pratique, on doit avoir $T/2$ de l'ordre de $5RC$ pour observer convenablement le phénomène, ce qui correspond à une fréquence f de l'ordre de $1/(10RC)$.
 - (b) Pour ces valeurs de fréquences de l'ordre de la centaine de Hertz, on peut considérer que l'entrée de l'oscilloscope est équivalente à une résistance (de l'ordre du $M\Omega$). La petite capacité (de l'ordre de 10 pF) en parallèle de cette résistance joue alors un rôle négligeable.
 - (c) Si la résistance R est comparable à la résistance d'entrée de l'oscilloscope R_{osc} , 2 phénomènes se produisent :
 - Le temps caractéristique du circuit n'est plus égal à RC mais à $(R//R_{osc})C$.
 - En régime permanent, la tension observée n'est plus égale à E mais à $E R_{osc}/(R + R_{osc})$.
 - (d) $R_{max} \sim R_{osc} \sim M\Omega$
 - (e) Le schéma équivalent d'un générateur basse-fréquence est constitué d'un générateur de tension idéal en série avec une résistance, appelée résistance de sortie et notée R_{GBF} .
 - (f) Si la résistance R est comparable à R_{GBF} , 2 phénomènes se produisent :
 - Le temps caractéristique du circuit n'est plus égal à RC mais à $(R + R_{GBF})C$.
 - La tension d'entrée est déformée, ce n'est plus un créneau.
 La résistance de sortie d'un générateur basse fréquence est généralement égale à 50Ω .
 - (g) Pour $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \text{ nF}$, on a $\tau = RC = 0,1 \text{ ms}$. Les choix d'une durée d'acquisition de $0,7 \text{ ms}$ et d'un temps entre 2 mesures de $1 \mu\text{s}$ (soit une fréquence d'échantillonnage de 1 MHz) sont raisonnables. Le déclenchement de l'acquisition se fait sur le signal d'entrée et il est souhaitable de choisir le mode avec affichage du signal avant le déclenchement si c'est possible.
3. (a) Pour déterminer qualitativement la nature du filtre, il suffit d'étudier le comportement du circuit aux très basses fréquences ($f \rightarrow 0$) et aux très hautes fréquences ($f \rightarrow \infty$). Dans l'exemple considéré ici, la tension de sortie est prise aux bornes du condensateur d'un circuit RC . A très basse fréquence, le condensateur est un circuit ouvert et la tension de sortie est égale à la tension d'entrée. A haute fréquence, le condensateur est un court-circuit et la tension de sortie est nulle. On a donc un filtre passe-bas.
 - (b) La fonction de transfert du filtre vaut :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (1)$$

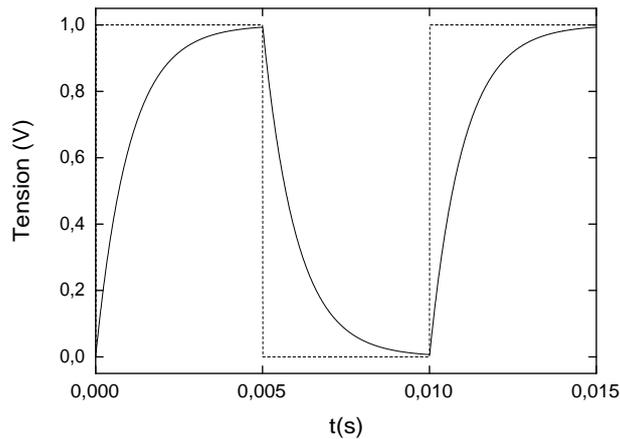
- (c) La figure 6 présente le diagramme de Bode du filtre RC étudié pour $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \text{ nF}$.



- Figure 6 - Diagramme de Bode d'un filtre RC passe-bas

Il s'agit d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 1/2\pi RC = 159$ Hz.

- (d) la figure 7 présente la réponse du même circuit à un échelon de tension de fréquence et variant entre 0 et 1 Volt.



- Figure 7 - Réponse d'un filtre RC passe-bas à un échelon de tension

On constate que les phénomènes lents sont conservés que puisque l'on conserve la composante continue du signal : au bout d'un certain temps la tension est constante et non nulle. Par contre les phénomènes rapides ont disparu : la montée brutale de l'échelon de tension a disparu dans la réponse aux bornes de la capacité. On a donc bien un filtre passe bas.

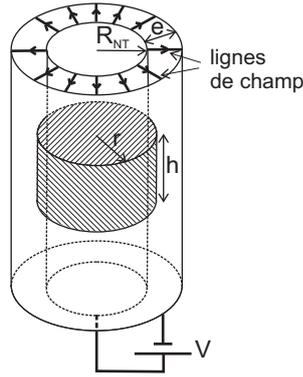
Partie D

Transistor à effet de champ à nanotube de carbone unique

1 Ordres de grandeur

1.1 Estimation de la capacité C

1. A l'intérieur du condensateur, le champ est radial comme représenté sur la figure 8.



- Figure 8 -

2. L'application du théorème de Gauss à la surface hâchée de la figure 8 (cylindre de rayon r et de hauteur h) conduit à :

$$2\pi r h E(r) = \frac{q_l h}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

d'où

$$E(r) = \frac{q_l}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r}$$

3. On en déduit :

$$V = \int_{R_{NT}}^{R_{NT}+e} \frac{q_l}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r} dr = \frac{q_l}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \text{Ln} \left(\frac{R_{NT} + e}{R_{NT}} \right)$$

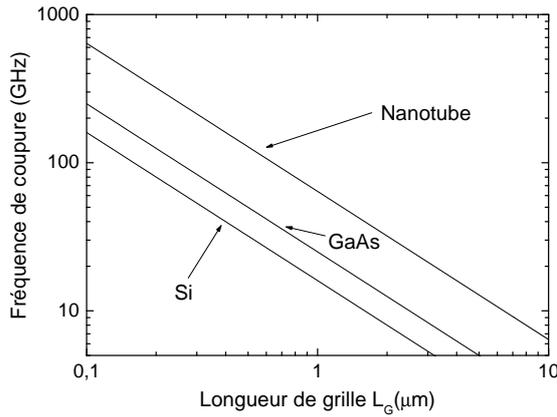
4. La capacité par unité de longueur de l'ensemble nanotube-alumine-grille est donc donnée par :

$$C_l = \frac{q_l}{V} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\text{ln} \left(\frac{R_{NT} + e}{R_{NT}} \right)}$$

5. *Application numérique* : $C_l = 180 \text{ aF} \cdot \mu\text{m}^{-1}$. Pour une longueur de grille $L_G = 100 \text{ nm}$, la capacité vaut 18 aF .

1.2 Fréquences caractéristiques

1. rC et C/g sont tous deux homogènes à un temps.
 $\nu_1 = \frac{1}{2\pi rC}$ et $\nu_2 = \frac{g}{2\pi C}$ sont donc des fréquences. Ce sont les fréquences caractéristiques du NTFET.
2. Pour $L_G = 100 \text{ nm}$, on trouve : $\nu_1 = 3,2 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$ et $\nu_2 = 6,4 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$. Lorsque L_G augmente, la capacité C augmente et les fréquences ν_1 et ν_2 diminuent.
3. La figure 9 compare les fréquences maximales d'utilisation des transistors à effet de champ usuels (Si et GaAs) et celles des NTFET (fréquence ν_2).



- Figure 9 - Fréquence maximale d'utilisation des transistors à effet de champ usuels et des NTFETs

On constate que les transistors à nanotubes ont des fréquences maximales d'utilisation supérieures à celles des transistors usuels.

2 Amplificateur à nanotube unique

2.1 Gain en tension

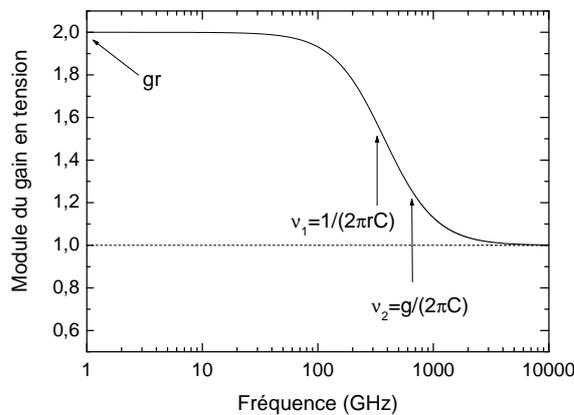
1. Lorsque $\tilde{i}_D = 0$, on a :

$$\tilde{v}_G - \tilde{v}_D = \frac{\tilde{i}_G}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \tilde{v}_D = r[\tilde{i}_G - g\tilde{v}_G]$$

En éliminant \tilde{i}_G dans les équations ci-dessus, on déduit :

$$G_V = \left(\frac{\tilde{v}_D}{\tilde{v}_G} \right)_{\tilde{i}_D=0} = \frac{jrC\omega - gr}{jrC\omega + 1} = \frac{1 + j\frac{\nu_2}{\nu}}{1 - j\frac{\nu_1}{\nu}}$$

2. la figure 10 présente $|G_V|$ en fonction de ν pour un NTFET dont la longueur de grille est $L_G = 100$ nm.



- Figure 10 - Module du gain en tension d'un NTFET ($L_G = 100$ nm, $C_l = 50$ aF. μm^{-1} , $r = 100$ k Ω , $g = 20$ μS)

Pour $\nu \ll \nu_1$ et ν_2 , $|G_V| = gr = \frac{\nu_2}{\nu_1}$ (la capacité est alors un circuit ouvert).
 Pour $\nu \gg \nu_1$ et ν_2 , $|G_V| = 1$ (la capacité est alors un court-circuit).

3. Le transistor présente un faible gain en tension (de l'ordre de 2 à basse fréquence).

- Si on branche une faible impédance Z_c entre drain et source, il faut remplacer r par $r//Z_c$ dans l'expression de G_V obtenue ci-dessus. Si $r \ll Z_c$, $r//Z_c \approx r$ et le module du gain à basse fréquence vaut $gZ_c \ll gr$. On a donc un effondrement du gain. Pour $Z_c = 50 \Omega$, on trouve $|G_V| = 10^{-3} \ll 1$. Il n'y a plus de gain en tension, au contraire.
- En connectant entre drain et source un grand nombre de tubes en parallèle entre drain et source, on diminue la résistance r proportionnellement au nombre de tubes alors que la capacité C et la transconductance g augmentent proportionnellement au nombre de tubes. Les performances intrinsèques du transistor sont donc inchangées (fréquences de coupure, gain en l'absence de charge). Par contre, on a résolu le problème soulevé à la question précédente qui était lié à la grande valeur de r . Pour obtenir $r = 50 \Omega$, il faut connecter 2000 nanotubes en parallèle, ce qu'on n'est pas loin de savoir faire à l'heure actuelle.

2.2 Gain en courant

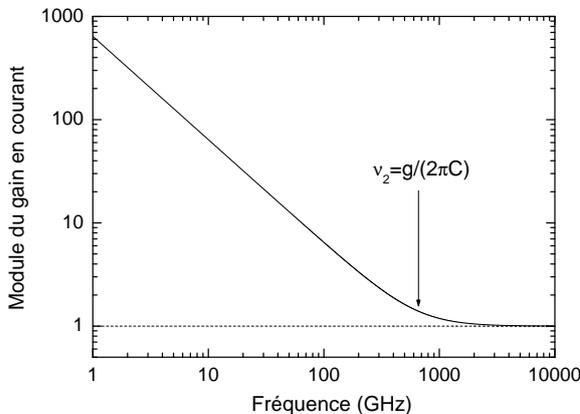
- Lorsque $Z_c = 0$, on a :

$$\tilde{v}_D = 0 \quad , \quad \tilde{i}_G + \tilde{i}_D = g\tilde{v}_G \quad \text{et} \quad \tilde{i}_G = jC\omega\tilde{v}_G$$

En éliminant v_G dans les équations précédentes, on obtient :

$$G_I = \left(\frac{\tilde{i}_D}{\tilde{i}_G} \right)_{\tilde{v}_D=0} = \frac{g}{jC\omega} - 1 = -1 - j\frac{\nu_2}{\nu}$$

- La figure 11 présente $|G_I|$ en fonction de ν pour un NTFET dont la longueur de grille est $L_G = 100 \text{ nm}$.



- Figure 11 -Module du gain en courant d'un NTFET ($L_G = 100 \text{ nm}$, $C_l = 50 \text{ aF} \cdot \mu\text{m}^{-1}$, $r = 100 \text{ k}\Omega$, $g = 20 \mu\text{S}$)

La résistance r n'intervient pas dans l'expression de G_I car elle n'est traversée par aucun courant ($\tilde{v}_D = 0$). Pour $\nu \gg \nu_2$, la capacité est un court-circuit et $\tilde{v}_G = \tilde{v}_D = 0$, on a alors $\tilde{i}_G = -\tilde{i}_D$. A fréquence $\nu \ll \nu_2$, l'impédance de la capacité est très grande et $\tilde{i}_D = g\tilde{v}_G = g/jC\omega\tilde{i}_G = -j\frac{\nu_2}{\nu}\tilde{i}_G$.

- Le NTFET présente un fort gain en courant à basse fréquence avec une fréquence de coupure égale à ν_2 . Les applications possibles sont les applications usuelles des amplificateurs de courant en particulier l'utilisation en commutation pour les dispositifs logiques.

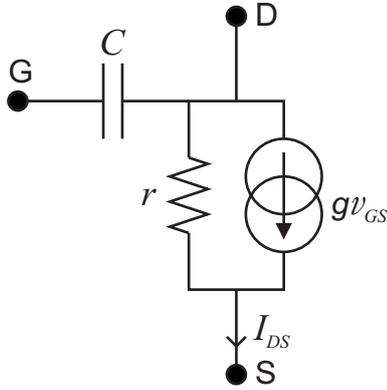
3 Application à la détection de charge

- On a $I_{DS} = \frac{N_\tau e}{\tau}$ donc $N_\tau = \frac{I_{DS}\tau}{e}$.

2. Le schéma équivalent du NTFET présenté figure 12 montre que :

$$V_{GS} = \frac{q}{C} + V_{DS}$$

où q est la charge électrique de la grille.



- Figure 12 -

On suppose que les variations de q et donc de V_{GS} sont lentes par rapport aux fréquences ν_1 et ν_2 . On a alors $V_{GS} \approx \frac{q}{C}$. On en déduit :

$$\delta V_{GS} = \frac{\delta q}{C}$$

d'où :

$$\delta I_{DS} = g \delta V_{GS} = g \frac{\delta q}{C}$$

D'après la question précédente, on a donc :

$$\delta N_\tau = \delta I_{DS} \frac{\tau}{e} = \frac{g}{eC} \delta q \tau$$

On en déduit :

$$\frac{\delta N_\tau e}{\delta q} = \frac{g}{C} \tau = 2\pi \nu_2 \tau = \omega_2 \tau$$

Application numérique : pour $\nu_2 = 100$ GHz et pour une variation de la charge de la grille δq égale à la charge élémentaire e on trouve que la variation du nombre d'électrons qui traversent le nanotube en un temps $\tau = 10^{-9}$ s vaut $\delta N_\tau = 628$ électrons.

3. On a :

$$\frac{\delta N_\tau}{\Delta N_\tau} = \frac{\delta N_\tau}{\sqrt{N_\tau}} = \frac{\omega_2 \tau \frac{\delta q}{e}}{\sqrt{\frac{I_{DS} \tau}{e}}} = \omega_2 \delta q \sqrt{\frac{\tau}{e I_{DS}}}$$

Le rapport signal sur bruit de la mesure de δq vaut $\frac{\delta N_\tau}{\Delta N_\tau}$. Si on admet que l'on sait détecter une charge δq si le rapport signal sur bruit vaut 1, on trouve que la plus petite charge détectable est :

$$\delta q_{min} = \frac{1}{\omega_2} \sqrt{\frac{e I_{DS}}{\tau}} = e \frac{C}{g} \sqrt{\frac{I_{DS}}{e \tau}}$$

Application numérique : Pour $\nu_2 = 100$ GHz, $I_{DS} = 10 \mu\text{A}$ et $\tau = 1$ ns, on trouve $\delta q_{min}/e = 0,4$. On a donc réalisé un électromètre extrêmement sensible capable de détecter une fraction de la charge électronique en une nanoseconde.

Partie E

Écoulement d'eau à travers un nanotube de carbone

1 Écoulement de Poiseuille

1. L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Lorsque le fluide est incompressible ρ est constant de sorte que :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Un champ de vitesse de la forme $v(r) \vec{u}_z$ vérifie l'équation ci-dessus.

Le fluide peut être considéré comme incompressible si la vitesse caractéristique de l'écoulement reste très inférieure à la vitesse du son dans le milieu.

2. L'origine microscopique de la force de viscosité est la diffusion de la quantité de mouvement du fluide.
3. La résultante des forces de viscosité qui s'exercent sur l'élément de fluide considéré s'écrit :

$$d^3 \vec{F} = \underbrace{-\eta \frac{dv}{dr}(r) r d\theta dz \vec{u}_z}_{\text{force exercée par le fluide situé entre } 0 \text{ et } r} + \underbrace{\eta \frac{dv}{dr}(r+dr) (r+dr) d\theta dz \vec{u}_z}_{\text{force exercée par le fluide situé au delà de } (r+dr)}$$

On en déduit :

$$d^3 \vec{F} = \eta d \left(r \frac{dv}{dr} \right) d\theta dz \vec{u}_z = \eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) d\theta dz dr \vec{u}_z$$

Le volume de l'élément de fluide considéré s'écrit $r d\theta dz dr$ de sorte que la densité volumique de force de viscosité s'écrit :

$$\frac{d^3 \vec{F}}{r d\theta dz dr} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_z$$

4. Dans l'équation de Navier Stokes, le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v}$ est l'accélération correspondant à la variation de vitesse associée à l'exploration du champ de vitesse par la particule de fluide au cours de son mouvement. Le terme $-\overrightarrow{\operatorname{grad}} P$ correspond aux forces de pression tandis que le terme $\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_z$ représente les forces de viscosité.
5. Comme $\vec{v} = v(r) \vec{u}_z$, $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = v(r) \frac{\partial}{\partial z} (v(r) \vec{u}_z) = \vec{0}$.

On déduit alors de l'équation de Navier Stokes que $\overrightarrow{\operatorname{grad}} P$ est colinéaire à \vec{u}_z et que P ne dépend donc que de z . Comme v ne dépend que de r , l'équation de Navier Stokes montre également que $\overrightarrow{\operatorname{grad}} P$ est indépendant de z .

On a donc :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{P(z=L) - P(z=0)}{L} = -\frac{\Delta P}{L}$$

La pression décroît linéairement dans le tube.

6. L'équation de Navier Stokes s'écrit :

$$\frac{\Delta P}{L} + \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0$$

En intégrant l'équation ci-dessus, on obtient :

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r + \text{constante}$$

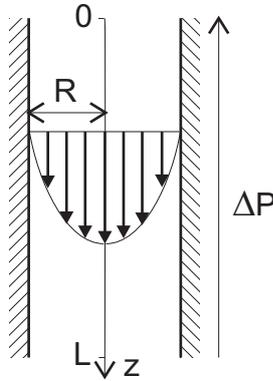
Comme $\frac{dv}{dr}$ doit rester fini pour $r = 0$ la constante d'intégration est nulle de sorte que :

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$$

Une nouvelle intégration et la prise ne compte de la condition aux limites $v(R) = 0$ conduit à :

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} (r^2 - R^2)$$

Le profil de vitesse est représenté schématiquement sur la figure 13.



- Figure 13 -Écoulement de Poiseuille : profil de vitesse

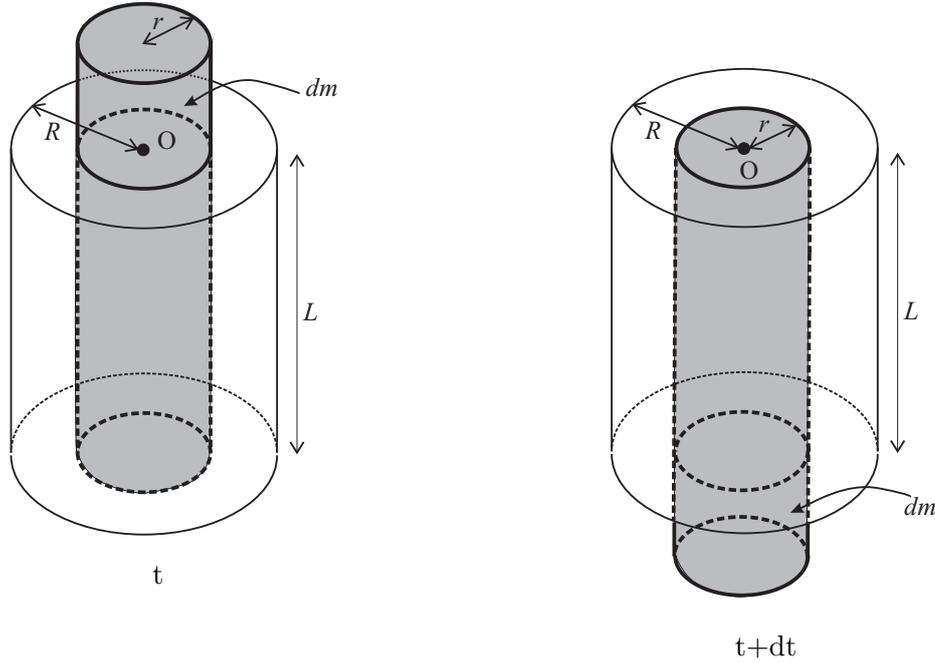
Le débit volumique de l'écoulement est donné par :

$$D = \int_0^R 2\pi r dr v(r) = -\frac{2\pi \Delta P}{4\eta L} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{R^2}{2r^2} \right]_0^R = \frac{\Delta P}{8\eta L} \pi R^4$$

La vitesse moyenne d'une particule du fluide est :

$$\bar{v} = \frac{D}{\pi R^2} = \frac{\Delta P}{8\eta L} R^2$$

7. D varie comme R^4 , c'est à dire comme la section du tube au carré. Ainsi, pour une même différence de pression, le débit induit dans 100 tubes de rayon $R/10$ est 100 fois plus faible que celui dans un tube de rayon R , alors que les deux dispositifs ont la même section. Ce résultat est très différent de celui obtenu pour le transport du courant électrique où, dans l'exemple précédent, on obtiendrait la même résistance. La différence entre les 2 problèmes vient de la condition aux limites de vitesse nulle sur les parois pour l'écoulement d'un fluide visqueux, qui n'existe pas pour le courant électrique. A cause de cette condition, les gradients de vitesse et, par suite, les forces de frottement visqueuses augmentent fortement quand la taille des tubes diminue.
8. La figure 14 présente le système fermé considéré aux instants t et $t + dt$.



- Figure 14 -

Comme le champ des vitesses ne dépend que de r (il ne dépend ni de z , ni de t), $\vec{p}(t) = \vec{p}(t+dt)$.

Les actions mécaniques extérieures qui agissent sur le système étudié sont :

- les forces de pression de résultante : $(P(z=0) - P(z=L)) \pi r^2 \vec{u}_z$
- les forces de viscosité exercées par le reste du fluide : $\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L \vec{u}_z$

Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système étudié s'écrit :

$$\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \left[(P(z=0) - P(z=L)) \pi r^2 \vec{u}_z + \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L \vec{u}_z \right] dt = \vec{0}$$

ce qui conduit immédiatement à :

$$\frac{dv}{dr} = - \frac{(P(z=0) - P(z=L))}{2\eta L} r = - \frac{\Delta P}{2\eta L} r$$

9. Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui caractérise l'importance relative du transport de quantité de mouvement par convection et par diffusion visqueuse. Dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, les forces visqueuses et le transport diffusif associé sont dominants. Il s'agit d'écoulements très stables aux profils bien définis. Au contraire, dans les écoulements à grand nombre de Reynolds, le transport de quantité de mouvement par convection est dominant. Il conduit à des écoulements beaucoup moins stables, souvent turbulents. Dans la géométrie considérée ici, le terme convectif est nul, quelque soit le nombre de Reynolds tant que l'écoulement reste parallèle ou laminaire (avec une seule composante de la vitesse non nulle). Néanmoins, à fort nombre de Reynolds, ce type d'écoulement devient instable et il se développe des écoulements turbulents dont les champs de vitesse sont beaucoup plus complexes.

2 Analyse des résultats expérimentaux

1. On trouve $D = 1,3 \cdot 10^{-23} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.
2. Le nombre de molécules d'eau par unité de volume de l'eau liquide vaut :

$$n = \frac{\rho \times \mathfrak{N}}{\text{masse d'une mole}} = \frac{10^3 \times 6,02 \cdot 10^{23}}{18 \cdot 10^{-3}} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

On en déduit la distance moyenne entre molécules d'eau dans l'eau liquide :

$$\bar{d} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

3. Le nombre de molécules qui traversent un nanotube par unité de temps est donc :

$$\frac{D}{\bar{d}^3} = nD \approx 4,3 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

soit $4,3 \cdot 10^{-4}$ molécules par nanoseconde.

Cette valeur est environ mille fois inférieure à la valeur mesurée. On peut douter de la pertinence du modèle hydrodynamique dans une situation où le diamètre du tube vaut seulement quelques distances intermoléculaires.