

CORRIGÉ

A. APPLICATIONS DES PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

A. I. Étude des systèmes fermés

A.I.1. Principes et définitions

A.I. 1.1.

Premier principe :

Pour un système macroscopiquement au repos, il existe une fonction d'état extensive U appelée énergie interne relative au système (S) telle que lors d'une transformation de ce système, sa variation est égale à la somme du travail W et du transfert thermique Q échangés avec l'extérieur :

$$\Delta(U) = W + Q$$

$$U = E_c(\text{microscopique d'agitation}) + E_p(\text{potentielle microscopique})$$

Pour un système en mouvement par rapport à un référentiel, on peut utiliser la notion d'énergie totale :

$$\Delta E = \Delta(U + E_c(\text{macroscopique}) + E_{\text{pext}}) = W_{\text{autre}} + Q$$

E_{pext} = énergie potentielle d'interaction entre le système et l'extérieur, W_{autre} travail des forces extérieures ne dérivant pas d'une énergie potentielle, travail électrique, transfert de rayonnement.

A.I. 1.2. Deuxième principe de la thermodynamique

A tout système thermodynamique est associé une fonction d'état notée S , appelée entropie :

- l'entropie d'un système isolé croît jusqu'à l'établissement d'un état d'équilibre. Elle est alors maximale ;
- l'entropie est une grandeur extensive.

Dans une transformation quelconque d'un système (S) couplé à une source de chaleur idéale de température T_e et une source de travail idéale, la variation d'entropie se met sous la forme :

$$\Delta S = S_{\text{échange}} + S_{\text{créée}}$$

avec $S_{\text{échange}} = \int_1^2 \frac{\delta q}{T_e}$. L'intégrale est calculée le long du chemin réellement suivi par le système au cours de l'évolution.

$S_{\text{créée}}$ représente la création d'entropie due au caractère irréversible de l'évolution.

$S_{\text{créée}} > 0$ si transformation irréversible ; $S_{\text{créée}} = 0$ si transformation réversible.

Remarques :

- *Source de chaleur idéale*

La variation d'entropie d'une source idéale de chaleur lors d'une transformation infinitésimale est donnée par $dS = \delta Q_e / T_e$ car on admet que les transferts d'énergie interne sont réversibles.

Un thermostat de très grande capacité calorifique et dont la température reste constante peut être considérée comme une source idéale : sa variation d'entropie est alors donnée par : $\Delta S = Q_e / T_e$, Q_e est l'énergie thermique reçue par le thermostat.

- *Source de travail idéal*

L'entropie d'une source de travail idéal reste constante au cours d'une transformation. Il n'y a aucune dissipation d'énergie par frottement à l'intérieur du système. Son évolution est totalement irréversible.

Cette démarche permet de ne tenir compte que des causes d'irréversibilité internes au système (S) en éliminant les causes d'irréversibilité externes.

- Dans le cas d'un chemin irréversible pour calculer $S_{\text{échange}}$, il faut modéliser l'échange ou alors connaître comment se fait le transfert, par convection, conduction (loi de Fourier ..)

A.I.1.3.

Un gaz est dit parfait si les actions mécaniques exercées sur les molécules sont assimilables à des chocs, interactions infiniment brèves qui ne s'exercent qu'à l'occasion de leur contact.

Hypothèses du modèle :

- molécules assimilables à des points matériels ;
- vitesse d'agitation des molécules isotrope dans toutes les directions ;
- gaz en équilibre thermodynamique interne : les grandeurs statistiques ont la même valeur dans tout le gaz ;
- la vitesse des molécules n'est pas modifiée par la présence des parois ;
- pression du gaz parfait monoatomique $p = \frac{1}{3} n m \overline{u^2}$ $\overline{u^2}$ vitesse quadratique moyenne.

$pV = \frac{1}{3} n^* M \overline{u^2}$ avec $n^* = n N_A / V$ n quantité de matière dans le volume V
 or $\frac{1}{2} m \overline{u^2} = \frac{3}{2} k_B T$ d'après les statistiques.

soit $P.V = n N_A k_B T = n.R.T$

Pour un gaz parfait monoatomique $dU = \frac{3}{2} n R dT$

Plus généralement pour un gaz parfait son énergie interne U et son enthalpie H ne dépendent que de la température : la dépendance de C_V et C_p en fonction de la température ne pouvant pas être déterminée par les principes de la thermodynamique : $dU = C_V(T).dT$ et $dH = C_p(T).dT$

Si C_V et C_p peuvent être considérés comme constantes,

$U - U_0 = C_V(T - T_0)$; $H - H_0 = C_p(T - T_0)$; $C_p - C_V = R$; $C_p / C_V = \gamma$

$dU = c_v dT = T dS - p dV$

$T dS = p dV + C_V dT$ $T dS = - V dp + C_p dT$

$S(T, V) = S(T_0, V_0) + C_V \ln(T/T_0) + R \ln(V/V_0)$;

$S(T, P) - S(T_0, P_0) = C_p \ln(T/T_0) - R \ln(P/P_0)$

A.I.2. Application : transformation isotherme d'un gaz parfait

A.I.2.1.1

Dans l'état final il y équilibre mécanique : le piston est au repos : $P_1.S = P_0.S + Mg$

$P_1 = P_0 + Mg/S$

A.I.2.1.2.

Première loi de Joule $U(T)$ isotherme $\Rightarrow \Delta U = 0$;

$W = - \int P dV = - R T_0 \int \frac{dV}{V} = - R T_0 \ln(V_{\text{final}}/V_{\text{initial}}) = R T_0 \ln(P_1/P_0)$

$\Delta U = W + Q = 0 \Rightarrow Q = -W$ $Q = R T_0 \ln(P_0/P_1)$

A.I.2.1.3.

$\Delta S = - R \ln(P_1/P_0)$

entropie échangée : $S_e = Q/T_0 = - R \ln(P_1/P_0)$

donc $S_{\text{créée}} = S_i = \Delta S - S_e = 0$ conforme au caractère réversible de la transformation.

A.I.2.2 Transformation brutale irréversible

A.I.2.2.1. On a toujours à l'équilibre final $\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$ (ne dépend pas du chemin)

Selon l'hypothèse la force extérieure appliquée est $F = P_1.S = P_{\text{ext}}.S$

$W = - \int P_{\text{ext}} dV = - P_1(V_{\text{final}} - V_{\text{initial}}) = -R T_0 + P_1(P_0 V_{\text{initial}})/P_0 = -R T_0 + P_1 R T_0 / P_0$

$W = R T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} - 1 \right)$ $Q = \Delta U - W = -W$ $Q = - R T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} - 1 \right)$

A1.2.2.2

On a toujours $\Delta S = -R \ln(P_1/P_0)$ car fonction d'état

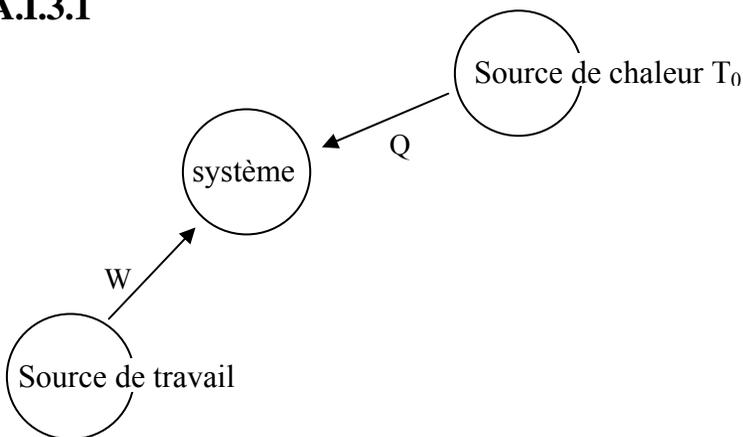
$$S_e = Q/T_0 = -R \left(\frac{P_1}{P_0} - 1 \right)$$

$$D'où S_{créée} = \Delta S - S_e = R \left(\frac{P_1}{P_0} - 1 \right) - R \ln \left(\frac{P_1}{P_0} \right) = R \left(\frac{P_1}{P_0} - 1 - \ln \frac{P_1}{P_0} \right)$$

$$\forall x = \frac{P_1}{P_0} > 1 \quad S_{créée} = R = (x-1) - \ln x > 0 \text{ car } x-1 > \ln x \Rightarrow S_{créée} \geq 0 \text{ conforme au 2}^{nd} \text{ principe}$$

A.I.3. Application : étude théorique d'une machine thermique

A.I.3.1



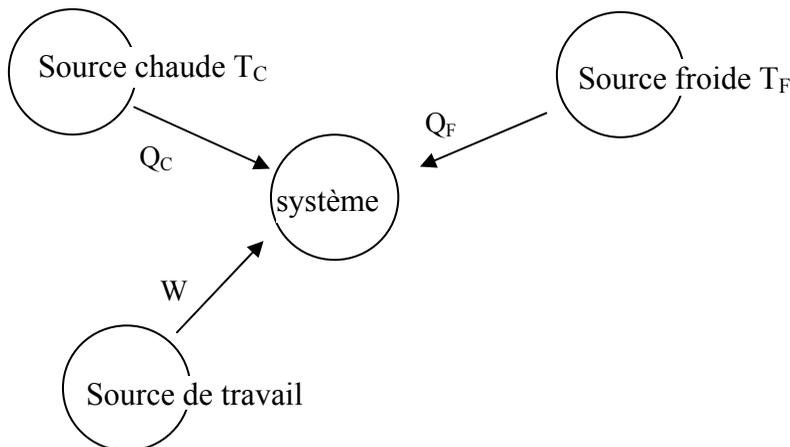
Soit W, Q les grandeurs énergétiques reçues par le système fluide pendant un cycle.

Alors au cours d'un cycle $\Delta U = W + Q = 0$

$\Delta S = 0 = S_e + S_{créée} \quad S_e = Q/T_0 \Rightarrow Q \leq 0$, car $S_{créée} \geq 0$ donc cela entraîne : $W \geq 0$

Le système ne peut que recevoir du travail. Impossibilité du moteur monotherme.

A.I.3.2.



A.I.3.2.1.

Au cours d'un cycle, la machine thermique est telle que : $\Delta U = 0$ et $\Delta S = 0$

Or $\Delta U = W + Q_F + Q_C = 0 \quad \Delta S = 0 = Q_C/T_C + Q_F/T_F + S_{créée}$;

$\Leftrightarrow Q_C/T_C + Q_F/T_F \leq 0$ (Inégalité de Clausius)

A.I.3.2.2.

Dans le cas du moteur ditherme :

$$W \leq 0 \Rightarrow Q_F + Q_C \geq 0 ; -Q_F - T_F/T_C Q_C \geq 0 ; Q_C(1 - T_F/T_C) \geq 0 \Rightarrow Q_C \geq 0 \text{ et } Q_F \leq 0$$

La source chaude transfère un flux thermique vers le moteur alors que le moteur transfère un flux thermique vers la source froide.

A.I.3.2.3.

Rendement ou efficacité du moteur : $\eta = |W| / Q_C = (Q_F + Q_C) / Q_C = 1 + Q_F / Q_C$

D'après l'inégalité de Clausius, $Q_F / Q_C \leq -T_F / T_C$

$$\eta \leq \eta_{\max} = 1 - T_F / T_C$$

A.I.4. Application : étude d'un climatiseur fonctionnant entre deux sources non idéales

La température de l'une des sources varie

I.4.1.

L'air contenu dans le salon a une capacité thermique C ; sa variation d'énergie interne est $\Delta U = C(T_1 - T_0)$

Elle a reçu un transfert thermique $-Q_F$ de la part du climatiseur :

$$\Delta U = -Q_F ; Q_F = C(T_0 - T_1)$$

A.I.4.2.

L'air extérieur est une source de capacité infinie. C est une source idéale.

Considérons le système {air + climatiseur + salon}

$\Delta S = 0 = \Delta S_{\text{air}} = \Delta S_{\text{climatiseur}} + \Delta S_{\text{salon}}$: le climatiseur évolue de façon réversible

$\Delta S_{\text{air}} = -Q_C / T_0$; $\Delta S_{\text{climatiseur}} = 0$; $\Delta S_{\text{salon}} = C \ln(T_1 / T_0)$ car $Ds = CdT/T$ (transformation isochore)

soit $Q_C = T_0 C \ln(T_1 / T_0)$

On peut considérer le climatiseur seulement

$\Delta S_{\text{climatiseur}} = 0 = \Delta S_{eC} + \Delta S_{eF}$ car le climatiseur fonctionne de façon réversible

$$\Delta S_{eC} = Q_C / T_0 \quad \Delta S_{eF} = - \int_{T_0}^{T_1} C dT/T = -C \ln(T_1 / T_0) \quad \text{d'où} \quad Q_C = T_0 C \ln(T_1 / T_0)$$

A.I.4.3.

$\Delta U = 0$ au cours des différents cycles donc :

$$W = -(Q_F + Q_C) = CT_0 (y - 1 - \ln y) \quad \text{avec} \quad y = T_1 / T_0 \quad \text{donc} \quad W > 0$$

A.I.4.4.

AN/ $P = W/\Delta t = 122 \text{ W}$ raisonnable (0,5 A en 220 V). Trouver une dizaine de kilowatts ne l'est pas.

A.II. Étude des systèmes ouverts en régime permanent

A.II. 1. Principes et définitions

A.II.1.1.

La masse $M(t)$ du fluide contenu dans (V) est indépendante du temps car le régime est permanent $M(t) = M(t+dt)$

La masse du système fermé Σ^* est invariante. $m_{\Sigma^*}(t) = m_{\Sigma^*}(t+dt)$, soit $M(t) + dm_e = M(t+dt) + dm_s \Rightarrow dm_e = dm_s$

En régime permanent $dm_e = dm_s$, noté désormais dm .

A.II.1.2.

En amont, compression du fluide ; il reçoit un travail : $\delta w_1 = P_1 dV_1 = P_1 v_1 dm$

En aval, détente du fluide : il fournit un travail : $\delta w_2 = -P_2 dV_2 = -P_2 v_2 dm$

A.II.1.3.

Premier principe appliqué à Σ^* fermé entre t et $t+dt$

$dU^* = \delta W + \delta Q$ et $dU^* = U^*(t+dt) - U^*(t) = [U_\Sigma(t+dt) + dm u_2] - [U_\Sigma(t) + dm u_1] = dm (u_2 - u_1)$ car U_Σ indépendant du temps.

$\delta W_{\text{pression}} = \delta W_1 + \delta W_2 = (P_1 v_1 - P_2 v_2) dm$ sans oublier $\delta W_{\text{indiqué}} = w_i dm$

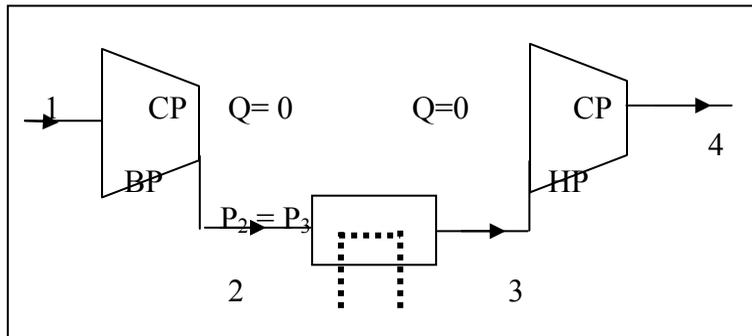
$\delta Q = q_e dm$

Donc $(u_2 - u_1) dm = (P_1 v_1 - P_2 v_2) dm + w_i dm + q_e dm$

soit avec $h = u + Pv$

$h_2 - h_1 = w_i + q_e$.

A.II.2. Application : compresseur à deux étages



A.II.2.1.

Il faut appliquer le théorème démontré précédemment :

Transformation 1-2 $\Delta h_{12} = C_p(T_2 - T_1) = w_{i12} + q_{e12} = w_{i12}$

Transformation 3-4 $\Delta h_{34} = C_p(T_4 - T_3) = w_{i34} + q_{e34} = w_{i34}$

Le travail indiqué est le travail utile fourni aux deux compresseurs : $w_i = w_{i12} + w_{i34} = C_p(T_2 + T_4 - 2T_1)$

On admet une évolution adiabatique et réversible dans les compresseurs ;

avec un gaz parfait et $C_p = \text{constante}$ on peut appliquer la loi de Laplace $PV^\gamma = \text{constante} \Rightarrow P^{(1-\gamma)}T^\gamma = \text{constante}$

$\Rightarrow P_1^{(1-\gamma)/\gamma} T_1^\gamma = P_2^{(1-\gamma)/\gamma} T_2^\gamma$ et $P_2^{(1-\gamma)/\gamma} T_1^\gamma = P_4^{(1-\gamma)/\gamma} T_4^\gamma$ d'où

$T_2 = T_1 r^{(\gamma-1)/\gamma}$ et $T_4 = T_1 (r/a)^{(1-\gamma)/\gamma}$

On en déduit donc $w_i = C_p T_1 (r^{(\gamma-1)/\gamma} + (r/a)^{(1-\gamma)/\gamma} - 2)$

A.II.2.2.

Posons $\alpha = (\gamma-1)/\gamma$; il s'agit de rendre minimale l'expression $f(r) = r^\alpha + (r/a)^{-\alpha}$

$\Rightarrow df/dr = \alpha r^{\alpha-1} - \alpha (r/a)^{-\alpha-1} = 0 \Rightarrow r^\alpha = (r/a)^{-\alpha} \Rightarrow r = \sqrt[\alpha]{a} = 5$

A.II.2.3.

On a alors $T_2 = T_1 5^\alpha$ avec $\alpha = 2/7 \Rightarrow T_2 = 1,58 T_1 = 475 \text{ K}$ et $T_4 = T_1 (5/25)^{-\alpha} = T_2$

$T_2 = T_4 = 475 \text{ K}$

A.II.2.4

Réfrigérant calorifugé $\Rightarrow P_{\text{thermique eau}} + P_{\text{thermique air}} = 0$

$d_{\text{eau}} c_{\text{eau}} \Delta t + d_{\text{air}} C_p (T_3 - T_2) = 0$ En effet $P_{\text{thermique air}} = d_{\text{air}} q_e$. Or $\Delta h_{23} = w_{i23} + q_{e23} = C_p (T_3 - T_2)$: $w_{i23} = 0$

$\Rightarrow d_{\text{eau}} = d_{\text{air}} C_p / c_{\text{eau}} (T_2 - T_3) / \Delta t$

AN : $d_{\text{eau}} = 5,4 \text{ kg.s}^{-1}$

A.II.3. Application : cycle de Rankine d'une machine à vapeur

A.II.3.1.

Estimation du travail reçu par la pompe :

$$\Delta h_{34} = w_{i34}. \quad \text{Or } dh = Tds + VdP$$

En négligeant la variation d'entropie de la phase liquide (très faible par rapport aux entropies gazeuses) on en déduit que $w_i \simeq \int VdP \simeq V\Delta P$

Or les volumes des liquides sont environ 1000 fois plus faibles que ceux des gaz. $V \simeq 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

D'où $w_i \simeq 10^{-3} \times 50 \times 10^5 = 5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

w_i négligeable par rapport aux autres travaux mis en jeu $\Rightarrow w_i \simeq 0$ et $\Delta h \simeq 0$ compression isenthalpique du liquide

A.II.3.2.

✚ **Point 1:** vapeur juste saturante à $P = P_1 = 55 \text{ bar} \Rightarrow s_1 = s_{55} (55 \text{ bar}) = s'_{55} + L_v(55)/T_1$
Numériquement $s_1 = 5,93 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

✚ Transformation 1-2 : transformation isentropique $\Rightarrow s_2 = s_1 = 5,93 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Titre en vapeur : sous la pression saturante de 0,2 bar : $s_2 = s'(p=0,2) + x_2 L_v/T_2$

$$x_2 = (s_2 - s'(0,2)) \times T_2 / L_v(0,2) = (5,93 - 0,83) \times 330 / 2350 \simeq 0,72 \text{ ou } 0,717$$

De même : $h_2 = h'(0,2) + x_2 L_v(0,2) = 250 + 0,72 \times 2350 = 1934 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$s_2 = 5,93 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad h_2 = 1934 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

A.II.3.3.1

Transformation. 4-1 : $\Delta h_{41} = w_{i41} + q_1 = q_1$ (pas de partie mobile) donc $q_1 = h_1 - h_4$

Or $\Delta h_{34} = 0 \Rightarrow h_4 = h_3 = h'(P_2) = 250 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (en 3 liquide saturant sous la pression $P_2 = 0,2 \text{ bar}$)

$h_1 = h''(P_1) = h'(P_1) + L_v(T_1) = 1180 + 1600 = 2780 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$\text{AN: } q_1 = 2780 - 250 = 2530 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

A.II.3.3.2.

Transformation 2-3 : $\Delta h_{23} = w_{i23} + q_{e23} = -q_2 = h_3 - h_2$

$$q_2 = h_2 - h_3 = 1934 - 250 = 1684 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$q_2 = 1684 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

A.II.3.3.3.

Dans la turbine détente adiabatique $q_{iT} = 0$: $\Delta h_{12} = w_{iT} + 0$

$$\Delta h_{12} = h_2 - h_1 = 1934 - 2780 = -846 \text{ J}$$

$$W_{iT} = -846 \text{ J}$$

A.II.3.3.4.

Rendement : $\eta = |w_{iT}| / q_1 \quad \eta = 846 / 2530 \simeq 0,33$

Rendement de Carnot : $\eta_{\max} = 1 - T_{\min} / T_{\max} = 1 - 330 / 540 = 0,39$

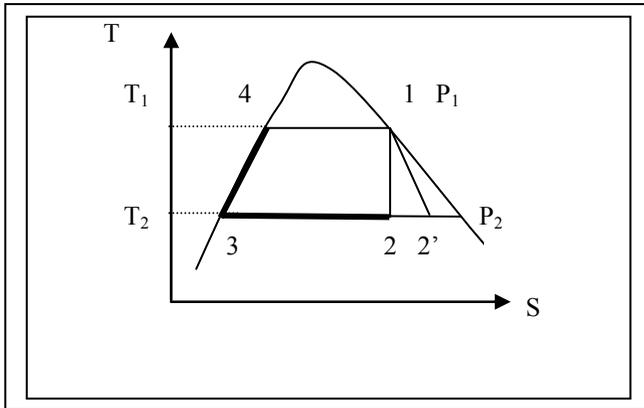
On obtient bien $\eta \leq \eta_{\max}$

A.II.3.4. Allure du cycle dans le diagramme entropique.

A.II.3.4.1.

Les isobares à l'intérieur de la courbe de saturation sont des isothermes car $P = f(T) \Rightarrow$ droites horizontales

A.II.3.4.2.



A.II.3.4.3.

Si l'évolution 1-2 est adiabatique irréversible, alors $\Delta S_{12} > 0 \Rightarrow$ on aboutit à (2') situé « à droite » de (2) sur l'isobare P_2 à T_2

B. DIFFUSION THERMIQUE

B.I. Transfert par conduction thermique

B.I. 1. Équation de la chaleur

B.I.1.1.

$\underline{j_Q}$ = puissance/surface s'exprime en $W.m^{-2}$

grad T s'exprime en $K.m^{-1}$

L'unité de λ : $W.K^{-1} m^{-1}$

B.I.1.2.

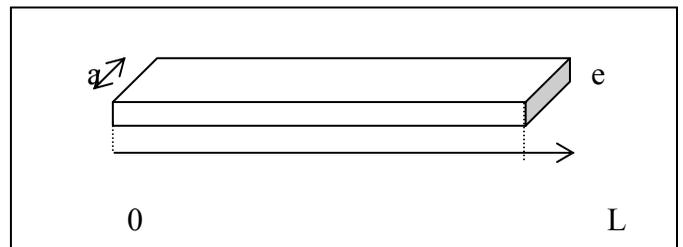
Puissance algébriquement sortante du système : $[j_Q(x+dx) - j_Q(x)] S = \frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} S dx$

Cette puissance = perte d'énergie du système /unité de temps = $-\frac{\partial U}{\partial t}$ avec $dU = \mu c T S dx$

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} \quad \frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

B.I.1.3.

Or $j_{Qx} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow D \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$ avec $D = \lambda / \mu c \Rightarrow D$ s'exprime en $m^2.s^{-1}$



B.I.2. Contact avec deux sources de chaleur idéales

B.I.2.1.

Régime permanent $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax+B$ linéaire

$$T(x=0) = T_0 ; T(x=L) = T_1 \Rightarrow T(x) = T_0 + (T_1-T_0)x/L$$

$$\Phi = j_Q S = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S = \lambda S(T_0-T_1)/L$$

B.I.2.2

Électricité	Thermique
Potentiel V	T_0-T_1
Intensité I	Φ ou puissance
Résistance électrique $R = V/I$	résistance thermique $R_{th} = (T_0-T_1)/\Phi$
soit $R_{th} = L/\lambda S$ ($R_{électrique} = L/\gamma S$)	
Unité : $K.W^{-1}$	

B.I.3. Transfert convectif

B.I.3.1.

$P_C = \alpha S(T - T_a)$: unité de α : $W.m^{-2} K^{-1}$

Résistance thermique de convection : $R_C = (T - T_a)/P_C = 1/\alpha S$

B.I.3.2.

✚ $\delta^2 = \lambda e/2\alpha$ d'où δ est homogène à une longueur

✚ Bilan entre x et $x+dx$

$S = ae$

$$\mu c S \frac{\partial T}{\partial t} dx dt = dt [j_Q(x) - j_Q(x+dx)]S - 2\alpha dx(a+e)(T - T_a)dt = -S \frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} dt dx - 2\alpha dx(a+e)(T - T_a)dt$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{Qx}}{\partial x} - 2\alpha((a+e)/ae)(T-T_a) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - [2h(a+e)/ae](T-T_a)$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (2h/e)(T-T_a) \text{ si } e \ll a$$

$$\theta(x) = [T(x) - T_a]. \quad \mu c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2h\theta}{e}$$

En régime permanent, compte tenu de la définition de δ : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\delta^2} \theta = 0$

$$\theta(x) = A \operatorname{sh}(x/\delta) + B \operatorname{ch}(x/\delta)$$

$$\text{En } x=0 : \theta = B = T_0 - T_a$$

$$\text{En } x=L : \theta(L) = T_1 - T_a = A \operatorname{sh}(L/\delta) + B \operatorname{ch}(L/\delta)$$

$$\text{D'où } B = T_0 - T_a \text{ et } A = [(T_1 - T_a) - (T_0 - T_a) \operatorname{ch}(L/\delta)] / \operatorname{sh}(L/\delta)$$

$$T(x) - T_a = (T_0 - T_a) \operatorname{ch}(x/\delta) + \operatorname{sh}(x/\delta) [(T_1 - T_a) - (T_0 - T_a) \operatorname{ch}(L/\delta)] / \operatorname{sh}(L/\delta)$$

✦ Cas particulier si $L \gg \delta$

Alors $T(x) - T_a = (T_0 - T_a) \operatorname{ch}(x/\delta) - (T_0 - T_a) \operatorname{sh}(x/\delta) = (T_0 - T_a) \exp(-x/\delta)$: la température tend vers T_a

On retrouve la relation directement en admettant que $\theta(x) = C \exp(-x/\delta)$ et en écrivant les conditions aux limites

$$T(x) - T_a = (T_0 - T_a) \exp(-x/\delta)$$

B.I.4. Application : comportement thermique d'un transistor de puissance

B.I.4.1.

En régime permanent, le même flux thermique Φ traverse les différents éléments aux interfaces transistor-radiateur et radiateur-air

Soit : $(T - T_R) = R \Phi$ et $(T_R - T_a) = R_{\text{rad}} \Phi \Rightarrow T - T_a = (R + R_{\text{ad}}) \Phi$ (association série)

$$R_{\text{ad}} = -R + (T - T_a) / \Phi$$

B.I.4.2.

AN : $\Phi = 40 \text{ W}$; $T_a = 20^\circ\text{C}$; $T = 140^\circ\text{C}$; $R = 0,5 \text{ K.W}^{-1}$

$$R_{\text{ad}} = 120/40 - 0,5 = 2,5 \text{ K.W}^{-1} ; R_{\text{ad}} = 2,5 \text{ K.W}^{-1}$$

Par lecture sur la courbe, on en déduit qu'il faut commander un radiateur de longueur $l = 60 \text{ mm}$

BI.5. Analyse en régime transitoire

B.I.5.1.

Bilan énergétique du transistor : $C \frac{\partial T}{\partial t} = \Phi - (T - T_R) / R$

Bilan énergétique du radiateur : $C_R \frac{\partial T_R}{\partial t} = (T - T_R) / R - (T_R - T_a) / R_{\text{rad}}$

B.I.5.2.

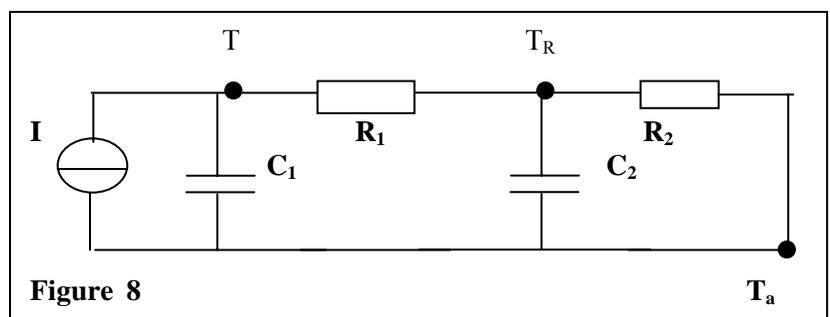
$T \rightarrow V_T$; $T_R \rightarrow V_R$; $T_a \rightarrow V_a$; $\Phi \rightarrow I$;

$C \rightarrow C_1$; $C_R \rightarrow C_2$; $R_1 = R$; $R_2 = R_{\text{ad}}$

Loi des nœuds en T et T_R

$$\text{✦ } C_1 \frac{dV_T}{dt} = I + (V_R - V_T) / R_1$$

$$\text{✦ } C_2 \frac{dV_R}{dt} = (V_T - V_R) / R_1 + (V_a - V_R) / R_2$$



B.I.5.3.

$$\underline{H}(p) = \underline{H}(j\omega) = \frac{(T - T_a)}{\Phi}$$

$$I \cdot Z = V_T - V_a$$

$$\underline{Z} = R_1 + 1 / (1/R_2 + jC_2\omega)$$

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2 + jR_1R_2C_2\omega) / (1 + jR_2C_2\omega)$$

$$\underline{i} / I = 1 / (1 + jC_1\omega \underline{Z}) \text{ (diviseur de courant) et } T - T_a = \underline{Z} \underline{i}$$

$$(T - T_a) / I = \underline{Z} / (1 + jC_1\omega \underline{Z}) \text{ soit } \underline{H} = (R_1 + R_2 + jR_1R_2C_2\omega) / (1 + j[(R_1 + R_2)C_1 + R_2C_2] \omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2)$$

Finalemment :

$$\underline{H} = (T-T_a)/\Phi = (R+R_{rad} + jRR_{rad}C_R\omega)/(1+j[(R+R_{rad})C+R_{rad}C_R] \omega - RR_{rad}CC_R\omega^2)$$

B.I.5.4.

$$RR_{rad} CC_R \omega^2 \ll 1$$

Alors $\underline{H} = \underline{N}(\omega)/(1+j\omega\tau)$ avec $\tau = (R+R_{rad})C+R_{rad}C_R$

La constante de temps τ est caractéristique de l'évolution temporelle de la température T(t) du transistor.

AN : $\tau = R_{rad}C_R + R C + R_{ad}C = 800s = 13,3 \text{ min}$ $\tau = 13,3 \text{ min}$

B.I.5.5.

$H(p) = N(p)/(1+\tau p)$ p de l'ordre de grandeur de 1/τ

$$RR_{rad} CC_R / \tau^2 = 3,9 \times 10^{-2} \ll 1$$

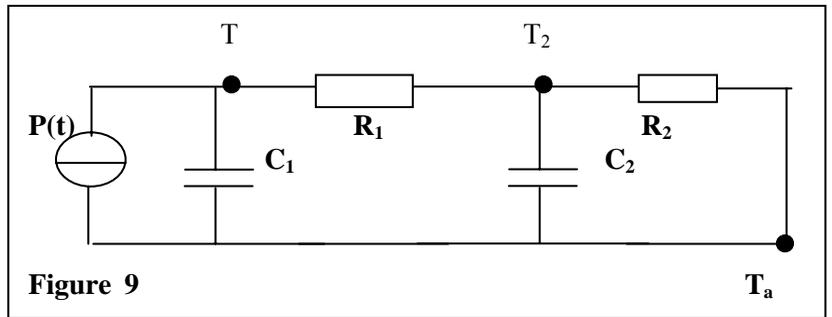
L'approximation à un 1er ordre est légitime.

B.II. RÉGULATION DE TEMPÉRATURE

$\theta = T_2 - T_a$; $C_1 = 400 \text{ J.K}^{-1}$;
 $C_2 = 1000 \text{ J.K}^{-1}$; $R_1 = 1,0 \text{ K.W}^{-1}$;
 $R_2 = 4,0 \text{ K.W}^{-1}$.

L'action de la puissance électrique P(t) sur la différence de température θ peut être représentée par la fonction de

transfert : $B(p) = \frac{\theta(p)}{P(p)}$



B.II.1.

La fonction de transfert $H(p) = (T-T_a)(p)/P(p)$ et $\underline{\theta} = Z_2(T-T_a)/(R_1+Z_2)$ avec $1/Z_2 = 1/R_2 + jC_2\omega$
 Soit $\theta = R_2/(R_1+R_2+jR_1R_2C_2\omega)$

On en déduit : $B(p) = R_2/(1+[(R_1+R_2)C_1+R_2C_2]p+R_1R_2C_1C_2p^2)$

Soit $B_0 = R_2$; $\omega_0 = [R_1R_2C_1C_2]^{-1/2}$; $m_0 = [(R_1+R_2)C_1+R_2C_2] \omega_0/2$

A.N : $B_0 = 4 \text{ K.W}^{-1}$; $\omega_0 = 7,9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$; $m_0 = 2,37$

$$B(j \omega) = B(p) = \frac{4}{(1,6 \cdot 10^6 p^2 + 600p + 1)}$$

$$|B| = \frac{4}{(22,46x^2 + (1 - x^2)^2)^{1/2}}$$

B.II.2.

Il s'agit d'un filtre passe-bas du second ordre

$x \rightarrow 0$ $B(p) \rightarrow B_0 = 4$ GdB = $20 \lg |B(j\omega)| = 12$

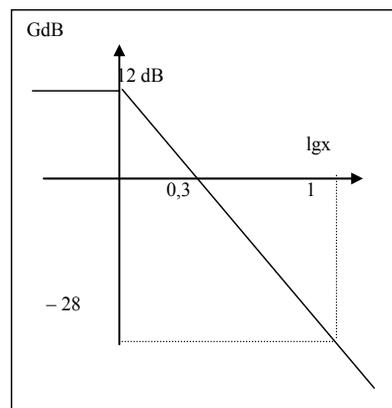
$x \rightarrow \infty$ $B(p) \rightarrow B_0\omega_0^2/p^2$ GdB = $12,04 - 40 \lg x$

$x = 1$ $\lg x = 0$ GdB = $-14,47$

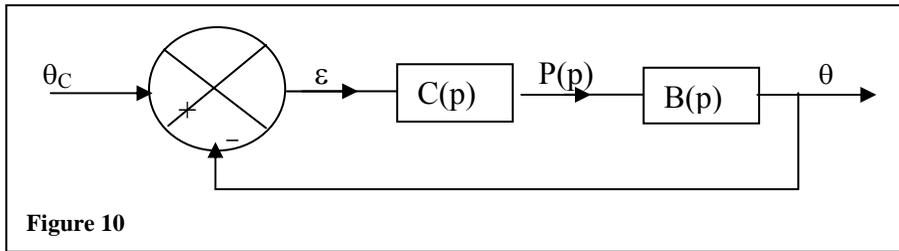
Pour $x = 0,2$ GdB = 9 dB affaiblissement de 3 dB

$x=2$ G = -15,8 $x=10$ G = -28,8 $x=0,1$ G = 11,23

$x=0,08$ G = 11,5



B.II.3.



$C(p)$ représente le processus de commande de la résistance chauffante, assimilable à un système linéaire proportionnel : $C(p) = \Gamma$.

B.II.3.1. L'unité de Γ

$$P(p) = \Gamma(\theta_c - \theta) \quad \text{unité } W.K^{-1}$$

B.II.3.2.

$$\varepsilon = \theta_c - \theta \quad \text{et} \quad \theta = \Gamma B \varepsilon$$

$$H(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_c(p)} = \frac{\Gamma B(p)}{1 + \Gamma B(p)}$$

$$H(p) = H(j\omega) = \frac{H_0}{\left(\frac{p^2}{\omega_1^2} + 2m \frac{p}{\omega_1} + 1 \right)}$$

$$H_0 = \Gamma B_0 / [1 + \Gamma B_0] \quad m = m_0 / (1 + \Gamma B_0)^{1/2} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \omega_0 (1 + \Gamma B_0)^{1/2}$$

B.II.3.3.

Dans une réponse à un échelon $m = 1$ critique $m > 1$ apériodique amorti

$m < 1$ pseudo périodique amorti

On veut Γ pour $m \approx 0,7$. Oscillation pseudo-périodique très amorti. Système rapide pour le retour à l'équilibre.

$$m = m_0 / (1 + \Gamma B_0)^{1/2} = 0,7 ; \quad \Gamma = 2,616 \text{ W.K}^{-1}$$

B.II.3.4.

B.II.3.4.1. θ_∞ de la température de la plaque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\theta(p) \quad \text{avec} \quad \theta(p) = H(p) \theta_c(p)$$

$$\theta_\infty = H_0 \theta_c = 100 H_0 \quad \text{avec} \quad H_0 = 2,62 \times 4 / (1 + 4 \times 2,62) = 0,9128. \quad \text{Soit} \quad \theta_\infty = 91,3 \text{ K}$$

L'écart statique ε_∞ entre la température de consigne et la température obtenue : $\varepsilon_\infty = \theta_c - \theta_\infty = -8,7 \text{ K}$

B.II.3.4.2.

Lorsque

t_r temps au bout duquel la réponse du système diffère de moins de 5% de sa valeur finale, dit « temps de réponse à 5% », sachant que pour $m \approx 0,7$, $t_r \approx 3/\omega_1$.

$$\omega_1 = \omega_0 (1 + \Gamma B_0)^{1/2} = 2,68 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$t_r = 1120 \text{ s} \approx 19 \text{ min}$$

B.II.3.4.3.

Amplitude relative D du premier dépassement en % définie par $D = (\theta_{\max} - \theta_{\infty})/\theta_{\infty}$ et donné par l'expression :

$$D = 100 \exp \left[-\frac{\pi \cdot m}{\sqrt{1 - m^2}} \right] = 4,6\%$$

B.II.3.4.4. Allure de $\theta(t)$: amorti fortement.

B.II.3.5.

B.II.3.5.1.

Valeur de Γ permettant d'obtenir $\varepsilon_{\infty} \approx -1$ K $\Rightarrow \theta_{\infty} = 99$ K soit $H_0 = 0,99 = \Gamma B_0 / [1 + \Gamma B_0]$

Donc $\Gamma B_0 = H_0 / (1 - H_0) = 99 \Rightarrow \Gamma = 99/4 = 24,75$ W.K⁻¹

B.II.3.5.2.

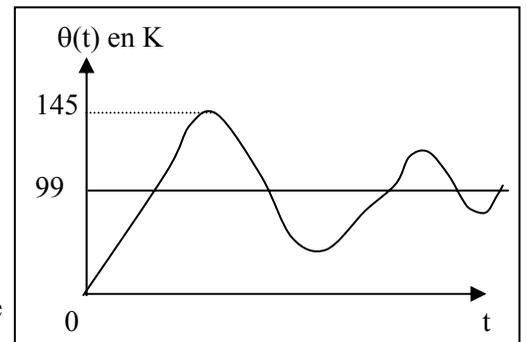
$$m = m_0 / (1 + \Gamma B_0)^{1/2} = m_0 / 10 = 0,237 < 0,7$$

B.II.3.5.3.

On obtient : $D = 46,5\%$, soit $\theta_{\max} = 145$ K

B.II.3.5.4.

m a beaucoup diminué : la réponse est donc peu amortie
Inconvénients grand dépassement, augmentation du temps de réponse
Il est plus indiqué d'utiliser un correcteur intégral et proportionnel pour annuler l'erreur statique.



C. UN EXEMPLE DE TRANSFERT THERMIQUE : CHAUFFAGE PAR INDUCTION

C.I. En classe de première S

C.I.1. 3 activités. Par exemple :

visualisation de spectres, comparaison entre les spectres des courants et des aimants
rotation d'un aiguille aimantée (expérience d'Oersted), influence du sens du courant,
solénoïde parcouru par un courant : étude des différents paramètres (I , N et ℓ)

B proportionnel à I en un point, utilisation d'un teslamètre

B lié au sens de I

C.I.2. Mesure de la composante horizontale de $B_{\text{terrestre}}$.

- boussole orientée dans le champ B_T , placée perpendiculairement à l'axe d'un solénoïde parcouru par un courant ou utilisation des bobines d'Helmholtz

- Utilisation de la boussole des tangentes

- mesure de la déviation de la boussole lorsque l'on fait circuler un courant ; soit α .

Alors $\tan \alpha = B_{\text{solénoïde}}/B_T$

En faisant varier I , on trace $\tan \alpha = f(I)$. On vérifie le caractère rectiligne, on détermine la pente pour trouver B_T .

Ordres de grandeur :

$B_T = 2,0 \times 10^{-5}$ T (composante horizontale)

Solénoïde $n = 1000$ spires par unité de longueur (500 spires sur 20 cm par exemple)

$I = 4$ mA, $B = 2,0 \times 10^{-5}$ T

Alors α proche de 45°

C.II. En classe de PCSI

- champ magnétique créé par une spire parcourue par le courant I_0 en un point de son axe :
analyse des symétries
détermination de la direction de \vec{B}
écriture de la loi de Biot et Savart
intégration
- passage au solénoïde fini :
écriture de l'élément de courant
intégration
 - passage au solénoïde infini sur l'axe
 - utilisation du théorème d'Ampère pour justifier le champ uniforme

Remarque : l'énoncé n'indiquant pas si le solénoïde est infini ou non, il est possible d'accepter la démarche suivante :

- champ créé par un solénoïde
analyse des symétries
analyse des invariances par translation, rotation
 $\Rightarrow \vec{B} (M) = B(r) \vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques
justification qualitative de $B = 0$ à l'extérieur (cf programme)
utilisation du théorème d'Ampère
calcul de $\vec{B}_{\text{intérieur}}$

C.III. CHAUFFAGE PAR INDUCTION

C.III.1.

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{champ électromoteur} \quad \vec{A} = A(r) \vec{e}_\theta \quad \text{pour le champ uniforme}$$

Conducteur placé dans un champ magnétique variable \Rightarrow existence d'un champ électrique induit, puis courants volumiques induits dits courants de Foucault.

Sources du champ \vec{E} : distribution de courant $i(t)$ variable dans le solénoïde. Tout plan contenant l'axe Oz est plan d'AS pour ces courants $\Rightarrow \vec{E}_{(M)} \perp \text{plan}(O, M, z) \Rightarrow \vec{E}$ orthoradial
En supposant le cylindre suffisamment long : invariance par translation le long de Oz, invariance par rotation autour de Oz $\Rightarrow \vec{E}$ ne dépend ni de z , ni de θ : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_\theta$

C.III.2.

$$\text{Théorème de Stokes} : \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

Prenons comme contour le cercle de rayon $r = OM$, centré sur Oz et pour surface le disque de rayon r .

$$E(r) \times 2\pi r = - \frac{dB}{dt} \times \pi r^2 = \omega B_0 \sin \omega t \times \pi r^2$$

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} B_0 \omega \sin \omega t r \vec{u}_\theta$$

C.III.3.

Puissance volumique instantanée cédée à la matière : $P_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$

Puissance volumique moyenne $\langle P_{\text{vol}} \rangle = \gamma \langle E^2 \rangle = \gamma B_0^2 \omega^2 r^2 / 8$

$$\text{Puissance totale : } P = \iiint \langle P_{\text{vol}} \rangle d\tau = \int_{r=0}^a \langle P_{\text{vol}}(r) \rangle 2\pi r \ell dr$$

$$P = \gamma B_0^2 \pi \ell a^4 \omega^2 / 16$$

C.III.4.

$$\text{AN : } \gamma = 10 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} ; \omega = 2\pi f_0 = 6\pi \times 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$P = 2,8 \text{ GW}$$

Valeur un peu trop élevée, comparée à la réalité industrielle. Le champ B utilisé est en réalité plus faible.