

1 Ondes Électromagnétiques

1.1 Ondes électromagnétiques au lycée

1.1.1 Comparaison des différentes ondes rencontrées

1. Une différence remarquable est la possibilité de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ce qui n'est pas le cas des ondes sonores qui se propagent seulement dans les milieux matériels élastiques.

La différence d'ordre de grandeur entre les célérités peut également être soulignée.

Dans de très nombreux cas la célérité de l'onde sonore augmente lorsque la densité du milieu de propagation augmente, c'est en général le contraire pour une onde lumineuse dans un milieu transparent.

2. Expérience de la sonnette et de la lampe placées dans une cloche où on fait le vide partiel.

1.1.2 Sources lumineuses utilisées en travaux pratiques

3. Light Amplification of Stimulated Emission of Radiation.
1960
4. Lumière monochromatique (la finesse spectrale est liée à la cohérence temporelle) ; faisceau très directif (directivité due à la cohérence spatiale de la source) divergence de l'ordre du milliradian ; éclairement intense 2000 W.m^{-2} pour un laser HeNe courant de puissance 1mW .

5. En optique géométrique un faisceau laser transformé en faisceau plan à l'aide d'une lentille cylindrique permet facilement d'illustrer devant une classe les phénomènes de réflexion et de réfraction (hémicylindre, prisme) et/ou d'en faire réaliser l'étude en TP. Les trois caractéristiques du rayonnement laser données en (4.) sont ici mises à profit.

Dans le cas des fentes d'Young il est plus facile d'obtenir des interférences avec un laser qu'avec une source ordinaire car les conditions de cohérence temporelle et de cohérence spatiale sont réalisées sans avoir à filtrer et à limiter l'étendue de la source (ce qui fait perdre la majeure partie de l'intensité lumineuse). La puissance du laser permet d'avoir des figures d'interférences très lumineuses, la modulation de la figure d'interférences par la diffraction est facilement observable.

6. La diode laser n'est autre qu'une diode électroluminescente dont les faces sont polies pour constituer la cavité optique. Lorsque la tension aux bornes est suffisante la luminescence se transforme en une émission plus intense présentant une cohérence temporelle moins bonne que celle d'un laser HeNe et un faisceau beaucoup plus divergent (zone d'émission très mince).

Réponses en seconde : LED et diode laser sont constituées de matériaux de base identiques (semi-conducteurs) qui leur donne un comportement semblable vis à vis du passage du courant électrique, mais leur fabrication différente est à l'origine de l'émission lumineuse plus intense et plus directive de la diode laser. L'acronyme LASER résume pour les physiciens le mode de production de la lumière qui est le même pour la diode laser et pour le laser HeNe. Le milieu actif siège de l'émission lumineuse est un solide pour la diode laser et un gaz pour le laser HeNe. Le faisceau émis par la diode laser est moins directif et sa monochromaticité est moins bonne que celui du laser HeNe.

Complément en terminale scientifique : la longueur d'onde de la lumière émise dans le cas du laser HeNe correspond à une transition entre deux niveaux d'énergie de l'atome de néon.

Pour répondre à la curiosité des élèves, il est possible d'exposer le principe de fonctionnement d'un laser. L'absorption et l'émission de la lumière par les atomes étant au programme de la classe de TS, l'amplification par émission stimulée peut être expliquée. Des exemples de systèmes oscillants (mécanique, électricité) sont présentés en tronc commun et la quantification des modes de vibration d'une corde tendue ainsi que ceux d'une colonne d'air est vue en spécialité. Le professeur peut donc s'appuyer sur des analogies pour parler d'oscillateur optique et de résonateur optique.

1.2 Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide

1.2.1 Équation de propagation

7. Quatre équations :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

8. Il suffit de prendre le rotationnel de l'équation (1) en y reportant l'expression (4) de $\mathbf{rot} \mathbf{B}$ avec $\mathbf{j} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (5)$$

en utilisant le fait que $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$ on obtient :

$$\mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6)$$

et comme $\mathbf{div} \mathbf{E} = 0$ d'après l'équation (2) (avec $\rho = 0$), on obtient l'équation demandée pour \mathbf{E} .

On procède de la même façon pour \mathbf{B} en prenant le rotationnel de (4) avec $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ en y reportant (1) et en notant que d'après (3) $\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$.

Le lien entre \mathbf{E} et \mathbf{B} est donné par exemple par l'équation (1).

9. Il suffit de reporter l'expression donnée dans l'équation de propagation de \mathbf{E} : $\Delta \mathbf{E}$ vaut $-k^2 \mathbf{E}$ et $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ vaut $-\omega^2 \mathbf{E}$. L'équation est donc vérifiée si $k^2 = \omega^2/c^2$.

10. En reportant l'expression dans (1), on trouve facilement que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{c} \mathbf{v} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (7)$$

où \mathbf{v} est un vecteur unitaire perpendiculaire à \mathbf{u} et \mathbf{k} tel que le trièdre $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\}$ soit direct.

11. On a déjà vu qu'il fallait avoir $k^2 = \omega^2/c^2$. Pour chaque valeur de ω .

Quelques ordres de grandeur de ω :

	$\omega \lesssim$	$2\pi \times 10^9$ Hz	: ondes radio
$2\pi \times 10^{12}$ Hz	$\lesssim \omega \lesssim$	$2\pi \times 2 \times 10^{14}$ Hz	: infrarouge
$2\pi \times 2 \times 10^{14}$ Hz	$\lesssim \omega \lesssim$	$2\pi \times 4 \times 10^{14}$ Hz	: lumière visible
$2\pi \times 4 \times 10^{14}$ Hz	$\lesssim \omega \lesssim$	$2\pi \times 10^{16}$ Hz	: ultraviolets
$2\pi \times 10^{16}$ Hz	$\lesssim \omega$: rayons X puis gamma

12. On a une onde *plane* parceque à tout instant, le champ électromagnétique qu'elle représente est uniforme dans chaque plan perpendiculaire à \mathbf{k} .
13. Il s'agit d'une onde de fréquence (pulsation) unique et parfaitement définie. L'éthymologie du terme signifie *une seule couleur* : dans le domaine visible la couleur est notre perception sensorielle de la fréquence de l'onde électromagnétique.
14. Oui, on peut par exemple envisager la somme de deux ondes planes de même direction de propagation mais de pulsations différentes.
15. C'est la *polarisation* de l'onde : dans le cas présent cette polarisation est linéaire.
16. On peut par exemple placer successivement deux polariseurs sur le trajet du faisceau d'une lampe quartz-iode et montrer la dépendance de l'intensité transmise en fonction de l'angle des deux polariseurs.

1.2.2 Aspect énergétique

17. On peut focaliser le faisceau d'une lampe quartz-iode (sans filtre anti-calorique !) sur le réservoir d'un thermomètre à alcool : lorsqu'on allume la lampe, la température du thermomètre s'élève.

C'est le principe de fonctionnement, à une fréquence très différente, du four à micro-ondes : les micro-ondes absorbées par le rôti l'échauffent.

18. D'après la définition de l'intensité et celle du vecteur de Poynting, on peut écrire :

$$I = \langle \|\mathbf{R}\| \rangle \quad (8)$$

où $\langle \rangle$ signifie *moyenne sur quelques périodes*

On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\mu_0} \langle \|E_0 \mathbf{u} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \wedge \frac{E_0}{c} \mathbf{v} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\| \rangle \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rangle \|u \wedge v\| \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \times \frac{1}{2} \times 1 \end{aligned} \quad (9)$$

que compte tenu que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ on peut réécrire :

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \quad (10)$$

1.2.3 Milieux diélectriques

19. C'est un milieu matériel ne comportant pas de charges libres. Un cristal ionique est un milieu diélectrique, l'eau pure aussi, le plastique, l'air, mais pas le silicium ou le cuivre.
20. la distance interatomique est généralement très petite devant la longueur d'onde de la lumière : de l'ordre de 10^{-10} m pour la distance interatomique dans un milieu dense, contre 5×10^{-7} m pour la longueur d'onde de la lumière visible.
21. Il est donc possible de trouver un volume de taille grande devant la distance entre atomes, mais petite devant la longueur d'onde de la lumière. Moyenné sur ce volume, le champ dû à l'onde lumineuse n'est pas modifié, alors que le champ dû à la matière est lissé très fortement.

22. On retrouve de nouveau une équation de propagation, mais avec la vitesse c/n . n s'appelle *l'indice de réfraction* du milieu
23. Pour les rayons X, l'approximation mésoscopique ne tient pas, puisque la longueur d'onde est de même ordre de grandeur que les distances typiques entre charges. Cette équation n'est donc sans doute pas valable.

2 Ondes sonores

2.1 Ondes au lycée

2.1.1 Utilisation des ultrasons en travaux pratiques

1. Une lame de quartz placée entre deux électrodes métalliques constitue un exemple de transducteur. Sous l'effet d'une contrainte mécanique il apparaît une tension électrique entre les deux faces de la lame (effet piézoélectrique). Le transducteur permet de convertir une variation de pression en variation de tension. Inversement l'application d'une tension entre les faces provoque la déformation de la lame cristalline (effet piézoélectrique inverse). Dans le cas d'une tension alternative de fréquence voisine d'une fréquence propre de la lame celle-ci vibre avec une amplitude suffisante pour émettre une onde ultrasonore dans l'air environnant.
2. Un haut-parleur électrodynamique est constitué : d'un aimant permanent annulaire fixe, d'une bobine mobile indéformable placée dans l'entrefer de l'aimant et d'une membrane solidaire de la bobine. Lorsque la bobine est parcourue par un courant la résultante des forces de Laplace, modélisée par une force \mathbf{F} parallèle à son axe, met l'ensemble en mouvement. Dans les deux cas (transducteur piézoélectrique et haut-parleur) il y a conversion d'énergie électrique en énergie mécanique. Dans le cas du transducteur piézoélectrique le déplacement résulte de l'action du champ électrique sur les particules chargées constituant le matériau (action qui provoque une modification de la structure cristalline).
3. En classe de seconde la partie du programme qui s'intéresse à la mesure des distances peut être illustrée par la mise en œuvre du principe du sonar. En classe de terminale, dans le cadre de l'étude des ondes mécaniques, le dispositif expérimental est d'abord utilisé pour déterminer la célérité d'une onde ultrasonore dans l'air. Son utilisation pour la mesure d'une distance peut à ce niveau donner lieu à une démarche plus ouverte laissant des initiatives aux élèves (voir réponse question 10).
4. Onde mécanique longitudinale de compression-dilatation qui se propage (dans les milieux élastiques) sans transport de matière mais avec transport d'énergie.

2.1.2 Étude des ondes en terminale S, organisation de la progression

5. – Détermination de la célérité des ondes sonores dans l'air à partir de la mesure d'un retard ($v = d/\Delta t$) :
À l'aide d'un « clap » entre deux morceaux de bois le professeur montre le retard de la détection de l'onde sonore par un microphone par rapport à sa détection par un autre microphone plus proche de la source. Les élèves doivent en déduire une méthode de détermination de la vitesse du son dans l'air. Le professeur fait remarquer que la manipulation est « bruyante » et que, par ailleurs, elle nécessite un oscilloscope à mémoire ou une interface d'acquisition. Cela lui permet d'introduire par analogie le dispositif expérimental qui va être utilisé par les élèves. Le « clap » est remplacé par des « claps » successifs appelés salves, émises par un émetteur d'ultrasons, les deux microphones sont remplacés par deux récepteurs d'ultrasons. Les tensions à leurs bornes, images des vibrations ultrasonores, sont visualisées à l'aide d'un oscilloscope analogique.
- Détermination de la célérité des ondes sonores dans l'air à partir de la mesure d'une longueur d'onde ($v = \lambda/T$) :
Dans la deuxième manipulation prévue l'émetteur d'ultrasons fonctionne en mode continu et produit une onde périodique. Les élèves doivent proposer un protocole pour déterminer avec précision la longueur d'onde, le faire valider, le mettre en œuvre pour en déduire la célérité.

6. Les activités expérimentales précédentes reposent sur l'utilisation de l'oscilloscope, il faut viser essentiellement l'acquisition de capacités dans ce domaine. Par exemple la mesure d'un retard qui fait partie des savoir-faire exigibles répertoriés dans les instructions officielles.
7. Les principales difficultés sont liées à l'utilisation de l'oscilloscope qui n'a pas été souvent manipulé lors des années précédentes. Pour y remédier, une démarche possible consiste à détailler pas à pas les réglages en filmant les opérations de manière à ce que les élèves puissent suivre facilement sur grand écran. Le professeur distribue ensuite une fiche guide avec pour objectif le même travail en autonomie associé à la rédaction d'un compte rendu. Les oscilloscopes des élèves sont préalablement positionnés sur des sensibilités proches des « bons » réglages. L'oscilloscope traditionnel peut être remplacé par un système d'acquisition piloté par un ordinateur (« oscilloscope virtuel »). Les élèves sont plus à l'aise avec l'interface homme-machine qui leur est familière. Cela ne dispense pas de la phase d'apprentissage à laquelle la problématique de la détermination de la célérité d'une onde sonore donne du sens.
8. Un objectif important de ce TP est d'introduire le caractère ondulatoire de la lumière par analogie avec les ondes mécaniques à partir du phénomène de diffraction. On suppose que la diffraction des ondes à la surface de l'eau a été observée en cours (CH2 III 3). Dans une première partie de la séance de TP les élèves étudient qualitativement le phénomène de diffraction dans le cas des ondes ultrasonores. Le professeur présente ensuite une expérience analogue avec un faisceau laser et une fente, et conduit les élèves à faire l'hypothèse de la nature ondulatoire de la lumière (trace écrite à prévoir dans le cours suivant CH3 I 1). Il montre que le résultat est le même en remplaçant la fente par un fil et propose de s'intéresser à l'influence du diamètre du fil (a) sur l'écart angulaire θ . Après une première étude qualitative les élèves mesurent la largeur de la tache centrale pour plusieurs valeurs de a et tracent la courbe $\theta = f(1/a)$. La recherche d'un modèle conduit à $\theta = k/a$ avec une valeur de k voisine de λ_{laser} . L'ensemble sera réinvesti lors du cours suivant (CH3 I 3).
9. Réaliser un montage permettant de mettre en évidence le phénomène de diffraction dans le cas des ondes lumineuses. Réaliser des mesures permettant de vérifier la pertinence de la relation $\theta = \lambda/a$. Utiliser un logiciel de traitement de données.

2.1.3 Évaluation de capacités expérimentales

10. Objectif : simulation d'un sonar.

Première partie : l'élève réalise une série de mesures du retard Δt pour différentes distances d entre deux récepteurs d'ultrasons et détermine la célérité des ultrasons dans l'air à partir du graphe $d = f(\Delta t)$.

Deuxième partie : l'élève doit proposer puis mettre en œuvre expérimentalement un protocole permettant de mesurer la distance séparant l'émetteur d'un obstacle.

Évaluation des capacités suivantes :

Utiliser un oscilloscope pour mesurer le retard d'une salve d'ultrasons.

Utiliser un logiciel de traitement de données.

Le compte rendu doit comporter le tableau des valeurs mesurées, le résultat de la modélisation et la valeur de la célérité des ultrasons dans l'air. Pour la deuxième partie on attend le protocole choisi illustré par un schéma et le résultat de la mesure.

2.2 Propagation

11. La force totale dF est en valeur algébrique la somme de la force de pression qui s'exerce sur la face gauche de la tranche, $\pi(z + \xi)$ et de celle qui s'exerce sur la face droite $-\pi(z + dz + \xi + d\xi)$ (de la droite vers la gauche d'où le signe $-$). On écrit donc :

$$\begin{aligned} dF &= \pi(z + \xi) - \pi(z + dz + \xi + d\xi) \\ &= \pi(z + \xi) - \left(\pi(z + \xi) + \frac{\partial \pi}{\partial z} \Big|_{z+\xi} \times (dz + d\xi) \right) \\ &= - \frac{\partial \pi}{\partial z} \Big|_{z+\xi} \times (dz + d\xi) \end{aligned} \quad (11)$$

soit en notant que $dz + d\xi = (1 + \frac{\partial \xi}{\partial z})dz$:

$$= - \frac{\partial \pi}{\partial z} \Big|_{z+\xi} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) dz \quad (12)$$

12. On peut aussi écrire la relation fondamentale de la dynamique pour cette tranche de fluide :

$$dF = dm a \quad (13)$$

où la masse est $dm = \rho_0 dz$ (elle ne change pas, même quand la tranche se dilate ou se comprime) et l'accélération est, à des termes d'ordre au moins égal à dz : $a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Donc :

$$dF = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dz \quad (14)$$

à des termes d'ordre au moins égal à dz^2 près.

13. L'oscillation de la tranche est rapide, les échanges de chaleur, qui sont lents, n'ont donc pas le temps de se faire, ils peuvent donc être négligés en première approximation. La transformation peut alors être considérée comme adiabatique.
14. Dans ces conditions, on peut appliquer la définition de χ à la tranche d'épaisseur initiale dz et maintenant d'épaisseur $dz + d\xi$ et donc de volume Σdz puis $\Sigma(dz + d\xi)$ où Σ est l'aire de la portion de tranche considérée. Elle subit une variation de pression δp égale à π :

$$\begin{aligned} \delta p &= - \frac{1}{\chi} \frac{1}{V} \delta V \\ \pi &= - \frac{1}{\chi} \frac{1}{\Sigma(dz + d\xi)} (\Sigma(dz + d\xi) - \Sigma dz) \\ &= - \frac{1}{\chi} \frac{1}{dz + d\xi} d\xi \\ &= - \frac{1}{\chi} \frac{\frac{\partial \xi}{\partial z}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}} \end{aligned} \quad (15)$$

soit, en dérivant une fois par rapport à z :

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = - \frac{1}{\chi} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}} \quad (16)$$

15. Cela implique que la variation relative de volume de la tranche est faible, et donc aussi que la surpression π est petite devant la pression moyenne p .
16. On peut alors comparer les deux écritures de $\frac{\partial \xi}{\partial z}$: celle tirée de (11) et (12) :

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = -\rho_0 \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}}$$

et celle que nous venons d'obtenir. Nous pouvons donc écrire :

$$-\rho_0 \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}} = -\frac{1}{\chi} \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}} \quad (17)$$

soit :

$$-\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \quad (18)$$

on obtient donc :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \rho_0 \chi \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

17. C'est l'équation de propagation demandée avec

$$C = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} \quad (20)$$

Cette grandeur est la vitesse de propagation des ondes de pression, ou *célérité des ondes sonores*.

18. Pour un gaz parfait une compression adiabatique se fait de telle sorte que la quantité pV^γ est constante, et donc que

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (21)$$

soit :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_S = -\frac{1}{\gamma} \frac{V}{p} \quad (22)$$

on a donc :

$$\chi = \frac{1}{\gamma p} \quad (23)$$

Mais comme pour un gaz parfait, $pV = nRT$, on peut écrire la masse volumique comme :

$$\rho_0 = \frac{nM}{V} = \frac{M}{RT} p \quad (24)$$

Dans cette expression M est la masse molaire, R la constante des gaz parfaits et p la pression ambiante.

En reportant ces valeurs de ρ_0 et χ dans l'expression de C on obtient :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{M}{RT} p^{\frac{1}{\gamma}}}} \quad (26)$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (27)$$

l'application numérique, avec $\gamma = 1.4$, $R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol K})$ et $M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ et en prenant $T = 300 \text{ K}$ donne :

$$C = \sqrt{\frac{1.4 \times 8.31 \times 300}{29 \times 10^{-3}}} \quad (28)$$

$$\# \sqrt{\frac{11.5}{10^{-4}}}$$

$$\# 330 \text{ m.s}^{-1}$$

2.3 Aspects énergétiques

19. Si le piston est sans masse la RFD nous dit que la force totale qu'il subit de la part du milieu est nulle. Il n'exerce donc en retour aucune action sur celui-ci en vertu du principe de l'action et de la réaction.
20. $\Psi(t) = \xi(z_0, t)$
21. Pour le milieu à droite du piston, rien ne change par rapport à la situation précédente, l'onde y est donc la même.
22. Le son ne se propage pas dans le vide.
23. Le piston étant sans masse, la force totale qu'il subit est toujours nulle, donc la force que doit exercer l'opérateur doit compenser exactement la force de pression exercée par le milieu. On en déduit :

$$F(t) = p + \pi(z_0, t) \quad (29)$$

24. La puissance instantanée est $\mathcal{P}(t) = \dot{\Psi}(t) \times F(t)$. La force est donnée par (29), où la surpression π est donnée par l'équation (15) :

$$\pi(z_0, t) = -\frac{1}{\chi} \left. \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=z_0} \quad (30)$$

équation dans laquelle ξ est reliée à Ψ par (20) c'est à dire :

$$\xi(z, t) = \Psi_0 \cos(\Omega(t - (z - z_0)/C)) \quad (31)$$

et donc :

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial z} \right|_{z=z_0} = \Psi_0 \frac{\omega}{C} \sin(\Omega t) \quad (32)$$

On en déduit

$$\mathcal{P}(t) = -\Psi_0 \Omega \sin(\Omega t) \times \left(p - \frac{1}{\chi} \Psi_0 \frac{\Omega}{C} \sin(\Omega t) \right) \quad (33)$$

$$(34)$$

et finalement

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\chi C} \Psi_0^2 \quad (35)$$

$$= \frac{1}{2} \rho_0 C \Omega^2 \Psi_0^2 \quad (36)$$

(puisque $\rho_0 \chi C^2 = 1$)

25. Dans ce cas le déplacement et la surpression s'écrivent respectivement $\xi_1 + \xi_2$ et $\pi_1 + \pi_2$. Le développement du produit (34) fait alors intervenir des termes en $\sin^2 \Omega_1 t$ et $\sin^2 \Omega_2 t$ dont la moyenne donne respectivement $\langle \mathcal{P} \rangle_1$ et $\langle \mathcal{P} \rangle_2$, et des termes en $\sin \Omega_1 t \sin \Omega_2 t$ dont la moyenne est nulle.

Finalement, on a bien $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle_1 + \langle \mathcal{P} \rangle_2$

26. Tout mouvement physiquement réaliste peut se décomposer par transformée de Fourier en somme de sinusoides ψ_Ω , et on va donc pouvoir appliquer le résultat précédent.

Notons par ailleurs que (36) peut s'écrire $\langle \mathcal{P} \rangle = \rho_0 C \langle \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \rangle$

Dans le cas général considéré, on peut donc écrire :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \rho_0 C \int \left\langle \left(\frac{\partial \Psi_\Omega}{\partial t} \right)^2 \right\rangle d\Omega \quad (37)$$

$$= \rho_0 C \left\langle \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right\rangle \quad (38)$$

où cette fois $\langle \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \rangle$ est la vitesse quadratique moyenne.

27. L'énergie cinétique de l'élément de masse $dm = \rho_0 dV$ et de vitesse v est simplement :

$$dE_c = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 dV \quad (39)$$

28. L'énergie potentielle de compression est égale au travail reçu lorsque la pression de la tranche passe de p à $p + \pi$:

$$d^2 W = -p d^2 V \quad (40)$$

comme la transformation est adiabatique on peut relier $d^2 V$ et dp par la compressibilité :

$$d^2 V = -\chi dp dV \quad (41)$$

le travail élémentaire est donc :

$$d^2 W = \chi p dp dV \quad (42)$$

qu'on intègre pour obtenir l'énergie potentielle :

$$dE_p = \chi \int_p^{p+\pi} p dp dV \quad (43)$$

$$= \chi \frac{1}{2} [(p + \pi)^2 - p^2] dV \quad (44)$$

$$= \chi \left(\pi p + \frac{1}{2} \pi^2 \right) dV \quad (45)$$

29. L'énergie interne de constitution dU_0 est donc augmentée en moyenne par le passage de l'onde de la quantité :

$$\langle dE_c \rangle + \langle dE_p \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \langle v^2 \rangle dV + \chi \langle \pi \rangle p dV + \frac{1}{2} \chi \langle \pi^2 \rangle dV \quad (46)$$

$$= \frac{1}{2} \rho_0 \langle v^2 \rangle dV + \frac{1}{2} \chi \langle \pi^2 \rangle dV \quad (47)$$

car $\langle \pi \rangle = 0$.

30. Pour une onde sinusoïdale, l'équation (15) donne :

$$\pi(z, t) = -\frac{1}{\chi} \frac{\Omega}{C} \sin \Omega(t - z/C) \quad (48)$$

et la vitesse est :

$$v(z, t) = -\Omega \sin \Omega(t - z/C) \quad (49)$$

la pression et la vitesse sont donc reliées par

$$\pi = -\frac{1}{\chi C} v \quad (50)$$

et donc d'après le même raisonnement que fait plus haut, cette relation reste vraie pour tout mouvement en valeur quadratique moyenne :

$$\langle \pi^2 \rangle = \frac{1}{\chi^2 C^2} \langle v^2 \rangle \quad (51)$$

La densité d'énergie sonore ajoutée par l'onde est donc :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{1}{\chi C^2} \langle v^2 \rangle + \frac{1}{2} \rho_0 \langle v^2 \rangle \quad (52)$$

$$= \rho_0 \langle v^2 \rangle \quad (53)$$

et puisque $\rho_0 \chi C^2 = 1$:

$$= \chi \langle \pi^2 \rangle \quad (54)$$

La puissance moyenne peut par conséquent s'écrire

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \mathcal{U} \times C \quad (55)$$

c'est à dire que cette énergie se déplace à la vitesse de l'onde.

31. Dans le cas particulier d'une onde sinusoïdale d'amplitude ξ_0 et de pulsation Ω , la vitesse est $v = -\Omega \sin \Omega(t - z/C)$ et donc

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \rho_0 \Omega^2 \xi_0^2 \quad (56)$$

2.4 Atténuation du son

32. Petit à petit l'énergie acoustique (mécanique) est transformée en énergie interne et la température du milieu augmente.
33. La transformation étant adiabatique, on peut écrire pour une masse donnée de gaz parfait :

$$pV^\gamma = \text{cst} \quad (57)$$

l'équation d'état permet par ailleurs de relier p , V et T :

$$pV = nRT \quad (58)$$

On obtient en combinant les deux équations :

$$T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cst} \quad (59)$$

Dans le cadre de l'approximation acoustique, on peut remplacer les variations de température et de pression par leurs différentielles et écrire :

$$\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dp}{p} = 0 \quad (60)$$

et donc

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\pi}{p}\right) \quad (61)$$

(on vérifie que si $\pi > 0$, la température s'élève)

34.

$$T(z) = T_0 + \beta \pi(z) \quad (62)$$

35. L'équation de diffusion n'est pas invariante par renversement du temps : le courant change de signe, pas le terme de droite, elle décrit donc un phénomène *irréversible*.
Elle est par ailleurs compatible avec le second principe de la thermodynamique grâce au signe $-$: en l'absence d'autre contrainte extérieure, la chaleur va du chaud au froid

36.

$$j_Q(z) = 2\pi \frac{DT_1}{\Lambda} \sin(2\pi z/\Lambda + \phi) \quad (63)$$

37. L'irréversibilité relie manifestement l'atténuation de l'onde et la conduction de la chaleur entre zones comprimées et détendues par l'onde.
38. On voit que le courant de chaleur est plus important pour les longueurs d'onde plus faibles, les ondes de petite longueur d'onde, donc de haute fréquence, seront donc atténuées plus vite.
39. Un élément de volume dV (d'aire transverse Σ et d'épaisseur dz) reçoit pendant le temps dt une chaleur :

$$dQ = \Sigma (j_Q(z) - j_Q(z + dz)) dt \quad (64)$$

$$= -\Sigma \frac{\partial j_Q}{\partial z} dz dt \quad (65)$$

$$= \Sigma_p dz \left(D \frac{\partial T}{\partial z}\right) dz dt \quad (66)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial T}{\partial z}\right) dV dt \quad (67)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial T}{\partial z}\right) \frac{dm}{\rho} dt \quad (68)$$

40. La variation de volume est :

$$\delta(dV) = dV_{\text{après}} - dV_{\text{avant}} \quad (69)$$

Le volume initial est

$$dV_{\text{avant}} = \Sigma (z + dz - z) = \Sigma dz \quad (70)$$

La paroi de gauche se déplace de $v_z(z) dt$ et celle de droite de $v_z(z + dz) dt$, le volume final est donc :

$$dV_{\text{après}} = \Sigma (z + dz + v_z(z + dz)dt - (z + v_z(z)dt)) \quad (71)$$

$$= \Sigma (dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dt) \quad (72)$$

et donc la variation de volume est :

$$\delta(dV) = \Sigma (dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dt) - \Sigma dz \quad (73)$$

$$= \Sigma \frac{\partial v_z}{\partial z} dz dt \quad (74)$$

$$= \frac{\partial v_z}{\partial z} dV dt \quad (75)$$

$$= \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dm}{\rho} dt \quad (76)$$

41. Écrivons le premier principe appliqué à l'élément de milieu de masse dm et de volume dV . Son énergie interne est $dU = u dm$ et elle varie de d^2U au cours d'une transformation élémentaire impliquant un travail δW et une chaleur δQ :

$$d^2U = \delta Q + \delta W \quad (77)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} dm dt = \frac{\partial}{\partial z} (D \frac{\partial T}{\partial z}) \frac{dm}{\rho} dt - p \delta(dV) \quad (78)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} (D \frac{\partial T}{\partial z}) \frac{dm}{\rho} dt - p \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dm}{\rho} dt \quad (79)$$

$$= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial T}{\partial z} \right) - p \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] dm dt \quad (80)$$

d'où l'expression demandée.

42. L'indentité thermodynamique s'écrit ici :

$$d^2U = T d^2S - p \delta(dV) \quad (81)$$

$$= T \frac{\partial s}{\partial t} dm dt - \frac{dm}{\rho} p \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (82)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (83)$$

d'où l'indentité demandée.

43. En identifiant les deux écritures de $\frac{\partial u}{\partial t}$ on obtient :

$$T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} p \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (84)$$

soit

$$T \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (85)$$

On remarque alors que :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{D}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial z} D \frac{\partial T}{\partial z} \quad (86)$$

$$= \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{D}{T^2} \left| \frac{\partial T}{\partial z} \right|^2 \quad (87)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{D}{T^2} \left| \frac{\partial T}{\partial z} \right|^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{D}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (88)$$

44. Le terme de droite, qui peut être aussi bien positif que négatif, correspond à l'entropie échangée; le terme de gauche qui est toujours positif correspond à l'entropie créée par suite de l'irréversibilité de l'échange de chaleur.
45. Prenons un volume entre les abscisses z_1 et z_2 qui englobe complètement le train d'onde et intégrons l'équation sur ce volume :

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho \frac{\partial s}{\partial t} dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{D}{T^2} \left| \frac{\partial T}{\partial z} \right|^2 dz + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{D}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \quad (89)$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \frac{D}{T^2} \left| \frac{\partial T}{\partial z} \right|^2 dz + \left[\frac{D}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z_1}^{z_2} \quad (90)$$

Mais en z_1 comme en z_2 la température est uniforme puisque l'onde y est d'amplitude nulle, le deuxième terme est donc nul. Le terme de gauche est donc positif, puisqu'il est l'intégrale d'un terme toujours positif. Si nous appelons S l'entropie totale du volume que nous considérons, nous pouvons alors écrire :

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho \frac{\partial s}{\partial t} dz = \int \frac{\partial s}{\partial t} dm \quad (91)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int s dt \quad (92)$$

$$= \frac{\partial S}{\partial t} \quad (93)$$

L'entropie de ce volume augmente donc au cours du temps lorsque s'y propage une onde sonore. Il en est donc de même de l'entropie massique en moyenne sur quelques périodes.

46. Si l'entropie augmente, l'énergie interne de constitution augmente aussi :

$$dU_0 = T dS - p dV \quad (94)$$

(avec ici un volume total constant) et ceci ne peut se faire qu'au détriment de l'énergie acoustique car le volume n'échange avec l'extérieur ni travail ni chaleur : l'amplitude de l'onde diminue donc nécessairement, c'est à dire que l'onde est *atténuée* et comme l'énergie de constitution augmente, la température du milieu s'élève.

3 Interaction d'une onde électromagnétique avec une onde sonore

3.1 Régime de Bragg

3.1.1 Réflexion par un dioptre

1. – Pour la réflexion : le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence, le rayon traverse la normale et l'angle de réflexion est égale à l'angle d'incidence.
– Pour la réfraction : le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et le rayon traverse la normale. Les angles d'incidence i et réfracté i' (angles entre les rayons et la normale) sont liés par :

$$n \sin i = n' \sin i' \quad (95)$$

ce qui dans les conventions de la figure se traduit par :

$$n \cos \theta = n' \cos \theta' \quad (96)$$

2. Il s'en suit que la lumière réfléchie par un dioptre est généralement polarisée, ceci permet de diminuer l'importance des reflets, en photo par exemple, en utilisant un filtre polarisant. Certains polariseurs fonctionnent sur ce principe.

Pour un certain angle (l'angle *de Brewster*), le coefficient de réflexion parallèle s'annule : ce peut être mis à profit dans certains systèmes optiques (en particulier des lasers) pour diminuer les pertes.

3. Si $n > n'$, $\theta' < \theta$, il y a alors un angle limite donné par

$$\cos \theta_l = n'/n \quad (97)$$

en dessous duquel il n'y a pas de rayon réfracté : c'est la réflexion totale. Les coefficients de réflexion dans ce cas sont égaux à 1.

3.1.2 Réflexion par un faible saut d'indice

4. La relation de Descartes s'écrit :

$$n \cos \theta = (n + \delta n) \cos(\theta + \delta \theta) \quad (98)$$

en développant au premier ordre on obtient :

$$n \cos \theta = n \cos \theta + \delta n \cos \theta + n \delta \theta \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \quad (99)$$

$$0 = \delta n \cos \theta - n \delta \theta \sin \theta \quad (100)$$

et donc :

$$\delta \theta = \frac{\delta n}{n} \frac{1}{\tan \theta} \quad (101)$$

5. Il suffit de remplacer n' par $n + \delta n$ et θ' par $\theta + \delta \theta$ dans les expressions des coefficients de réflexion, puis d'utiliser l'expression de $\delta \theta$ en ne gardant que les termes du premier ordre en δn :

- r_{\perp} :

$$r_{\perp} = \frac{n \sin \theta - (n + \delta n) \sin(\theta + \delta \theta)}{n \sin \theta + (n + \delta n) \sin(\theta + \delta \theta)} \quad (102)$$

$$= \frac{n \sin \theta - n \sin \theta - \delta n \sin \theta - n \delta \theta \cos \theta}{2n \sin \theta} \quad (103)$$

$$= \frac{-\delta n \sin \theta - \delta n \cos^2 \theta / \sin \theta}{2n \sin \theta} \quad (104)$$

$$= -\frac{\delta n}{2n} \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \quad (105)$$

$$= -\frac{\delta n}{2n} \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (106)$$

$$(107)$$

- et pour $r_{//}$:

$$r_{//} = \frac{(n + \delta n) \sin \theta - n \sin(\theta + \delta \theta)}{(n + \delta n) \sin \theta + n \sin(\theta + \delta \theta)} \quad (108)$$

$$= \frac{n \sin \theta + \delta n \sin \theta - n \sin \theta - n \delta \theta \cos \theta}{2n \sin \theta} \quad (109)$$

$$= \frac{\delta n \sin \theta - \delta n \cos^2 \theta / \sin \theta}{2n \sin \theta} \quad (110)$$

$$= \frac{\delta n}{2n} \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \quad (111)$$

$$(112)$$

6. Quand l'incidence est rasante ($\theta \rightarrow 0$), on peut remplacer $\cos \theta$ par 1 et on obtient, à la fois pour r_{\perp} et $r_{//}$:

$$r = -\frac{\delta n}{2n} \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (113)$$

3.1.3 Réflexion par une variation d'indice

7. À travers la tranche en question, l'indice varie de $\delta n = \frac{dn}{dx} \delta x$. En considérant la tranche comme un saut d'indice, on peut reprendre l'expression obtenue en y insérant cette valeur :

$$\delta r = -\frac{1}{2n \sin^2 \theta} \frac{dn}{dx} \delta x \quad (114)$$

3.1.4 Diffraction de Bragg

8.

$$\frac{dn}{dx} = q n_1 \sin(\Omega t - qx + \varphi) \quad (115)$$

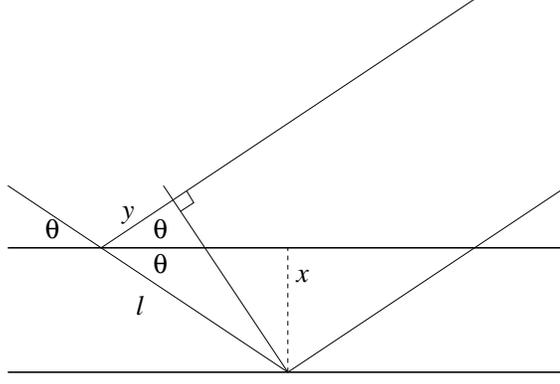


FIG. 1: Construction géométrique pour le calcul du déphasage

9. En s'aidant de la figure 1 il est facile d'écrire que :

$$\Delta\phi(x) = \frac{2\pi}{\lambda}(y - l) \quad (116)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(\cos 2\theta - 1)l \quad (117)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda}(\cos 2\theta - 1) \frac{x}{\sin \theta} \quad (118)$$

$$= \frac{2\pi \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 1}{\lambda \sin \theta} x \quad (119)$$

$$= -\frac{4\pi}{\lambda} \sin \theta x \quad (120)$$

10. L'amplitude complexe de l'onde réfléchiée par le plan de cote x a comme module $\delta r(x)$ et comme argument $\Delta\phi(x)$:

$$dr = -\frac{1}{2n \sin^2 \theta} q n_1 \sin(\Omega t - qx + \varphi) e^{-\frac{4i\pi}{\lambda} \sin \theta x} \quad (121)$$

$$= -\frac{1}{2n \sin^2 \theta} q n_1 \frac{e^{i\phi - iqx} - e^{-i\phi + iqx}}{2i} e^{-\frac{4i\pi}{\lambda} \sin \theta x} \quad (122)$$

11. Chaque plan d'abscisse x entre $-l/2$ et $l/2$ contribue, le coefficient complexe total de réflexion est donc donné en notant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ par :

$$r = -\frac{q n_1}{4n \sin^2 \theta} \frac{1}{i} \int_{-l/2}^{l/2} (e^{i\phi - iqx} - e^{-i\phi - iqx}) e^{-2ik \sin \theta x} dx \quad (123)$$

$$= -\frac{q n_1}{4n \sin^2 \theta} \frac{1}{i} \left(e^{i\phi} \int_{-l/2}^{l/2} e^{-iqx - 2ik \sin \theta x} dx - e^{-i\phi} \int_{-l/2}^{l/2} e^{iqx - 2ik \sin \theta x} dx \right) \quad (124)$$

La première intégrale s'écrit :

$$\int_{-l/2}^{l/2} e^{-i(q+2k \sin \theta)x} dx = \frac{e^{-i(q+2k \sin \theta)l/2} - e^{i(q+2k \sin \theta)l/2}}{i(q+2k \sin \theta)} \quad (125)$$

$$= 2 \frac{e^{i(q+2k \sin \theta)l/2} - e^{-i(q+2k \sin \theta)l/2}}{2i(q+2k \sin \theta)l/2} \frac{l}{2} \quad (126)$$

$$= l \operatorname{sinc}((q+2k \sin \theta)l/2) \quad (127)$$

La deuxième intégrale donne par un calcul tout à fait similaire :

$$l \operatorname{sinc}((q - 2k \sin \theta)l/2) \quad (128)$$

et finalement nous obtenons le coefficient de réflexion complexe :

$$r = iql \frac{n_1}{4n_0 \sin^2 \theta} \left[e^{i\phi} \operatorname{sinc}((q + 2k \sin \theta)l/2) - e^{-i\phi} \operatorname{sinc}((q - 2k \sin \theta)l/2) \right] \quad (129)$$

12. Le coefficient que nous venons de calculer dépend de θ : si kl est grand, c'est à dire dès que l'épaisseur est de plusieurs longueurs d'onde, les fonctions sinc ne sont non nulle que pour un très petit intervalle d'angle θ . Il faut que $q + 2k \sin \theta = 0$ ou que $q - 2k \sin \theta = 0$. Si on remarque que le rayon lumineux est dévié d'un angle $\alpha = 2\theta$, on peut écrire la condition pour avoir une intensité significative :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{q}{2k} \quad (130)$$

$$= \pm \frac{\lambda}{2\Lambda} \quad (131)$$

car $q = 2\pi/\Lambda$ et $k = 2\pi/\lambda$.

3.2 Photons et phonons

13. $E = h\nu = \hbar\omega$
14. $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$
15. $E_{\text{phonon}} = \hbar\Omega$
 $\mathbf{p}_{\text{phonon}} = \hbar\mathbf{q}$
16. C'est processus au cours duquel un photon *absorbe* un phonon :

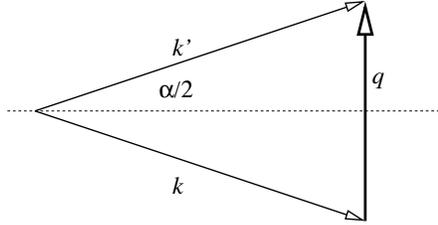


FIG. 2 : Conservation de la quantité de mouvement lors de l'absorption d'un phonon par un photon

- La conservation de l'énergie impose $\omega' = \omega + \Omega$. On peut d'ailleurs remarquer que dans l'expression (129), la phase ϕ vaut $\Omega t + \varphi$ et que l'amplitude complexe instantanée de l'onde évolue donc à la pulsation $\omega + \Omega$ pour le premier terme et $\omega - \Omega$ pour le deuxième. Mais comme $\Omega \ll \omega$, nous prendrons $\omega' \simeq \omega$.
- La conservation de la quantité de mouvement impose quant à elle : $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$. On ne peut plus négliger aucun terme. Au contraire on voit sur la figure 2, où le triangle $kk'q$ est isocèle compte-tenu de la conservation de l'énergie, que cela impose :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{q/2}{k} \quad (132)$$

$$= \frac{\lambda}{2\Lambda} \quad (133)$$

qui n'est autre que la relation de Bragg que nous avons trouvée précédemment.

17. De même le processus 7(b) correspond à l'autre terme de Bragg : ici un photon *émet* un phonon et est dévié pour conserver la quantité de mouvement.
18. Comme dans un corps noir, un milieu à température non nulle est peuplé de phonons thermiques. Quelque soit la direction de diffusion observée, on trouve toujours des phonons ayant la bonne longueur d'onde et la bonne direction pour satisfaire la condition de Bragg : on observe donc de la diffusion dans toutes les directions. Le bleu du ciel est un exemple de cet effet.

4 Principe du Lidar

1. – L'intensité nous renseigne sur la concentration en aérosols.
 - Le retard nous donne la distance
 - Le décalage en fréquence donne la vitesse par effet Doppler.
2. Par définition de la célérité de l'onde on peut écrire :

$$\Delta t = \frac{2\Delta l}{c} \quad (134)$$

(le facteur 2 vient de ce que l'onde fait un aller-retour). L'application numérique donne :

$$\Delta t = \frac{2 * 1}{3 \times 10^8} \quad (135)$$

$$\simeq 6 \times 10^{-9} \quad (136)$$

$$= 6 \text{ ns} \quad (137)$$

C'est atteignable.

3. Le lien entre domaine temporel et fréquentiel est donné par la transformée de Fourier. Cela nous indique que la bande passante doit satisfaire :

$$\Delta\omega \Delta t \gtrsim 1 \quad (138)$$

soit

$$\Delta f \gtrsim \frac{1}{2\pi \Delta t} \quad (139)$$

$$= \frac{1}{\pi \times 6 \times 10^{-9}} \quad (140)$$

$$\simeq 3 \times 10^7 \quad (141)$$

$$= 30 \text{ MHz} \quad (142)$$

là encore rien, que de très faisable.

4.1 Détection directe d'un signal lumineux

4.1.1 Caractéristique d'une photodiode

4. On dit que ces détecteurs sont quantiques parce que le signal qu'ils donnent est directement proportionnel au nombre de photons absorbés.
5. Oui (il faut absorber 4 photons pour créer une impulsion nerveuse dans les cellules de la rétine)
6. – Le courant est proportionnel à l'intensité lumineuse.
 - Le courant est nul pour des fréquences de la lumière inférieures à un seuil qui dépend uniquement du matériau utilisé.
 - Dans le vide, l'énergie cinétique de l'électron émis est donné par la formule d'Einstein en fonction de la pulsation de l'onde lumineuse ω et du travail d'extraction W caractéristique du matériau :

$$E_c = \hbar\omega - W \quad (143)$$

L'intensité de l'onde n'intervient absolument pas.

7. On s'attendrait à ce que l'énergie des électrons ne dépendent que de l'intensité de l'onde. On n'attend aucun seuil.

8. C'est le courant dû aux porteurs minoritaires dans le semiconducteur.
9. Il est préférable d'utiliser une tension positive de sorte que le premier terme ne cache pas le terme photoélectrique. À tension nulle, le courant est exactement proportionnel au flux lumineux.

4.1.2 Montage transimpédance

10. Quand il est en fonctionnement non saturé, l'AO assure que $V_- = V_+$ et comme V_+ est nul, la diode subit une tension nulle. Alors le courant dans la diode est $I = \alpha\phi$. Il n'y a pas de courant dans l'entrée - de l'AO, le courant I se retrouve donc intégralement dans la résistance. La chute de tension à ses bornes est donc

$$V_S - V_- = R\alpha\phi \quad (144)$$

et comme $V_- = 0$,

$$V_S = R\alpha\phi \quad (145)$$

11. Ceci n'étant vrai que si l'AO n'est pas saturé, il faut que $V_S < V_{\text{sat}}$ et donc que

$$\phi < \phi_{\text{max}} < \frac{V_{\text{sat}}}{R\alpha} \quad (146)$$

12. Il suffit de diminuer R
13. Tout le courant qui passe dans la diode vient de la borne de sortie de l'AO. Il est donc de toutes façons limité par l'intensité maximale que peut débiter l'AO, rarement au dessus de quelques mA.

4.1.3 Bruits de détection

14. Pour être certainement détectable, il faut que la variation de tension LSB fasse certainement changer $n(V)$ il faut pour cela que $(\Delta V/V_{\text{max}}) \times 2^{N-1}$ soit plus grand que 1. La résolution est donc :

$$LSB = \frac{V_{\text{max}}}{2^{N-1}} \quad (147)$$

15. L'erreur de numérisation est la différence entre ce que donnerait le convertisseur si sa résolution était infiniment petite, et ce qu'il donne en fait. La figure 3 en donne l'allure.
16. Si le signal varie très peu, la tension de sortie reste constante, l'erreur compense alors exactement le bruit, ils sont donc parfaitement (anti-)corrélés.
17. Si le bruit est nettement plus grand que le LSB le signal à numériser va tomber n'importe où dans un pas de numérisation, et la position à l'intérieur de ce pas ne dépend pas du numéro correspondant, le bruit extrinsèque et l'erreur de numérisation sont donc décorrélés.
18. On peut écrire que la tension est

$$V = \frac{V_{\text{max}}}{2^{N-1}} (n(V)LSB + \delta n) \quad (148)$$

où δn est l'erreur de numérisation : c'est une variable aléatoire variant entre 0 et 1, et sa distribution est uniforme puisque V tombe n'importe où entre $\frac{V_{\text{max}}}{2^{N-1}} \times n(V)LSB$ et $\frac{V_{\text{max}}}{2^{N-1}} \times (n(V) + 1)LSB$.

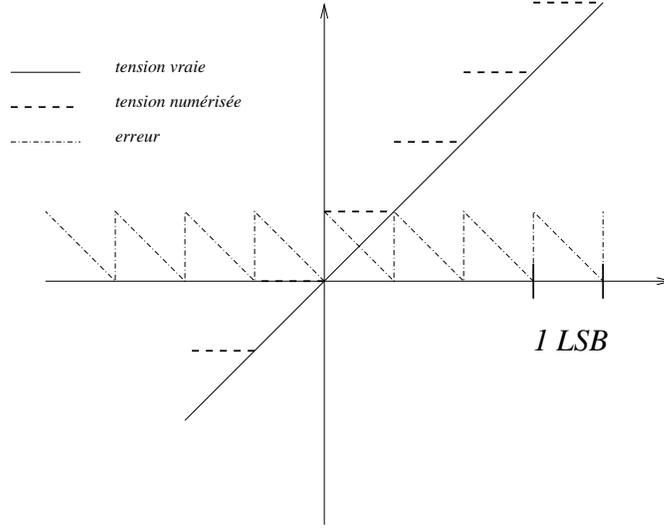


FIG. 3: Erreur de numérisation en fonction de la tension d'entrée

La figure 3 montre que sa moyenne est $1/2i \text{ LSB}$ et sa variance est donc donnée par :

$$\sigma_{\text{num}} = (\langle \delta n^2 \rangle - \langle \delta n \rangle^2) \times \text{LSB}^2 \quad (149)$$

$$= \text{LSB}^2 \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} \quad (150)$$

$$= \text{LSB}^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \quad (151)$$

$$= \frac{1}{12} \text{LSB}^2 \quad (152)$$

Nous avons fait ce calcul dans le cas où le bruit extrinsèque est nettement supérieur au LSB, une contribution de $\sqrt{1/12} \text{ LSB}$ est alors négligeable.

19. Le théorème de la limite centrale implique que si on moyenne longtemps, l'erreur due à la numérisation (corrigée de l'offset $\text{LSB}/2$) tend vers une variable aléatoire normale de variance σ_{num}/n où n est le nombre de mesures moyennées. C'est à dire que la résolution n'est pas limitée par l'erreur de numérisation.
20. Dans le cas où le bruit était faible, l'erreur et le bruit étaient corrélés, et se compensaient, le moyennage ne sert à rien et la résolution reste donc limitée à $\pm \text{LSB}/2$.
C'est une situation étonnante : à condition de moyennage, le bruit sur le signal permet d'améliorer la résolution de la mesure !
21. Parcequ'ils sont décorrélés : la moyenne de la somme est la somme des moyennes, nulles et la variance de la somme est la somme des variances.
22. Il faut que le signal fasse varier la tension en sortie plus que ne le fait le bruit. Il faut donc que

$$I_{\text{min}} > \sqrt{\sigma} \quad (153)$$

$$= \sqrt{2I_{\text{min}} q_e \Delta f + i_a^2} \quad (154)$$

(on néglige le bruit de numérisation comme on l'a vu plus haut)

$$(155)$$

on résoud facilement cette inéquation du second degré, et finalement :

$$I_{\min} = q_e \Delta f + \sqrt{q_e^2 \Delta f^2 + i_a^2} \quad (156)$$

4.2 Détection hétérodyne

4.2.1 Signal hétérodyne

23. Appelons $\Phi(t)$ le flux lumineux :

$$\Phi(t) = \langle |S(t) + s(t)|^2 \rangle \quad (157)$$

$$= \langle |S(t)|^2 + |s(t)|^2 + 2\Re(S^*(t)s(t)) \rangle \quad (158)$$

$$= |A|^2 + |a|^2 + 2\Re(A^* a e^{-i(\omega+\Omega)t+i(\omega t+\phi)}) \quad (159)$$

et donc :

$$V(t) = R\alpha |A|^2 + R\alpha |a|^2 + 2R\alpha \Re(A^* a) \cos(\Omega t - \phi) \quad (160)$$

Il est naturel de considérer A et a comme réels, et nous noterons $\alpha A^2 = I$ et $\alpha a^2 = i$, alors :

$$V(t) = RI + Ri + 2R\sqrt{Ii} \cos(\Omega t - \phi) \quad (161)$$

$$(162)$$

24. Le signal hétérodyne est $2R\sqrt{Ii} \cos(\Omega t - \phi)$, il est bien de pulsation Ω

25. Si $I \ll i$, on peut négliger i et le signal hétérodyne pour le calcul du bruit de photon, alors le bruit total est

$$\delta I = \sqrt{2I q_e \Delta f + i_a^2} \quad (163)$$

26. Le bruit d'amplification est i_a . L'amplitude du signal hétérodyne est \sqrt{Ii} et peut être en principe plus grande que i_a , pourvu que $I > i_a^2/i$. Et ceci est possible même si $i < i_a$, auquel cas le signal direct, lui, ne serait pas détectable.

27. Le rapport signal sur bruit est ici

$$S/B = \frac{\sqrt{Ii}}{\delta I} \quad (164)$$

$$= \frac{\sqrt{Ii}}{\sqrt{2I q_e \Delta f + i_a^2}} \quad (165)$$

$$= \sqrt{\frac{Ii}{2I q_e \Delta f + i_a^2}} \quad (166)$$

si I est assez grand pour que i_a^2 soit négligeable au dénominateur, cette expression devient :

$$S/B = \sqrt{\frac{Ii}{2I q_e \Delta f}} \quad (167)$$

$$= \sqrt{\frac{i}{2q_e \Delta f}} \quad (168)$$

C'est ce qu'on aurait obtenu dans le cas de la détection directe en l'absence de tout bruit d'amplification ou de numérisation.

28. Non seulement la détection est potentiellement plus sensible, mais en plus elle nous renseigne facilement sur Ω (et même ϕ si c'est utile), ce que ne peut faire la détection directe.