

SOLUTION DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE PHYSIQUE

Les éléments de correction figurant ci-dessous comporte des approfondissements qui n'étaient pas attendus des candidats.

I. Electrostatique

1. Champ électrique

□ 1.1.

La loi de Coulomb concerne deux charges ponctuelles placées dans le vide.

La charge q_1 est placée en O, origine d'un repère fixe ; la charge q_2 , placée en M, est soumise, d'après la loi de

Coulomb à la force $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\overline{OM}}{OM^3}$.

Par définition, le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M par la charge q_1 est tel que $\vec{F}_{12} = q_1 \vec{E}(M)$.
Ce champ ne dépend pas de la charge q_2 .

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\overline{OM}}{OM^3}$$

Le champ créé par q_1 caractérise l'influence de celle-ci sur l'espace qui l'entoure.

Remarque : Dans un milieu isolant homogène, isotrope et linéaire la force d'interaction est donnée en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$. La constante ϵ s'appelle permittivité du milieu et ϵ_r permittivité relative du milieu.

Pour l'air, $\epsilon_r \approx 1,00058$, de sorte que l'électrostatique dans l'air se confond pratiquement avec l'électrostatique du vide.

□ 1.2.

L'expérience conduit à postuler que les interactions électrostatiques ont des effets additifs ce qui constitue le principe de superposition.

La force exercée par un ensemble de n charges q_i placées en P_i sur une charge q placée en M est la somme vectorielle des n forces exercées individuellement par chaque charge.

Le champ $\vec{E}(M)$ est donc la somme des champs créés par les n charges : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\overline{P_i M}}{(P_i M)^3}$

□ 1.3.

Distribution volumique : un volume élémentaire $d\tau$ contient une charge : $dq(P) = \rho(P) d\tau$

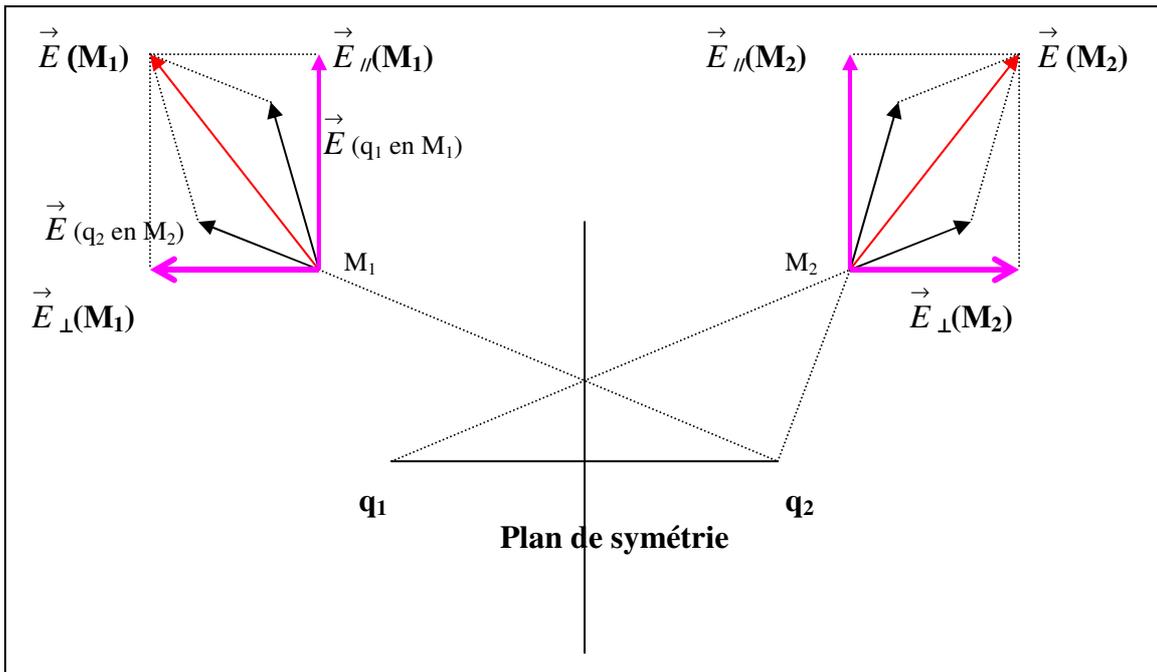
Le champ $\vec{E}(M)$ créé par un volume V est : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(P) \frac{\overline{PM}}{PM^3} d\tau(P)$

Distribution surfacique : $dq(P) = \sigma(P) dS$; $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma(P) \frac{\overline{PM}}{PM^3} dS(P)$

Distribution linéique : $dq(P) = \lambda(P) d\ell$; $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\square} \lambda(P) \frac{\overline{PM}}{PM^3} d\ell(P)$

Ces expressions ne sont a priori applicables qu'aux distributions d'extension finie, pour assurer la convergence des intégrales du point de vue de la contribution des points éloignés. Cependant, il existe des cas de distributions d'extension infinie pour lesquels ces intégrales convergent.

□ 1.4.



Le problème est invariant par rotation autour de l'axe des charges q_1 et q_2 . Il suffit donc de se placer dans un plan contenant ces charges.

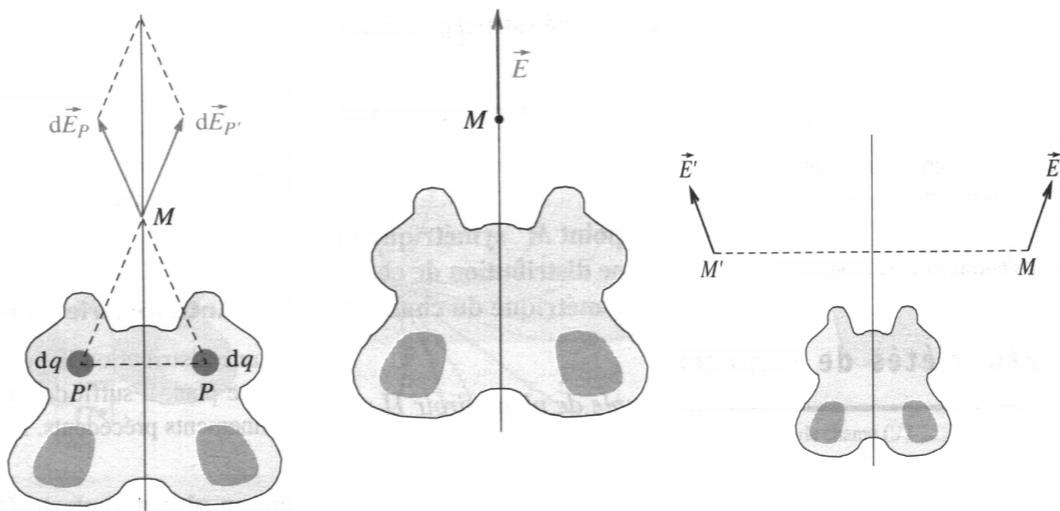
Par addition vectorielle, on montre que les champs $\vec{E}(M_1)$ et $\vec{E}(M_2)$ sont symétriques par rapport au plan de symétrie des charges. Donc :

$$\vec{E}_{\perp}(M_1) = -\vec{E}_{\perp}(M_2) \quad ; \quad \vec{E}_{//}(M_1) = \vec{E}_{//}(M_2)$$

En un point M du plan de symétrie, le champ ne peut pas avoir deux directions donc il est contenu dans le plan :

$$\vec{E}_{\perp}(M \in \text{Plan de symétrie}) = \vec{0}.$$

On peut généraliser à deux distributions volumiques symétriques



La distribution de charges est invariante par une symétrie par rapport au plan miroir.

Si P et P' sont symétriques par rapport à ce plan : $\rho(P) = \rho(P')$

Aux points M et M', symétriques par rapport à un plan miroir d'une distribution de charges, les champs électriques

$\vec{E}(M)$ et $\vec{E}'(M')$ sont symétriques l'un de l'autre.

Sur le plan miroir, le champ électrostatique est parallèle au plan miroir.

2. Potentiel et énergie potentielle.

□ 2.1.

Le travail de la force électrique dans un déplacement élémentaire $d\vec{l}(M)$ est : $\delta W = \vec{F}(q_2) \cdot d\vec{l}$

Or, en coordonnées sphériques : $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \cdot q_2 \frac{\vec{e}_r}{(r)^2} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \cdot q_2 \frac{1}{(r)^2} dr$$

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \cdot q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) ; \quad W(\infty, r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \cdot q_2 \left(\frac{1}{r} \right)$$

□ 2.2.

Par définition $dU = - \delta W$; $U(r_2) - U(r_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \cdot q_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$.

Remarque : $\delta W(\vec{F}) = - \delta W(\text{opérateur})$ dans une transformation réversible où à chaque instant

$$\vec{F}_{\text{elec}} + \vec{F}_{\text{op}} = \vec{0}.$$

$$U(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \cdot q_2 \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{en prenant } U(\infty) = 0 \text{ par convention s'il n'y a pas de charge à l'infini.}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \left(\frac{1}{r} \right)$$

□ 2.3.

$$dU = q_1 \cdot dV = - \vec{F} \cdot d\vec{l} = - q_1 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{donc } dV = - \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{or } dV = \text{grad } V \cdot d\vec{l} \quad \text{donc } \vec{E} = - \text{grad } V$$

On peut faire une démonstration :

$$dV = V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z ; \quad dV = - \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{donc } \vec{E} = - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \dots$$

$$\text{d'où : } \vec{E} = - \text{grad } V$$

□ 2.4.

$$\vec{E}(M) = \sum \vec{E}_i(M) = - \sum \text{grad } V_i = - \text{grad } V ; \quad V(M) = \sum V_i(M)$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(P_i)}{P_i M} ; \quad V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$$

Cette dernière expression n'est valable que sur un domaine d'extension finie car elle repose sur la convention que le potentiel tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne à l'infini. Le volume \mathcal{V} est limité dans l'espace.

□ 2.5.

L'énergie potentielle des trois charges est le travail fourni par un opérateur pour amener les trois charges de l'infini

(sans interaction) dans leur position finale .

Pour amener la charge q_0 de l'infini, le travail fourni par l'opérateur est nul.

On amène une charge q_1 ; le travail fourni est alors égal à :

$$W_1(\text{opé}) = q_1 V(\text{en } H_1 \text{ par } q_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_0 \frac{1}{OH}$$

On amène ensuite la seconde charge q_1 :

$W(\text{opérateur}) = q_1 V(\text{en } H_2 \text{ créé par } q_0) + q_1 V(\text{en } H_2 \text{ créé par } q_1)$

$$W_2(\text{opé}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_0 \frac{1}{OH} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_1 \frac{1}{H_1 H_2}$$

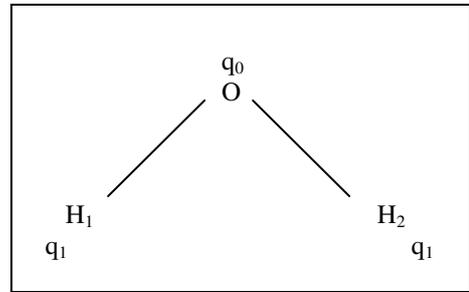
$$\text{Donc } U = W_1 + W_2 = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_0 \frac{1}{OH} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_1 \frac{1}{H_1 H_2}$$

On retrouve le résultat connu : $U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$ avec V_i potentiel créé en P_i où est placée la charge q_i par

toutes les autres charges .

Application numérique : $OH = 0,1 \text{ nm}$; $H_1 H_2 = 2 \cdot OH \cos 52^\circ$

$U = -8,51 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ou $-5,3 \text{ eV}$ soit $-512 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

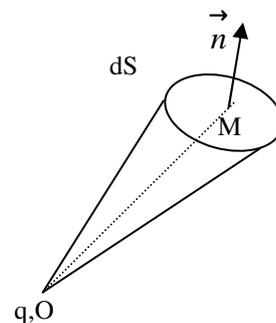


3. Flux du vecteur champ à travers une surface

□ 3.1.

$$d\phi = \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} dS}{OM^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$



$d\Omega$ est l'angle solide élémentaire, compté algébriquement , sous lequel de O on voit la surface dS orientée.

Si la charge appartient au volume délimité par la surface fermée : $\iint_S d\Omega = 4\pi$

Si la charge est extérieure au volume délimitée par la surface : $\iint_S d\Omega = 0$

□ 3.2.

On peut généraliser à n charges .

Considérons une surface fermée convenablement choisie et prise dans une distribution de charge q_i .

Cette surface partage l'espace en deux régions : l'intérieur et l'extérieur .

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{intérieur}} \frac{q_i \overline{P_i M}}{P_i M^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{extérieur}} \frac{q_j \overline{P_j M}}{P_j M^3}$$

$$\Phi(\vec{E} \text{ sur } S) = \sum \phi_i + \sum \phi_j = \sum \phi_i = \sum_i \frac{q(\text{intérieure})}{\epsilon_0}$$

On généralise facilement à une distribution de charges quelconques placées dans le vide :

Le flux sortant du champ d'une distribution ρ de charges électriques à travers une surface fermée est égal à la charge située à l'intérieur de S divisée par ϵ_0 .

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad ; \quad \vec{n} \text{ est orienté de l'intérieur vers l'extérieur du volume délimité par la surface } S .$$

4.Applications

□ 4.1.

Le volume de la sphère (la boule) est à répartition de charge à symétrie sphérique de centre O ; le champ est de la

forme : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

On peut aussi invoquer les symétries : tous les plans diamétraux passant par M sont plans de symétrie ; OM est

leur intersection ; $\vec{E}(M)$ est porté par \overline{OM} .

$$r < R \quad E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4/3 \pi \rho r^3 / \epsilon_0 \quad E(r) = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0}$$

$$r > R \quad E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4/3 \pi \rho R^3 / \epsilon_0 \quad E(r) = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

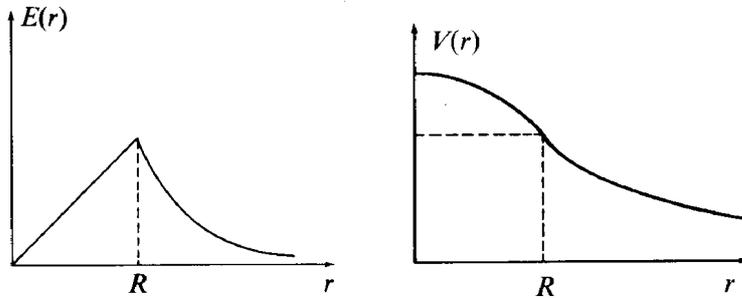
□ 4.2.

En coordonnées sphériques ; $E = - \frac{\partial V}{\partial r}$. Par convention $V(\infty) = 0$; pour $r = R$, le potentiel est continu (de

façon générale, le potentiel est continu à la traversée d'une distribution surfacique de charges finies).

$$r > R : V(M) - V(\infty) = V(M) = - \int_{\infty}^r E.dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$r < R : V(M) - V(R) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(R^2 - r^2) \quad V(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$$



Graphe $E(r)$: pour $r = R$; $E(R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$; pente $\frac{\rho R}{3\epsilon_0}$ à gauche et $-\frac{2\rho R}{3\epsilon_0}$ à droite .

Graphe $V(r)$: la courbe $V(r)$ présente un point d'inflexion pour $r = R$; $V(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$

□ 4.3. Energie potentielle

On construit la sphère par couches successives .

Soit une sphère de rayon r chargée en volume avec une densité ρ uniforme : $V(r' > r) = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$.

De l'infini, apportons sur cette sphère une couche d'épaisseur dr et de charge $dq = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$.

L'opérateur fournit un travail $\delta W = V(r) \cdot dq$

Pour constituer la sphère de rayon R , l'opérateur fournit le travail :

$$W(\text{op}) = U = \int_0^R \frac{\rho^2 4\pi r^4}{3\epsilon_0} . dr = \frac{\rho^2 4\pi R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{5\epsilon_0 R}$$

Le calcul de cette énergie peut être conduit différemment, mais hors du cadre de l'énoncé, en utilisant les expressions :

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} \rho V(r) . dr \quad \text{ou} \quad U = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

□ 4.4. Sphère creuse

On superpose les champs créés par deux sphères chargées $+\rho$ (centre O ; rayon R) et $-\rho$ (centre O' ; rayon

$$R') : \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OM} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O'M} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO'}$$

Le champ à l'intérieur de la cavité est uniforme .

5. Le dipôle électrique

□ 5.1

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

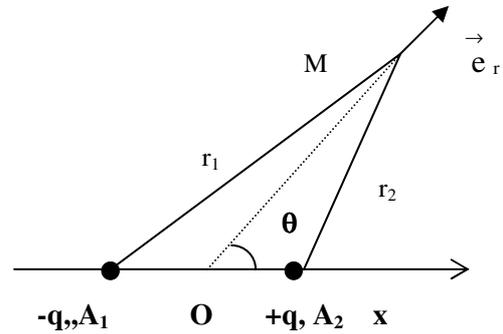
$$r_1^2 = r^2 + a^2 + 2a.r \cos \theta \quad ; \quad r_2^2 = r^2 + a^2 - 2a.r \cos \theta$$

Au premier ordre :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2}$$

On pose $\pi = 2aq \vec{e}_x$; $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$



□ 5.2

$$\vec{E} = - \text{grad } V \quad ; \quad E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} \quad ; \quad E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \quad ; \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

On peut écrire aussi pour un dipôle placé en P : $\vec{E} (M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \overrightarrow{PM}) \overrightarrow{PM}}{PM^5} - \frac{\vec{p}}{PM^3} \right]$

□ 5.3.

Les équipotentielles sont données par :

$$p \cos \theta / r^2 = \text{cte} \quad \text{soit} \quad r^2 = r_0^2 \cdot \cos \theta$$

L'équipotentielle $V = 0$ est le plan médiateur de A_1A_2 .

Les lignes de champ sont définies par \vec{E} parallèle à $d\vec{l}$.

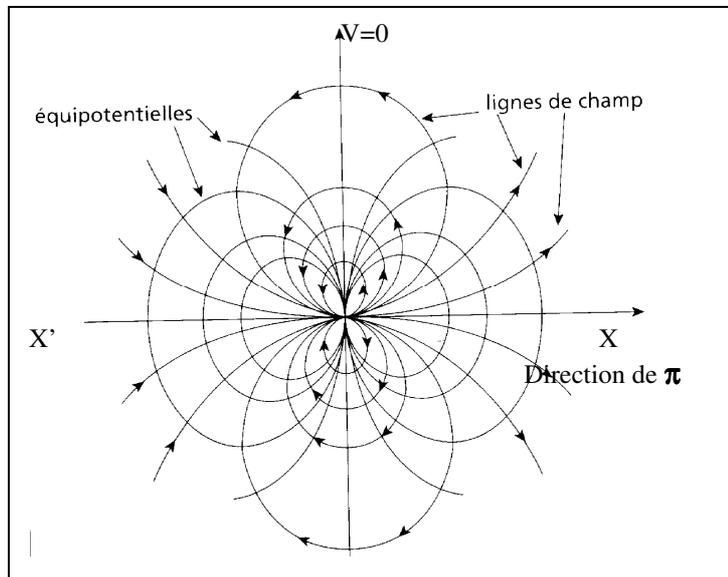
Compte tenu de la symétrie, on se place en coordonnées polaires.

$$d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta \quad ; \quad \vec{E} \wedge d\vec{l} = 0$$

$$dr / E_r = r d\theta / E_\theta \quad \text{soit} \quad dr/r = 2 \cotan \theta d\theta$$

$$\ln r = \ln \sin^2 \theta + \text{cte} \quad \text{soit} \quad r = r_0 \sin^2 \theta$$

Remarquons que les lignes de champ semblent revenir sur elle-mêmes au voisinage de O : une ligne de champ ne peut être fermée sur elle-même. Mais il faut souligner qu'au voisinage de O, les calculs ne sont plus valables car a/r n'est plus un infiniment petit.



6. Molécule polaire

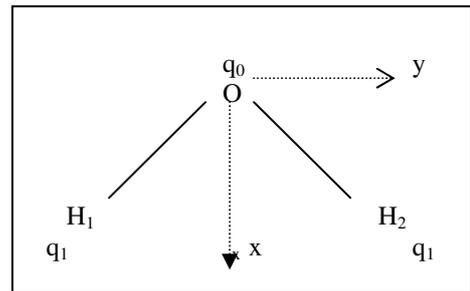
□ 6.1.

Soit O' un autre point origine

$$\boldsymbol{\pi} = q_i \sum_i q_i \overline{OM} = \sum_i q_i (\overline{OO'} + \overline{O'M}) \quad \text{or} \quad \sum_i q_i = 0$$

donc
$$\boldsymbol{\pi} = \sum_i q_i \overline{O'M}$$

Le moment dipolaire ne dépend donc pas de l'origine O choisie pour le définir .



$$\boldsymbol{\pi} = 4qa \cos \alpha/2 \vec{e}_x \quad ; \quad p = 6,23 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$$

□ 6.2.1.

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}(\vec{r}) + q_1(H_1) \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_1) + q_1(H_2) \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_2)$$

□ 6.2.2.

On se propose de redémontrer que $\vec{F} = (\boldsymbol{\pi} \cdot \text{grad}) \vec{E}(\text{O})$

$$F_x = q_0 E_x(x,y,z) + q_1 E_x(x + \Delta x_1, y + \Delta y_1, z + \Delta z_1) + q_1 E_x(x + \Delta x_2, y + \Delta y_2, z + \Delta z_2)$$

$$\text{Or : } E_x(x + \Delta x_1, y + \Delta y_1, z + \Delta z_1) \approx E_x(x, y, z) + \Delta x_1 \frac{\partial E_x}{\partial x} + \Delta y_1 \frac{\partial E_x}{\partial y} + \Delta z_1 \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Avec $q_0 E_x(x,y,z) + 2 q_1 E_x(x,y,z) = 0$ il vient :

$$F_x = (q_1 \Delta x_1 + q_1 \Delta x_2) \frac{\partial E_x}{\partial x} + (q_1 \Delta y_1 + q_1 \Delta y_2) \frac{\partial E_x}{\partial y} + (q_1 \Delta z_1 + q_1 \Delta z_2) \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\text{Or } \boldsymbol{\pi} = q_1 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad ; \quad p_x = (q_1 \Delta x_1 + q_1 \Delta x_2) \quad ; \quad p_y = (q_1 \Delta y_1 + q_1 \Delta y_2) \quad ; \quad p_z = (q_1 \Delta z_1 + q_1 \Delta z_2)$$

$$\text{Donc } F_x = (\boldsymbol{\pi} \cdot \text{grad}) E_x$$

□ 6.2.3.

Il en est de même pour les deux autres composantes :

$$F_y = (\boldsymbol{\pi} \cdot \text{grad}) E_y \quad ; \quad F_z = (\boldsymbol{\pi} \cdot \text{grad}) E_z$$

$$\text{Donc } \vec{F} = (\boldsymbol{\pi} \cdot \text{grad}) \vec{E} \quad ; \quad F_x = p_x \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$F_x = p_x \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial (\boldsymbol{\pi} \cdot \vec{E})}{\partial x} \quad \text{car } p_x, p_y \text{ et } p_z \text{ sont indépendants de } x, y, z .$$

$$\vec{F} = \vec{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

L'énergie potentielle du dipôle est donc d'après : $\vec{F} = - \vec{\text{grad}} U$; $U = - \vec{p} \cdot \vec{E}$

Remarquons aussi que le dipôle est soumis à un moment : $\vec{M}_M = \vec{p} \wedge \vec{E}(M)$

Le dipôle soumis à cette seule action mécanique (\vec{F} ; $\vec{M}_M = \vec{p} \wedge \vec{E}(M)$) s'oriente dans le champ électrique de façon que π soit parallèle à \vec{E} et se déplace dans le sens et la direction définies par le gradient de U.

En un point M : $\theta = (\pi, \vec{E})$, $U = -p.E \cos \theta$

$\theta = 0$ équilibre stable ; minimum de l'énergie potentielle $U = -p.E$

$\theta = \pi$ équilibre instable : $U = p.E$

□ 6.3.1.

$$U = - \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

□ 6.3.2.

Pour θ_1 fixé : $\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0$ $\tan \theta_2 = \frac{1}{2} \tan \theta_1$ $\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0$ $\tan \theta_1 = \frac{1}{2} \tan \theta_2$

$\theta_1 = 0$; $\theta_2 = 0$

$\theta_1 = \pi/4$; $\theta_2 = 0,46 \text{ rad} = 26,6^\circ$

$\theta_1 = \pi/2$; $\theta_2 = 90^\circ$

□ 6.3.3.

Cette énergie est minimale pour $\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = -3K \cos \theta_1 \sin \theta_{2c} = 0$

$\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_{2c} = \pi/2$ $U = -p^2 / (4 \pi \epsilon_0 r^3)$ ou $\theta_{2c} = 0$ et $\theta_1 = 0$ $U = -2p^2 / (4 \pi \epsilon_0 r^3)$

Donc le minimum est pour $\theta_{2c} = 0$ et $\theta_1 = 0$.

\vec{F} (exercée sur π_2 par π_1) = $-\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r = -\frac{6p^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \vec{e}_r$; \vec{e}_r direction de $\overline{O_1 O_2}$

□ 6.3.4.

$p = 6,23 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$; $U = -2,59 \cdot 10^{-20} \text{ J} = -0,161 \text{ eV} = -115,6 \text{ kJ.mol}^{-1}$

Bibliographie :

H prépas Electromagnétisme première année MPSI-PCSI (Hachette)

Electromagnétisme Pérez (Masson)

Electromagnétisme première année Gié/Sarmant (Tec-Doc Lavoisier)

Electricité Bruhat (Masson)

II. Electromagnétisme

1. Equations de Maxwell

□ 1.1.

Dans le cas général, le milieu conducteur contient plusieurs types de porteurs (électrons, trous, ions ...). On définit pour les porteurs de type i et de charge q_i , une vitesse moyenne ou vitesse d'ensemble \vec{v}_i et une densité volumique n_i . La contribution de ces porteurs à la densité de courant volumique \vec{j} est alors $n_i \cdot q_i \vec{v}_i$. Le courant volumique total s'obtient par sommation sur les différents types de porteurs :

$$\vec{j} = \sum n_i \cdot q_i \vec{v}_i$$

Dans le cas d'un seul type de porteurs (cas des métaux, par exemple), on peut écrire, en introduisant la densité volumique de charges mobiles $\rho_m = nq$:

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

L'intensité du courant électrique traversant une surface S est égale au flux du vecteur densité de courants volumiques à travers cette surface :

$$I(S, t) = \iint_S \overline{j(M, t) \cdot \vec{n}} dS$$

□ 1.2.

Le théorème de Gauss sous forme intégrale s'écrit :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad \iiint_V \text{div} \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau.$$

Cette relation étant vraie pour tout V alors : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

□ 1.3.

Soit un volume V contenant une densité de charges totale ρ (attention $\rho \neq \rho_{\text{mobile}}$)

$$Q(V, t) = \iiint_V \rho(M, t) d\tau$$

Le courant I sortant de la surface S délimitant le volume V est tel que $I = -\frac{dQ(V, t)}{dt} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$

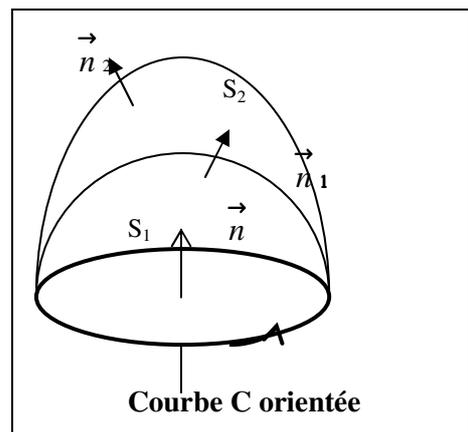
Or $\frac{dQ(V, t)}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$ d'où l'équation locale $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

□ 1.4.

La conservation du flux s'écrit : le flux de \vec{B} à travers toute surface S_i s'appuyant sur une courbe C est le même ; les surfaces sont orientées (règle du tire-bouchon) compatiblement par un sens défini sur C .

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS = cte$$

Or :



$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{B} d\tau = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \text{ avec } \vec{n} \text{ orientée de l'intérieur vers l'extérieur.}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}_2 dS - \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}_1 dS = 0$$

□ 1.5.

Dans l'approximation quasi-stationnaire, le théorème d'Ampère s'applique.

La circulation du champ magnétique \vec{B} sur une courbe C est égale au flux de la densité de courant \vec{j} à travers une surface s'appuyant sur C, multiplié par μ_0 .

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \iint_{S(C)} \operatorname{rot} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \iint_{S(C)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

Cette relation étant vérifiée pour toute courbe C et toute surface S(C), on en déduit l'équation de Maxwell-Ampère : $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

□ 1.6.

Loi de Faraday, en régime variable pour un circuit fixe (cas de Neumann) :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{S(C)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \right)$$

$$\text{soit } \iint_{S(C)} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = -\iint_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \text{ soit } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

□ 1.7. Prenons la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère : $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \mu_0 \operatorname{div} (\vec{j}). \text{ Or } \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{B}) = 0 \text{ donc } \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Ce résultat est incompatible en régime variable avec la conservation de la charge : $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Si on admet l'équation de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Gauss ($\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$) alors :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 ;$$

$$\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ est donc le champ d'un rotationnel : } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

□ 2.1. Courant de conduction : $\vec{j} = n [q_+ \vec{\omega}_+ + q_- \vec{\omega}_-]$

□ 2.2.

Du fait de l'agitation thermique, on peut admettre que, malgré les interactions, l'orientation des dipôles est aléatoire dans un volume macroscopique : la valeur moyenne du moment dipolaire \vec{P} est donc nulle.

$$d\vec{P} = n \langle d\pi \rangle = n [q_+ d\vec{\ell}_+ + q_- d\vec{\ell}_-] \text{ d'où } \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = n (q_+ \vec{\omega}_+ + q_- \vec{\omega}_-) = \vec{j}_{\text{pol}}.$$

Les vitesses sont des vitesses moyennes des centres + et - des charges.

3. Equations de Maxwell

□ 3.1.

$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r}$. Le milieu est neutre : $\rho = 0$ donc $\text{div } \vec{E} = 0$.

$\text{div } \vec{B} = 0$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{\text{pol}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

□ 3.2.

$$\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} \quad \text{d'où, avec } \text{div } \vec{E} = 0 : \Delta \vec{E} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\text{De même pour } \vec{B} : \Delta \vec{B} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

4. Propagation des ondes électromagnétiques dans l'eau

□ 4.1.

On utilise le formalisme associé aux ondes planes monochromatiques : $\vec{V} = i\vec{k}$; $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$

$$\text{rot } \vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E} \quad ; \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B} \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \quad \text{soit } \vec{B} = \frac{k}{\omega} E \vec{e}_y$$

□ 4.2.

L'équation de dispersion s'écrit en vérifiant l'équation de propagation de \vec{E} .

$$-k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2 \vec{E} \quad k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\text{Si } \epsilon_r \text{ est réel alors } V_\phi = \frac{\omega}{k} \quad ; \quad V_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \text{d'où } n = \sqrt{\epsilon_r}$$

A.N :

$$\epsilon_r = 1,8 \quad ; \quad V_\phi = 2,24 \cdot 10^5 \text{ kms}^{-1} \quad ; \quad n = 1,34 \quad ; \quad \lambda = 470 \text{ nm} \quad (\text{domaine des ondes lumineuses}).$$

$$\epsilon_r = 81 \quad ; \quad V_\phi = 3,33 \cdot 10^5 \text{ kms}^{-1} \quad ; \quad n = 9 \quad ; \quad \lambda = 18,8 \text{ km} \quad (\text{domaine des ondes hertziennes}).$$

□ 4.3.

Milieu absorbant :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \exp(-k''z) \expi(k'z - \omega t) \quad \vec{E} = E_0 \vec{e}_x \exp(-k''z) \cos(k'z - \omega t)$$

$$\vec{B} = E_0 \vec{e}_y \frac{(k' + ik'')}{\omega} \exp(-k''z) \expi(k'z - \omega t)$$

$$\text{soit } \vec{B} = E_0 \vec{e}_y \exp(-k''z) [(k'/\omega) \cos(k'z - \omega t) - (k''/\omega) \sin(k'z - \omega t)]$$

□ 4.4.

Le vecteur de Poynting est défini par : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ avec les champs écrits en valeur réelle.

La valeur moyenne peut être calculée directement avec les expressions complexes :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Réelle} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

$$\text{soit } \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k'}{2\mu_0 \omega} \exp(-2k''z) \vec{e}_z$$

On peut définir une longueur de pénétration par $\delta = 1/2 k''$.

A.N : $\delta = 5 \text{ mm}$

La puissance de l'onde décroît très vite avec la profondeur de l'eau ; la communication par onde électromagnétique avec un sous-marin en plongée est pratiquement impossible.

Bibliographie

Hprépas Electromagnétisme Première année et Deuxième année
 Electromagnétisme TEC-DOC (Gié-Sarmant)
 Electromagnétisme Première année JP Faroux/J .Renault Dunod
 Electromagnétisme Paul Roux Ellipses
 Electromagnétisme A.Maruani/D.Roux Masson
 Electromagnétisme D.Mauras Puf

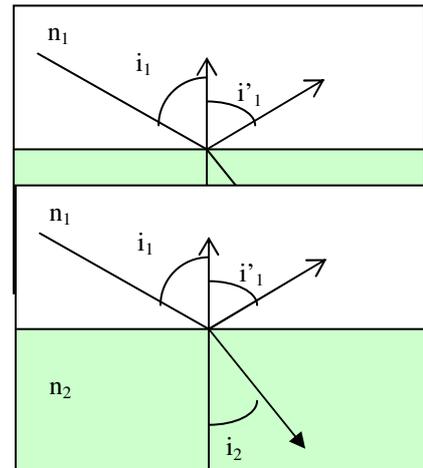
III. Optique

□ 1.1.

Première loi : Le rayon réfracté, le rayon incident et la normale au dioptre sont dans un même plan (plan d'incidence).

Deuxième loi : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

Remarquons qu'il y a aussi réflexion partielle.



□ 1.2.

L'indice d'un milieu est le rapport de la vitesse c de la lumière dans le vide à la vitesse v de la lumière dans ce milieu, pour une onde de

fréquence donnée : $n = \frac{c}{v}$

□ 1.3.

$$\lambda = v \cdot T = v/\nu \quad \lambda_{\text{vide}} = 450 \text{ nm} \quad \lambda_{\text{eau}} = c/n \nu = 337 \text{ nm}$$

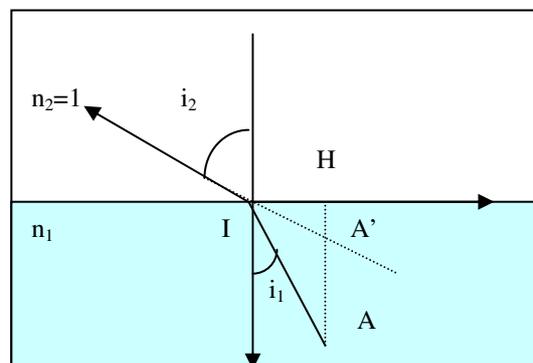
□ 1.4.

Lorsque la lumière passe d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent, il existe un angle limite ;

si $n_1 > n_2$ alors $i_2 > i_1$; l'angle limite $i_1 = \ell$ correspond à $i_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \ell = n_2/n_1$

Dans le cas du passage de l'eau à l'air : $\ell = 48,5^\circ$

Pour $i_1 > \ell$, il y a réflexion totale.



□ 1.5.

L'objet est en $A(x,y)$. Le rayon AH, normal à la surface du dioptre, n'est pas dévié. Soit $A'(x,y')$ l'intersection des deux rayons émergents issus de A après réfraction respectivement en I et H :

$$\tan i_1 = x/y ; \quad \tan i_2 = x/y'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\tan i_1}{\tan i_2} = \frac{1 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}$$

Il y a stigmatisme rigoureux pour le couple de points (A, A') si tous les rayons émergents (ou leurs prolongements) provenant de A passent par le point A'.

Pour le dioptre l'ordonnée y' de A' dépend de i₁ donc il n'y a pas stigmatisme rigoureux.

Pour des petits angles i₁ et i₂ alors : y'/y = 1/n₁ car cos i₁ ≈ 1 ≈ cos i₂.

La position de A' ne dépend plus de i₁ donc du rayon issu de A : il y a stigmatisme approché pour un observateur regardant normalement à la surface du dioptre.

L'image est déformée si un objet de taille conséquente est situé dans l'eau car selon l'angle d'observation l'image A' de chaque point de l'objet dépend de l'angle d'observation.

□ 1.6

Le plongeur observe à travers son masque ; ses yeux sont dans l'air (milieu n₂ = 1). On néglige l'influence du masque (lame à faces parallèles d'épaisseur négligeable) donc y'/y = 1/n.

y' = 0,75 m.

L'image du poisson est rapprochée ; elle est vue sous un plus grand angle : le poisson semble plus gros !!!

2. L'eau, le soleil et la dispersion

2.1. Phénomène élémentaire

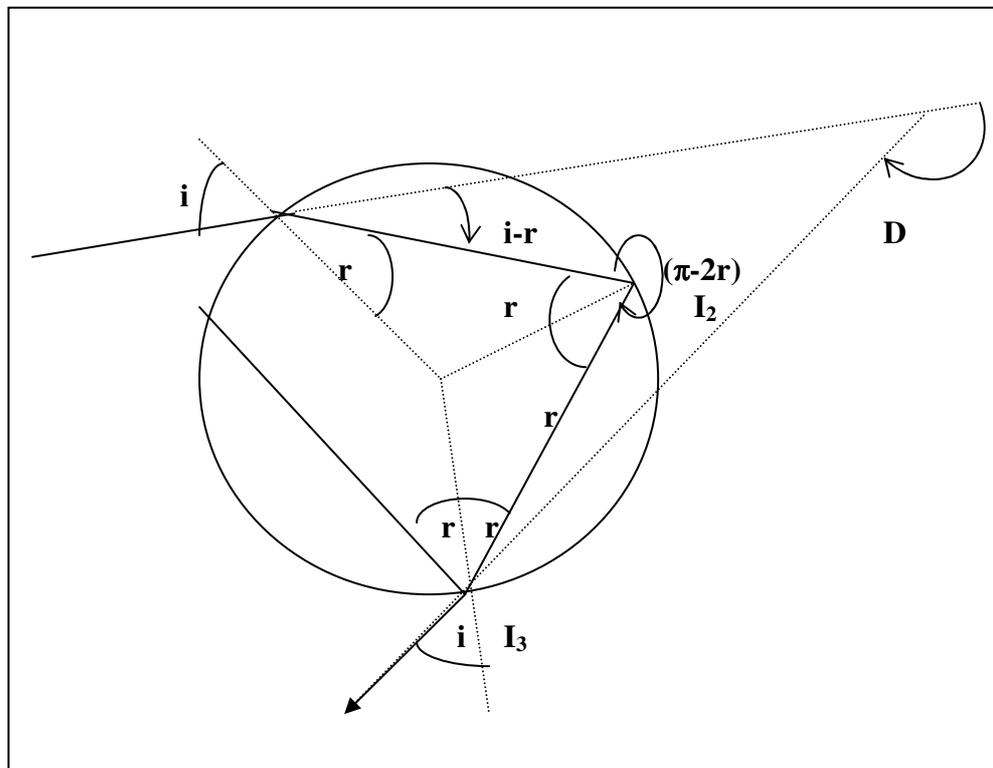
□ 2.1.1.

A l'entrée comme à la sortie la déviation est : D_{refr} = i - r

A chaque réflexion : D_{reflexion} = π - 2r

donc pour une seule réflexion : D = 2(i - r) + π - 2r = π + 2i - 4r

Ce n'est pas le D indiqué dans l'énoncé qui n'est pas orienté.



□ 2.1.2.

Si il y a p réflexions alors :

$$D_p = 2(i-r) + p(\pi-2r) = p\pi - 2(p+1)r + 2i$$

□ 2.1.3. Déviation minimale : $\frac{dD_p}{di} = 2 \left[1 - (p+1) \frac{dr}{di} \right] = 0$; $\cos i = n \cos r$

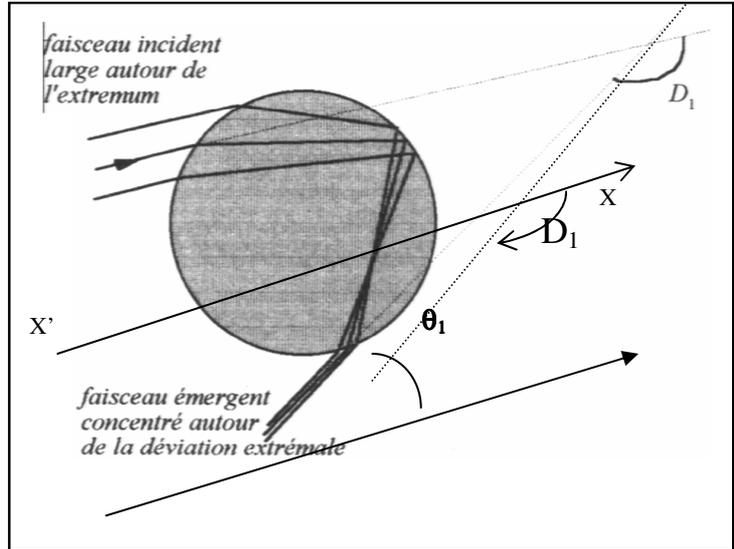
Soit $\frac{di}{dr} = \frac{n \cos r_0}{\cos i_0} = p + 1$

On obtient avec $\sin i_0 = n \sin r_0$:

$$\sin i_0 = \left[\frac{(p+1)^2 - n^2}{(p+1)^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

ce terme est inférieur à 1 si $p > n-1 = 0,33$
Il y aura extremum de déviation dès une première réflexion.

p	i ₀	r ₀	D _{mi}
1	59,29°	40,09°	138,22°
2	71,78°	45,35°	231,46°
3	76,80°	46,83°	318,96°



□ 2.1.4.

Si la sphère est éclairée par un faisceau parallèle large, toutes les valeurs de i seront réalisées ; tous les rayons voisins de celui de la déviation extrême auront au second ordre près la même déviation et correspondront donc à une accumulation de lumière dans la direction faisant un angle D_{pmin} avec le faisceau incident.

L'axe X'X est parallèle aux rayons incidents.

Tous les rayons d'incidence i₀ font à la sortie avec l'axe x'x un angle $\varphi = \pi - D$: ils émergent donc de la sphère sur un cône de demi-angle au sommet θ .

p = 1 ; $\theta_1 = 41,78^\circ$ p = 2 ; $\theta_2 = 51,46^\circ$ p = 3 ; $\theta_3 = 41,04^\circ$

Sur les murs et le plafond, on observe des arcs continus : 2 arcs côté source et un arc (p=3) à l'opposé de la source.

L'intensité décroît en fonction de p car à chaque réflexion une partie de l'énergie lumineuse est réfractée.

□ 2.2.1.

Les rayons du Soleil sont tous parallèles et de même inclinaison par rapport au sol.

Considérons les rayons jaunes, correspondant au milieu du spectre ; on admet que le calcul a été fait pour cette longueur d'onde moyenne.

Chaque goutte renvoie des rayons, avec accumulation de lumière, répartis sur un cône de révolution d'axe X'OX (figure2) et de demi-axe θ_1 ou θ_2 pour les deux premières déviations.

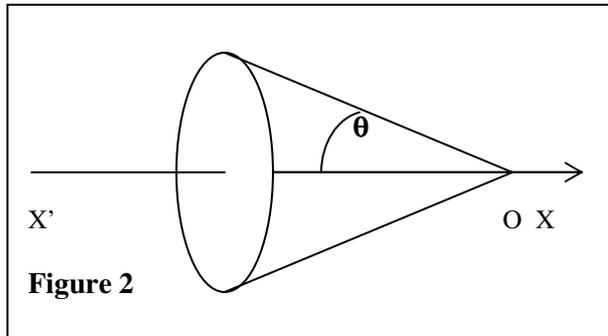


Figure 2

□ 2.2.2.

L'observateur placé en O observera les rayons jaunes réfléchis par toutes les gouttes situées sur un cône de révolution d'axe S'OS (figure 3).

Il verra donc un arc de cercle jaune de rayon angulaire (voir question précédente) $\theta_1 \approx 42^\circ$ et un autre cercle de rayon angulaire $\theta_2 = 51,5^\circ$ dans la partie du ciel opposée au Soleil.

L'arc est centré sur une ligne joignant S à l'observateur et ne sera visible que si la hauteur α du Soleil au-dessus de l'horizon est inférieure à 42° pour le premier arc.

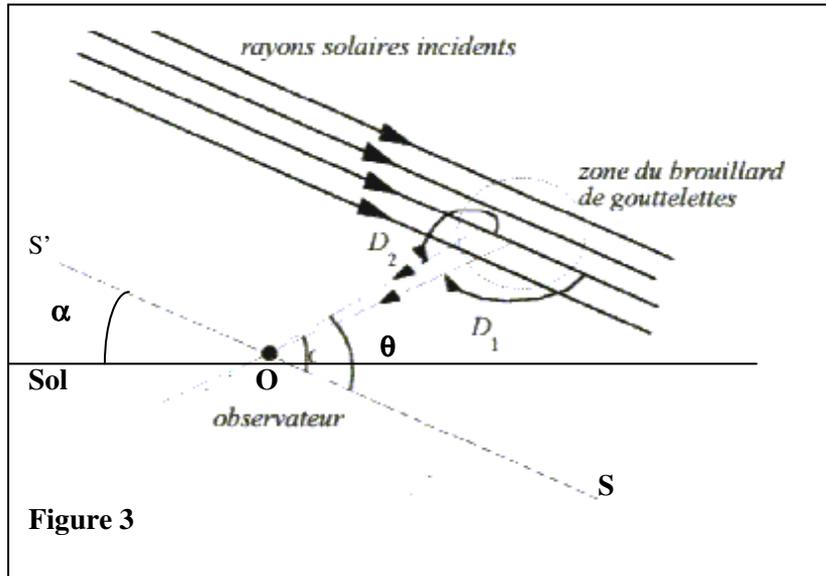
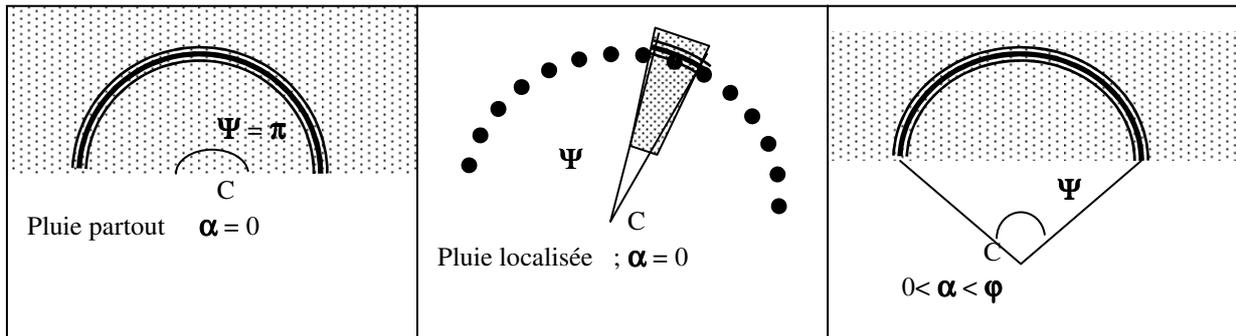


Figure 3

Cet arc n'est visible ni de biais ni de profil ; il apparaît toujours circulaire et de même diamètre apparent ; il n'y a pas de petits ni de grands arcs-en-ciel c'est à dire de petits ou de grands rayons angulaires. Par contre l'étendue de l'arc mesurée par son angle au centre Ψ est liée à la présence ou l'absence de gouttes de pluie ; cet angle est lié à α hauteur du Soleil.

L'intensité lumineuse augmente avec la densité des gouttes de pluie.



Le point culminant de l'arc a pour hauteur : $\beta = \theta - \alpha$ soit $\beta_1 = 26,78^\circ$ pour le premier arc et $\beta_2 = 36,46^\circ$ pour le second arc.

Si $\alpha \rightarrow 0$ (coucher du Soleil), l'arc tend vers la demi-circonférence ; par contre si le Soleil est trop haut pas d'arc possible.

En résumé ciel d'orage à l'Est ; nimbus avec pluie violente et dense , Soleil à l'Ouest pas trop haut sur l'horizon.

□ 2.2.3.

A chaque réflexion dans les gouttelettes, l'intensité diminue ; le contraste est meilleur si l'arc est bas sur l'horizon, le ciel étant moins lumineux. Le premier arc est beaucoup plus lumineux que le second.

Le troisième arc serait plus haut dans le ciel moins intense et avec peu de contraste.

2.3. Dispersion

□ 2.3.1

$$dD_p = 2 di - 2(p+1) dr \quad \text{sini} = n \cdot \text{sin}r \rightarrow \text{cotan } i \cdot di = \text{cotan } r \cdot dr + \frac{dn}{n}$$

$$\text{Par élimination de } dr : dD_p = 2 \left[1 - (p+1) \frac{\tan r}{\tan i} \right] di + 2(p+1) \tan r \cdot \frac{dn}{n}$$

Or, au minimum de déviation $\left(\frac{\partial D_p}{\partial i}\right)_n = 0$ donc $1 - (p+1)\frac{\tan r}{\tan i} = 0$

$$\frac{dD_{pm}}{dn} = 2(p+1)\frac{\tan r}{n} = \frac{2}{n} \tan i \quad ; \quad \frac{dD_{pm}}{dn} = \frac{2}{n} \left(\frac{(p+1)^2 - 1}{n^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

□ 2.3.2

$p=1$ $\Delta D / \Delta n = 2,52$; $r_0 = 40,09^\circ$ $\Delta D_{1m} = 1,44^\circ$
 $p=2$ $\Delta D / \Delta n = 4,55$; $r_0 = 45,35^\circ$ $\Delta D_{1m} = 2,61^\circ$

La dispersion est plus grande pour l'arc 2 que pour l'arc 1.
 La déviation minimale est plus grande pour le violet que pour le rouge.

Arc d'ordre 1 : l'angle d'ouverture du cône est plus faible pour le violet (plus dévié que le rouge).
 $\beta_{V1} = 26,06^\circ$, $\beta_{R1} = 27,5^\circ$

Arc d'ordre 2 : l'angle d'ouverture est plus grand pour le violet que pour le rouge. $\beta_{V2} = 37,76^\circ$ $\beta_{R2} = 35,16^\circ$
 Les couleurs de l'arc-en-ciel sont inversées par rapport au premier arc.

□ 2.3.3

Pour chaque radiation l'arc à une largeur de $0,5^\circ$; chaque couleur empiète sur les couleurs voisines .

Bibliographie :

Arc-en-ciel : Excellent article de R.Jouanisson BUP 809 Décembre 1998 ;
 BUP 778 ; BUP 724

Qu'est-ce que l'optique ? L.Dettwiller Dunod Université

Optique P.Roux Ellipses ; Hprépas Optique

Optique J.P. Faroux /J.Renault Dunod

IV. Thermodynamique

1. Généralités

□ 1.1.

Combustibles des centrales classiques : charbon, fuel, gaz .

Combustible des centrales nucléaires : Uranium enrichi en uranium 235.

Complément pour information

filière	graphite-gaz	P. W. R. (*)	B. W. R. (**)	eau lourde	H. T. R.	surrégénérateur
combustible	uranium naturel	uranium enrichi en ^{235}U	uranium enrichi en ^{235}U	uranium naturel sous forme d'oxyde de ^{239}Pu formé <i>in situ</i>	uranium enrichi et thorium	uranium et plutonium
modérateur	graphite	eau déminéralisée	eau déminéralisée	eau lourde	graphite	
caloporteur	CO_2	eau déminéralisée sous forme liquide ($p = 150 \text{ atm}$)	eau déminéralisée sous forme vapeur ($p = 70 \text{ atm}$)	eau lourde ou liquide organique	hélium	sodium
exemple	Bugey 1	Fessenheim 1 et 2 Bugey 3, 4, 5 (Westinghouse)	General Electric	filière canadienne CANDU	prototype	Phénix et Super-Phénix

□ 1.2.a.

Le chauffage sert à vaporiser l'eau sous une pression donnée et à température constante.

- Chauffage isotherme : apport d'énergie au système sous forme thermique sans variation de température.

- Le chauffage est un transfert énergétique ; l'augmentation de température est une variation d'un paramètre d'état lié à l'agitation thermique.

- Un transfert n'implique pas obligatoirement une variation de température du système : il peut y avoir changement d'état. A l'inverse on peut augmenter la température d'un système sans lui fournir de chaleur (expérience de Mayer par exemple).

Complément :

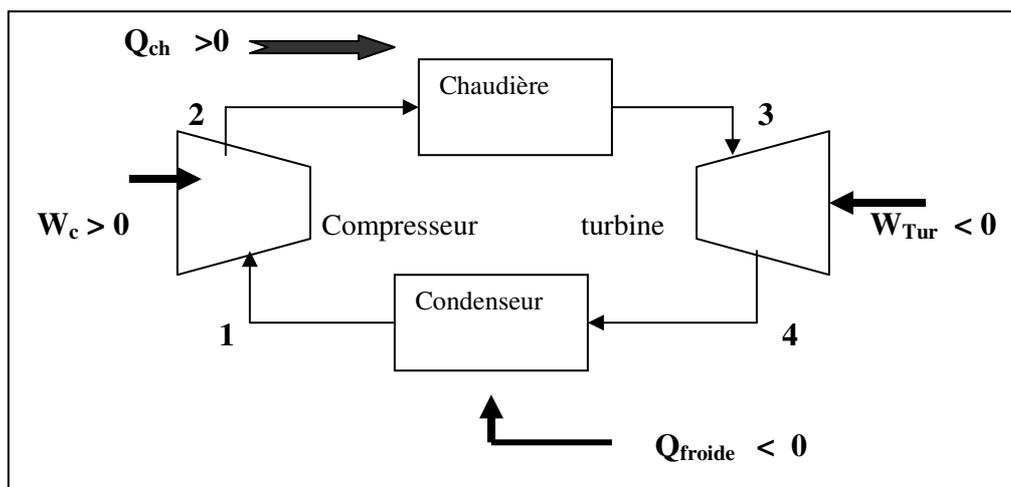
L'augmentation de température d'un système correspond à une variation d'énergie interne du système. Cette variation peut être due à des réactions chimiques, des réactions nucléaires et à différents types de transferts énergétiques : transfert par travail mécanique, transfert par travail électrique, transfert thermique (ou chaleur) par conduction et convection, transfert par rayonnement.

□ 1.2.b.

Le travail W est un transfert d'énergie « ordonné », correspondant au travail de forces définies à l'échelle macroscopique : travail mécanique, travail électrique ...

Le transfert thermique Q correspond à un transfert désordonné, résultant d'interactions microscopiques qui ne correspondent pas à des forces macroscopiques.

□ 1.2.c.



L'énoncé comportait une erreur : W_C représente bien sûr le travail du compresseur.

Les différents termes d'échange (chaleur, travail) sont définis algébriquement et comptés positivement lorsqu'ils sont reçus par le fluide.

L'énergie reçue par l'alternateur provient du travail mécanique fourni par la turbine. Au cours de la détente de la vapeur d'eau dans la turbine, de l'énergie interne de la vapeur est transférée sous forme d'énergie cinétique à la turbine par travail mécanique.

□ 1.2.d.

Dans un référentiel donné, l'énergie totale E d'un système est la somme :

- de son énergie cinétique macroscopique E_K ,
- de son énergie potentielle macroscopique E_p
- de son énergie interne U

$$E = E_K + E_p + U.$$

Cette relation définit macroscopiquement l'énergie interne :

$$U = E - E_K - E_p.$$

E , E_K , E_p et donc U sont des fonctions d'état et s'expriment donc en fonction des paramètres macroscopiques définissant l'état du système.

Du point de vue microscopique, U correspond à la somme des énergies cinétiques des particules constituant le système dans un référentiel où il est macroscopiquement au repos, et de leurs énergies potentielles d'interaction entre elles.

Le premier principe est un principe de conservation : il postule que l'énergie E d'un système isolé se conserve. Pour un système fermé non isolé :

$$\Delta E = W + Q.$$

Dans le cas où l'énergie macroscopique $E_K + E_p$ est constante, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\Delta U = W + Q$$

Le second principe est un principe d'évolution. Il postule l'existence, pour un système à l'équilibre, d'une fonction d'état extensive, l'entropie S . Au cours d'une transformation, la variation d'entropie ΔS du système est la somme d'un terme de création $S_{\text{créée}}$ et d'un terme de transfert (ou d'échange) $S_{\text{transférée}}$:

$$\Delta S = S_{\text{transférée}} + S_{\text{créée}}.$$

- le terme de création $S_{\text{créée}}$ est lié à la réversibilité ou l'irréversibilité de la transformation ; il est positif si la transformation est irréversible ($S_{\text{créée}} > 0$), nul si elle est réversible ($S_{\text{créée}} = 0$).

- le terme de transfert correspond aux échanges avec l'extérieur ; pour un système fermé, il est lié au transfert thermique :

$$S_{\text{transférée}} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_{\text{frontière}}}$$

où $T_{\text{frontière}}$ est la température (supposée ici uniforme, pour simplifier) à laquelle se font les transferts thermiques ;

pour un système ouvert, $S_{\text{transférée}}$ comporte de plus un terme lié au transfert de matière (par convection ou diffusion).

Il découle de ce qui précède que l'entropie d'un système *thermiquement isolé* reste constante au cours d'une évolution réversible et croît au cours d'une évolution irréversible.

Physiquement, l'entropie est liée à l'état de désordre du système.

On peut sans difficulté retrouver, à partir de l'énoncé précédent du second principe, les énoncés classiques de Carnot, Clausius ou Kelvin.

□ **1.2.e.**

Les fonctions d'état (U,S...) sont définies pour chaque état d'équilibre et leur variation entre deux états donnés est indépendante du chemin suivi. S est une fonction d'état

Les grandeurs d'échange ne sont définies qu'entre deux états pour un chemin donné : Q , W , $S_{\text{créée}}$, $S_{\text{transférée}}$ sont des grandeurs d'échange.

2. Etude du cycle de Carnot

□ **2.A.1.**

Au cours d'un cycle , la variation de toute fonction d'état est nulle , quelle que soit la façon (réversible ou irréversible) dont le cycle est décrit .

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 \Rightarrow W + Q = W_t + W_c + Q_f + Q_c = 0$$

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0 \text{ avec } S_{\text{créée}} = 0 \text{ (cycle réversible)} \Rightarrow S_{\text{transférée}} = 0 \Rightarrow \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0.$$

□ **2.A.2**

Les transformations sont adiabatiques ($S_{\text{transférée}} = 0$) et réversibles ($S_{\text{créée}} = 0$) donc $\Delta S = 0$: elles sont isentropiques.

□ **2.A.3**

Le rendement du moteur thermique est : $R_0 = \frac{-W}{Q_c}$

avec $W < 0$ (cycle moteur) et $Q_c > 0$ (chaleur fournie par la source chaude) .

Premier principe : $\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f \Rightarrow R_0 = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c}$

Or d'après le second principe : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$ donc $R_0 = 1 - \frac{T_f}{T_c}$. A.N : $R_0 = 42,6\%$

2.B.1. Equation d'état : $pV = nRT$

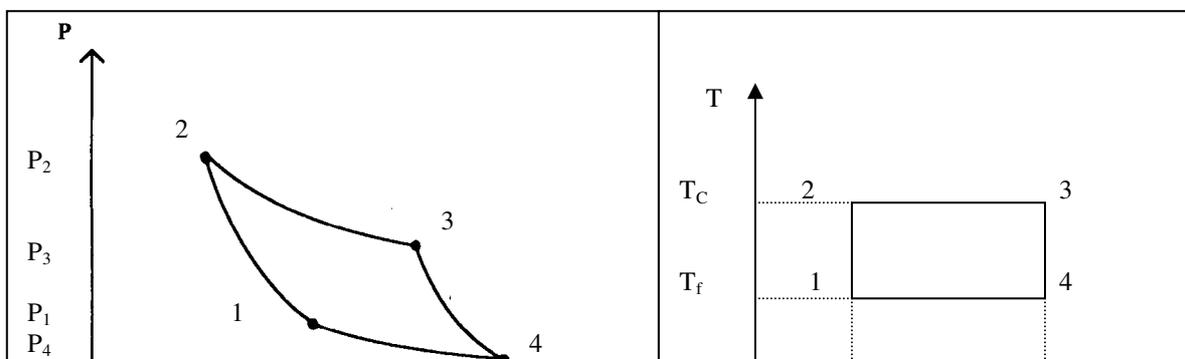
□ **2.B.2.**

Au cours d'une transformation réversible et adiabatique $T \cdot dS = dU + p \cdot dV = C_v dT + p \cdot dV = 0$ (pour une mole)

$$C_v \cdot dT + RT \frac{dV}{V} = 0 \text{ avec : } C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ d'où : } \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 ; T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{constante}$$

Avec $p \cdot V = R \cdot T \rightarrow p \cdot V^{\gamma} = \text{cte}$

□ **2.B.3.**



De 1 à 2 : $p = p_1 \left(\frac{V_1}{V} \right)^\gamma$; $S = S_1$; De 2 à 3 : $p = nRT_C/V$; $T = T_C$

De 3 à 4 : $p = p_3 \left(\frac{V_3}{V} \right)^\gamma$; $S = S_3$; De 4 à 1 : $P = nRT_f/V$; $T = T_f$

□ **2.B.4.**

$$Q = \Delta U - W = n.C_v.T - \int_{V_a}^{V_b} p.dV = -nRT_0 \ln \frac{V_b}{V_a} \quad Q_f = nRT_f \ln \frac{V_4}{V_1} \quad ; \quad Q_C = nRT_C \ln \frac{V_2}{V_3}$$

$$\mathbf{2.B.5.} \quad T_f V_1^{\gamma-1} = T_C V_2^{\gamma-1} \quad ; \quad T_C V_3^{\gamma-1} = T_f V_4^{\gamma-1}$$

□ **2.B.6.**

$$\frac{Q_f}{Q_C} = \frac{T_f}{T_C} \frac{\ln \frac{V_1}{V_4}}{\ln \frac{V_3}{V_2}} \quad \text{or} \quad \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} \quad \text{d'où} \quad \frac{Q_f}{Q_C} = -\frac{T_f}{T_C}$$

□ **2.B.7.** $R_0 = 1 + \frac{Q_f}{Q_C} = 1 - \frac{T_f}{T_C}$; on retrouve la même valeur que précédemment .

□ **2.C.1.a.**

Liquide saturant : Liquide dans les conditions de l'équilibre liquide-vapeur (c'est à dire sous la pression de vapeur saturante $p^* = f(T)$).

Vapeur saturante : vapeur dans les conditions de l'équilibre liquide-vapeur ($T, p^* = f(T)$).

□ **2.C.1.b.**

Fonction enthalpie : $H = U + pV$.

□ **2.C.1.c.**

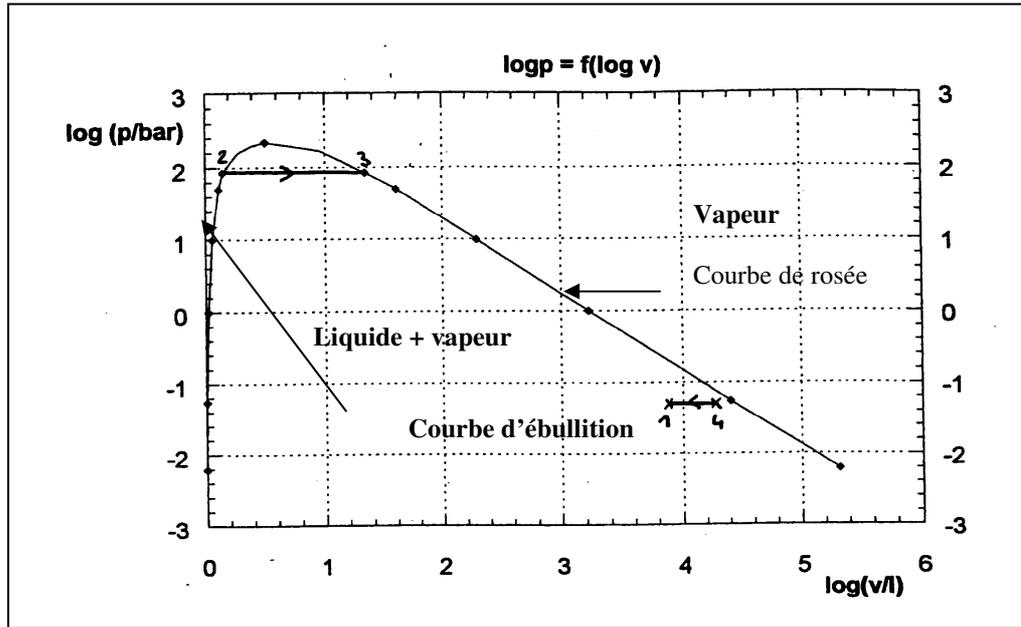
Le volume massique de l'eau liquide varie très peu loin du point critique ; en revanche le volume massique de la vapeur varie beaucoup.

Pour vérifier si la vapeur suit la loi des gaz parfaits , il suffit de faire le produit $p_s.V_s$ et de le comparer à $R.T/M$.

A 264° C :
 $p_s V_s = 2,00 \cdot 10^5$
 $J \cdot kg^{-1} RT/M = 2,48 \cdot 10^5 J \cdot kg^{-1}$;
 l'écart relatif est donc de 20 % environ

□ 2.C.1.d.

V_s varie beaucoup avec p_s : cela permet de représenter sur un même graphe tout le domaine de variation .



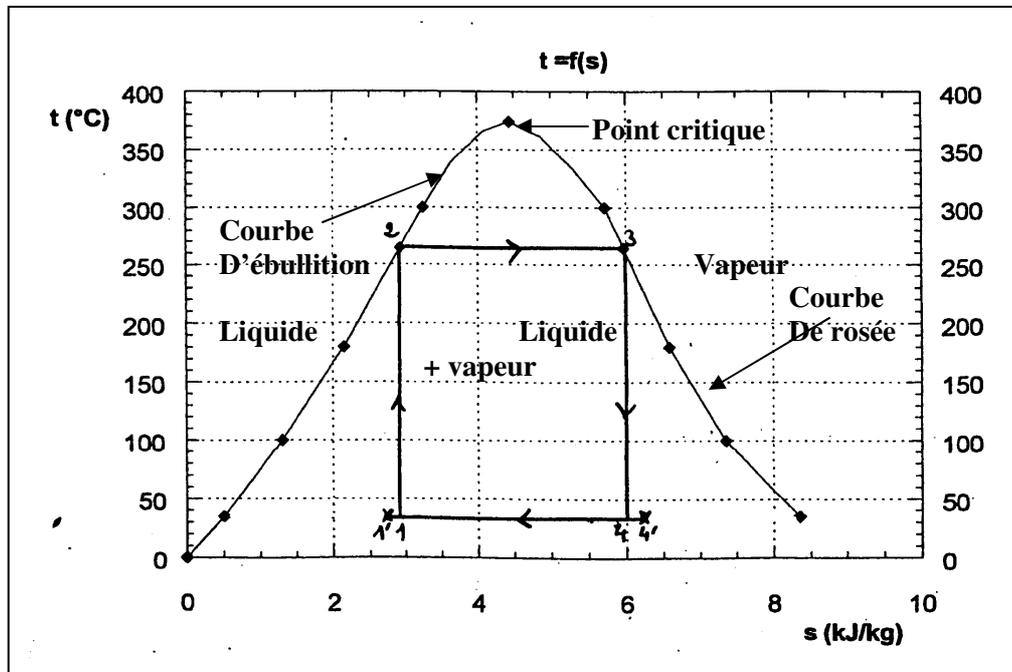
□ 2.C.1.e

C'est la courbe de saturation : le fluide est à la limite de l'équilibre liquide-vapeur.

$$\int_1^2 T \cdot dS = Q_{12}$$

cela correspond au transfert thermique entre l'état 1 et l'état 2.

□ 2.C.1.f.



□ 2.C.1.h.

Pour $T = T_c$, l'isotherme critique présente une inflexion à tangente horizontale dans le diagramme de Clapeyron (V,P). Pour $T > T_c$, l'isotherme est monotone décroissante. Aux hautes températures, elle tend vers une

hyperbole : le fluide hypercritique est alors assimilable à un gaz parfait. Pour $T > T_C$, une augmentation de pression à température constante ne met pas en évidence le passage vapeur-liquide : on ne peut pas distinguer les deux états ...

□ **2.C.1.i.**

La chaleur latente massique de vaporisation est la variation d'enthalpie de l'unité de masse d'une substance pure lors de la transformation de l'état liquide à l'état vapeur à la température T donnée et à la pression d'équilibre

$$p_s = f(T) :$$

$$L_V(T) = h_V(T, p_s(T)) - h_L(T, p_s(T)) .$$

$$L_V(35^\circ\text{C}) = 2425 \text{ kJ.kg}^{-1} ; \quad L_V(264^\circ\text{C}) = 1633 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

□ **2.C.2.a.**

Courbe entropique voir ci-dessus

□ **2.C.2.b.**

$$Q_{23} = L_V(264^\circ\text{C})$$

□ **2.C.2.c.**

Soit x le titre massique en vapeur :

$$\text{Pour l'unité de masse : } S = x.S_V + (1-x) S_L ; \quad x = \frac{S - S_L}{S_V - S_L} ; \text{ c'est le théorème des moments.}$$

$$\text{A.N : } x_1 = 0,31 ; \quad x_2 = 0 ; \quad x_3 = 1 ; \quad x_4 = 0,70 .$$

□ **2.C.2.d.**

La variance est le nombre de paramètres intensifs que l'on peut faire varier indépendamment sans rompre les équilibres réalisés dans le système .

$$V = N - r + 2 - \phi$$

N corps dans ϕ phases ; 2 variables intensives (P et T) , r relations (chimique ou relation particulière)

$$\text{Pour un corps pur : } V = 3 - \phi$$

Monophasé : $v = 2$; on peut se donner T et P quelconques .

Diphasé : $V = 1$; p et T sont liées ; si on choisit p alors T est fixée.

Triphasé : $V = 0$ P et T sont imposées (point triple).

□ **2.C.2.e.**

$$P_1 = P_3 \quad \text{et} \quad P_4 = P_1 .$$

La pression est constante puisque la température est constante ; le système est diphasé.

□ **2.C.2.f.**

$$V_1 = x_1 V_V + (1-x_1) V_L ; \quad V_L = 7905 \text{ L} ; \quad \log V_1 = 3,90$$

$$V_4 = x_4 V_V + (1-x_4) V_L ; \quad V_L = 17850 \text{ L} ; \quad \log V_4 = 4,25$$

□ **2.C.2g.**

Voir figure point 1 et 4 sur le diagramme de Clapeyron

□ **2.C.3.**

$$Q_f = T_f(S_1 - S_4) = -955 \text{ kJ.kg}^{-1} \quad Q_C = T_C(S_3 - S_2) = 1638 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$$R_0 = 1 + Q_f/Q_C = 42,6 \%$$

□ **3.1.**

$$\Delta S_{\text{cycle}} = Q_f/T_f + Q_C/T_C + S_{\text{créée}} = 0 \Rightarrow R \leq R_0 = 1 - T_f/T_C$$

□ **3.2.**

On peut prendre arbitrairement les points 1' et 4' ; par exemple $S'_4 = 6,25 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $S'_1 = 2,75 \text{ kJ.kg}^{-1}$
 $Q_f = -1078 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

□ 3.3

$R \approx 34,2\%$.

Bibliographie

Thermodynamique C.Maître.Collection Sup Maruani (Masson)

Thermodynamique P.Roux/J.R.Seigne ;Ellipses

Thermodynamique C.Frère/P.Krempf :Ellipses

Hpépas Thermodynamique Brébec... Hachette

Thermodynamique S.Olivier TEC-DOC

Thermodynamique J.P.Pérez /Romulus Masson

Thermodynamique Bruhat Masson