

# Partie à dominante physique

Un nouveau système international d'unités fondé sur les concepts fondamentaux de la physique

(Corrigé)

## Principes généraux de l'expérience

1. **Le texte explique comment déterminer  $k_B T$  à partir de résonances acoustique et électromagnétique. Définir le concept de résonance en physique. Décrire deux expériences, dans deux domaines distincts de la physique, permettant de l'illustrer.**

Lorsque on soumet un système à une excitation périodique, une résonance se manifeste par un maximum de la réponse du système en fonction de la fréquence excitatrice. C'est la signature de l'existence en l'absence d'excitation d'un mode d'oscillation propre du système. L'écart entre la fréquence excitatrice et la fréquence propre s'accroît avec l'amortissement.

Quelques exemples : balançoire, corde de Melde, résonance dans des oscillateurs harmoniques amortis en régime forcé (circuits électriques RLC ou mécaniques : amortisseurs), résonance acoustique dans les tuyaux, résonance magnétique nucléaire...

Résonance dans un circuit RLC : on met en série un générateur basses fréquences (GBF), une résistance, un condensateur et une bobine. On mesure la tension aux bornes du condensateur en faisant varier la fréquence du GBF. Selon la valeur de la résistance, on obtient une résonance plus ou moins marquée : plus la résistance (et donc la dissipation d'énergie par effet Joule dans le circuit) est faible, plus la tension présentera en fonction de la fréquence un pic marqué autour de la fréquence de résonance. On peut quantifier l'acuité de la résonance en introduisant le facteur de qualité, défini comme le rapport de la fréquence de résonance sur la largeur de la bande passante à -3 dB.

Résonance dans une corde : l'expérience de Melde consiste à exciter avec une lame vibrante de fréquence variable l'extrémité d'une corde tendue. On observe pour certaines fréquences l'apparition de fuseaux le long de la corde, présentant une alternance de noeuds de vibration où la corde est immobile et de ventres où la vibration est maximale. Ces fréquences sont multiples d'une fréquence fondamentale.

2. **L'AGT utilise le même montage expérimental pour faire des mesures acoustiques et électromagnétiques, ce qu'illustre la similitude des relations (8) et (9). Les ondes acoustiques et électromagnétiques demeurent cependant fondamentalement de natures différentes. Donner quelques éléments qui les distinguent aux yeux d'un physicien.**

La lumière est une onde électromagnétique, c'est-à-dire la propagation simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique qui oscillent. Les champs sont transverses par rapport à la direction de propagation. Il n'y a pas besoin de milieu matériel pour assurer leur propagation. La célérité de l'onde dans le vide est indépendante du référentiel de mesure, de l'émetteur, du récepteur etc.

Le son est une onde acoustique, c'est-à-dire la propagation d'une variation de pression. L'onde est longitudinale, c'est-à-dire que ces variations se produisent le long de la direction de propagation. Elle nécessite un milieu matériel et la célérité de l'onde par rapport au récepteur peut dépendre des conditions de propagation : ainsi on va ajouter à la vitesse du son dans l'air immobile la vitesse du vent pour estimer la vitesse du son par rapport au sol lorsque l'onde acoustique se propage dans la direction du vent.

3. **À partir des informations contenues dans le texte, expliciter en une dizaine de lignes le principe de la détermination de  $k_B T$  par la méthode AGT. On précisera l'ensemble des étapes et des mesures nécessaires. Discuter la contribution des incertitudes associées à l'incertitude globale sur la valeur de  $k_B T$ .**

Il s'agit d'exploiter dans la limite des très basses pressions la relation (7) qui existe entre la vitesse du son  $u$  dans un gaz, la température  $T$  et la pression  $P$ . Cette relation fait aussi intervenir la masse  $m$  des molécules ou atomes du gaz étudié et exige de déterminer expérimentalement ou théoriquement des coefficients qui dépendent de la température ( $A_1, A_2...$ ). Pour déterminer avec précision la vitesse du son  $u$ , on passe par des mesures de résonance acoustique en cavité.

On procède alors ainsi :

- mesure et contrôle de la température  $T$  et de la pression  $P$  ;
- mesure des fréquences  $f_a$  de résonance acoustique au sein d'une cavité sphérique, pour  $T$  et  $P$  fixées ;
- mesure des fréquences  $f_m$  de résonance électromagnétique au sein de la même cavité, pour les mêmes valeurs de  $T$  et  $P$ . Cette double mesure (acoustique et électromagnétique) permet en effet de s'affranchir de la détermination précise du volume de la cavité.

L'estimation la vitesse du son à partir de ces fréquences est aisée dans le cas idéal d'un gaz parfait dans une cavité parfaitement sphérique. Comme cela n'est pas le cas, on doit corriger les écarts à l'idéalité et à la sphéricité :

- calcul et estimation des écarts de fréquences  $\Delta f_a$  et  $\Delta f_m$  dues à la non-idéalité du fluide et de la paroi (viscosité, déformation de la cavité avec la pression, pertes thermiques...). On n'a pas forcément une idée de l'incertitude sur la détermination de ces écarts mais il est précisé que le volume de la cavité peut être déterminé par la méthode électromagnétique à  $10^{-6}$  près (même précision que la méthode volumétrique) ;

- calcul des nouveaux zéros des modes propres sachant que la cavité n'est pas parfaitement sphérique. Incertitude citée :  $2,5 \times 10^{-7}$ .

Enfin, on a besoin de mesurer la masse molaire du gaz concerné. Incertitude citée :  $< 1 \times 10^{-6}$ .

Le texte suggère que l'on effectue une série de mesures en faisant varier  $P$  et que l'on fait l'extraction à pression nulle. Il semble cependant plus efficace d'utiliser le développement du Viriel acoustique au second ordre, donc de procéder à un ajustement des données avec une parabole ce qui contribue à une incertitude  $< 1 \times 10^{-6}$ .

Comme on doit sommer plusieurs incertitudes qui sont typiquement de l'ordre de  $\times 10^{-6}$  pour les plus élevées, on obtient une incertitude totale de quelques ppm, comme l'illustre la figure 2. La mesure LNE-17 atteint cependant une incertitude de 1 ppm.

4. **L'unité de température est définie aujourd'hui à partir du point triple de l'eau, fixé à 273,16 K. Donner quelques arguments qui justifient ce choix. Préciser en quoi cette définition est problématique du point de vue métrologique.**

On définit le Kelvin comme  $1/273,16$  la température du point triple de l'eau. L'avantage est que, pour un corps pur, il n'existe qu'un seul point triple où coexistent vapeur, liquide et solide. Pression et température sont alors fixés (règle des phases). Il suffit donc de se mettre dans les conditions expérimentales d'observer les trois phases. L'eau est un choix naturel compte tenu de son abondance et d'un point triple facilement atteignable expérimentalement. En revanche, cela demeure un artefact, un choix humain conventionnel lié à de la matière. Par ailleurs, se pose le problème de la pureté de l'eau dans laquelle peuvent se trouver des ions en solution ou des gaz dissous et qui font donc bouger le point triple.

5. **Actuellement, on ne sait pas mesurer la température du point triple de l'eau  $T_{\text{TPW}}$  avec une incertitude meilleure que  $100 \mu\text{K}$ . À partir des résultats présentés sur la figure (1) et d'une estimation de l'incertitude sur  $k_B T$  au voisinage de  $T_{\text{TPW}}$ , donner un argument pour soutenir la proposition de redéfinir l'unité de température en fixant la valeur de  $k_B$**

Avec  $100 \mu\text{K}$ , on est à une précision relative sur la définition de la température de  $\Delta T/T = 0,4 \times 10^{-6}$ . Si on arrive à avoir une mesure du produit  $k_B T$  du même ordre ou en deça, c'est la mesure de la température qui devient l'étape limitante pour la précision de la mesure de  $k_B$ . Dans ces conditions, on peut fixer sans état d'âme  $k_B$  et toute amélioration des mesures permettra une meilleure mesure de la température elle-même. Sur la figure, on voit que la constante de Boltzmann définie dans le CODATA 2017 (en rouge) a effectivement une précision de cet ordre là.

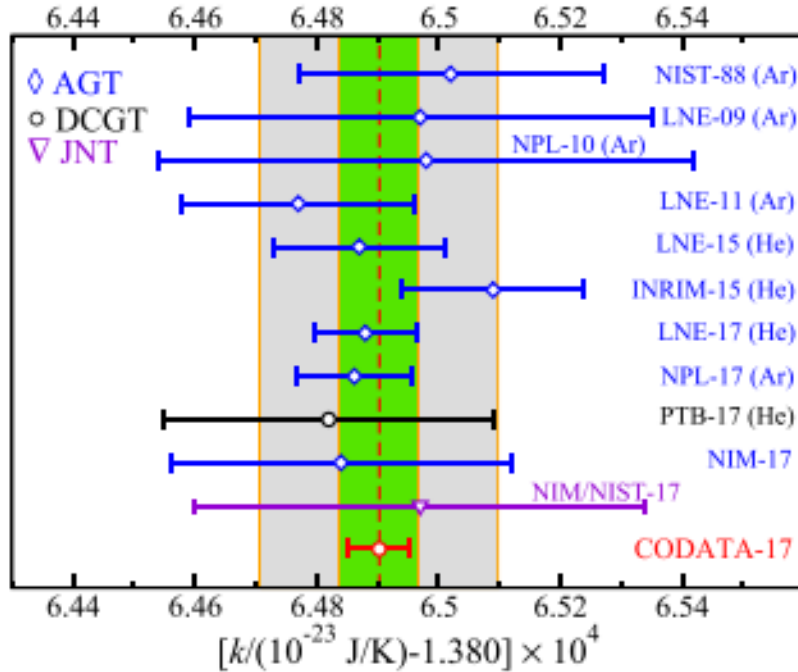


FIGURE 1 – Mesures récentes de  $k_B$  avec leurs incertitudes tirées de l'article *Metrologia* 55 (2018) L13-L16. La valeur (CODATA-17) correspond à la valeur recommandée par le 'Committee On Data For Science and Technology'.

## Acoustique en cavité

On cherche à modéliser les phénomènes observés dans le domaine de l'acoustique linéaire pour un fluide non dissipatif. On note  $p = p(\vec{r}, t)$  la pression du fluide,  $\mu = \mu(\vec{r}, t)$  sa densité (sa masse volumique),  $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$  son champ des vitesses. Les équations de la mécanique des milieux continus sont, en l'absence de tout phénomène dissipatif ou diffusif et en négligeant la gravité,

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{V}) \quad (1)$$

$$\vec{0} = \mu \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] + \vec{\nabla} p$$

### 6. Identifier ces deux équations et donner leur sens physique.

La première équation est la forme locale de la conservation de la masse; la seconde est l'équation d'Euler, qui décrit l'écoulement d'un fluide dans l'approximation du fluide parfait, sans échange de quantité de mouvement par viscosité ni d'énergie par conduction

thermique. Cette dernière est l'analogie de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule fluide que l'on suivrait dans son mouvement (description lagrangienne).

**En acoustique linéaire, on s'intéresse à la propagation de perturbations au sein du fluide autour d'un état d'équilibre homogène et au repos, défini par les grandeurs thermodynamiques  $(P, \rho)$ . On pose donc  $p = P + P_1(\vec{r}, t)$ ,  $\mu = \rho + \rho_1(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{V} = \vec{V}_1(\vec{r}, t)$  et on admet que cette perturbation engendre des transformations adiabatiques réversibles dans le fluide.**

7. Montrer que les équations linéarisées deviennent

$$0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1, \quad (2)$$

$$\vec{0} = \rho \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \vec{\nabla} P_1,$$

Il suffit d'écrire que les grandeurs à l'ordre 0 sont constantes et uniformes et ne conserver dans les produits que les termes du premier ordre.

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{V}) \quad (3)$$

$$0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\rho + \rho_1) \vec{V}_1) \quad (4)$$

$$0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}_1) \quad (5)$$

$$0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1, \quad (6)$$

et

$$\vec{0} = \mu \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] + \vec{\nabla} p \quad (7)$$

$$\vec{0} = (\rho + \rho_1) \left[ \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + (\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_1 \right] + \vec{\nabla} P_1 \quad (8)$$

$$\vec{0} = \rho \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \vec{\nabla} P_1. \quad (9)$$

8. Montrer que  $P_1 = u^2 \rho_1$ , où l'on introduit  $u^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$ ,  $S$  étant l'entropie du fluide à l'équilibre.

Comme le suggère le texte, on fait l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique local : les petites perturbations sont assimilées à des petites variations des grandeurs à l'équilibre c'est-à-dire que  $P_1 \simeq dP$  et  $\rho_1 \simeq d\rho$ . Ces variations sont reliées l'une à l'autre grâce aux différentielles thermodynamiques :  $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S d\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho dS$ . Comme il est précisé que les transformations dues aux perturbations sont adiabatiques et réversibles donc isentropiques ( $S$  constante), la relation précédente se simplifie en  $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S d\rho$  ce qui compte tenu de la définition de la vitesse du son  $u$  conduit à la relation énoncée.

9. **On s'intéresse uniquement à des solutions qui se propagent. Montrer que le champ des vitesses est à rotationnel nul et peut donc s'écrire sous la forme  $\vec{V}_1 = \vec{\nabla} \tilde{\Psi}$  où  $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(\vec{r}, t)$  est appelé potentiel des vitesses. Obtenir et identifier l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\tilde{\Psi}$ . En déduire que  $u$  est la vitesse de propagation des perturbations au sein du fluide.**

En prenant le rotationnel de la deuxième équation du jeu d'équations précédent, on obtient  $\rho \frac{\partial \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} P_1) = \vec{0}$ . On en déduit que  $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}_1 = \vec{0}$ . En effet, l'éventuelle constante d'intégration de la relation précédente serait une fonction des coordonnées d'espace uniquement  $f(\vec{r})$ . Il ne s'agirait donc pas d'une solution qui se propage compte-tenu de son indépendance en temps. Aussi cette constante est elle nécessairement nulle. On en déduit que  $\vec{V}_1$  est irrotationnel (ce qui physiquement signifie qu'il n'est pas possible de créer des tourbillons) donc qu'elle dérive d'un potentiel soit  $\vec{V}_1 = \vec{\nabla} \tilde{\Psi}$ . L'intérêt est d'introduire une grandeur scalaire pour la vitesse.

On en déduit ensuite  $\vec{0} = \rho \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \vec{\nabla} P_1 = \vec{\nabla} \left[ \rho \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} + P_1 \right]$  d'où  $P_1 = -\rho \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t}$ . Là encore il n'y a pas de constante d'intégration qui serait une fonction cette fois ci du temps uniquement  $g(t)$  et qui donc qui ne se propage pas.

On peut alors exprimer  $\rho_1 = \frac{1}{u^2} P_1 = -\frac{\rho}{u^2} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t}$  tandis que  $\vec{V}_1 = \vec{\nabla} \tilde{\Psi}$ . En substituant ces expressions de  $\rho_1$  et de  $\vec{V}_1$  dans la relation  $0 = \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1$ , on obtient  $0 = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \tilde{\Psi})$  soit encore  $\Delta \tilde{\Psi} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial t^2} = 0$ . C'est l'équation des ondes, l'équation de D'Alembert.

10. **On cherche des solutions sinusoïdales, de fréquence  $f$ , à l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\tilde{\Psi}$ . Dans ce but, on introduit la grandeur complexe  $\underline{\Psi}$  dont  $\tilde{\Psi}$  est la partie réelle et on suppose que  $\underline{\Psi}$  s'écrit  $\underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \exp(i2\pi ft) \underline{\Psi}(\vec{r})$ . Montrer que  $\underline{\Psi}(\vec{r})$  vérifie l'équation de Helmholtz**

$$\Delta \underline{\Psi} + k^2 \underline{\Psi} = 0, \quad (10)$$

où  $k$  est une constante que l'on explicitera.

Il s'agit d'une simple substitution :  $\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial t^2} = -(2\pi f)^2 \tilde{\Psi}$ . D'où  $\Delta \underline{\Psi} + \left(\frac{2\pi f}{u}\right)^2 \underline{\Psi} = 0$ . On a par identification  $k = \frac{\omega}{u} = 2\pi \frac{f}{u}$ , tandis que  $\frac{P_1}{\rho_1} = u^2 \frac{\rho_1}{\rho_1} = -i2\pi f \rho_0 \underline{\Psi}$  (pression et densité sont en quadrature de phase par rapport à la vitesse).

On étudie les ondes acoustiques dans une cavité sphérique de rayon  $R$  dont les parois sont supposées ici parfaitement incompressibles et parfaitement conductrices (Fig.(1)). Les solutions régulières de l'équation (10) en coordonnées sphériques peuvent s'exprimer sous forme d'une combinaison linéaire de la forme

$$\underline{\Psi}(\vec{r}) = \underline{\Psi}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} j_l(kr) \underline{Y}_{lm}(\theta, \phi), \quad (11)$$

où les  $\underline{Y}_{lm}(\theta, \phi)$  sont les fonctions harmoniques sphériques et  $j_l$  les fonctions de Bessel sphériques, définies par  $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x)$ .

On a représenté sur la figure (2) les zéros  $z_{n,l}$  des dérivées  $j'_l$  des fonctions de Bessel sphériques. Pour chaque valeur de  $l$ , les zéros sont multiples et indicés par  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) et vérifient asymptotiquement  $z_{n,l} = \frac{\pi}{2}(2n + l - 1)$ .

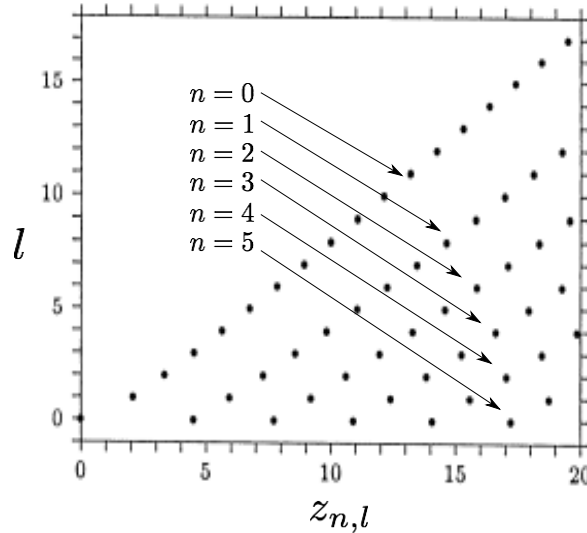


FIGURE 2 – Représentation dans le plan  $(z, l)$  des zéros  $z_{n,l}$  des dérivées  $j'_l(z)$  des fonctions de Bessel sphériques. Ainsi, par exemple  $z_{n=0,l=1} \simeq 2$ .

11. Donner la condition limite que doit vérifier  $\underline{\Psi}(\vec{r})$ . En déduire que les ondes acoustiques harmoniques pérennes au sein de la cavité possèdent des fréquences  $f_{n,l}$  bien déterminées. Donner l'expression, en fonction de  $u$  et du rayon  $R_C$  de la cavité sphérique, de la fréquence  $f_{0,1}$ . Justifier pourquoi il vaut mieux travailler avec les fréquences parmi les plus basses possibles.

La partie radiale de la vitesse doit s'annuler sur les parois ( $r = R$ ) car ces dernières sont impénétrables à la matière.

Donc  $\underline{V}_1^r = \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial r} = \exp(j2\pi ft) \frac{\partial \underline{\Psi}}{\partial r} = \exp(i2\pi ft) k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} j'_l(kR) \underline{Y}_{lm}(\theta, \phi)$  quelque soient les valeurs de  $(\theta, \phi)$ . Comme les harmoniques sphériques constituent un ensemble

de fonctions indépendantes, on en conclut que cela n'est possible que si tous les coefficients devant ces fonctions sont nuls. Pour éviter que toutes les amplitudes  $a_{lm}$  soient nulles, il faut que pour au moins une valeur de  $l$ , on puisse avoir  $j'_l(kR) = 0$ .

Ainsi,  $kR$  est un zéro de la dérivée d'une fonction de Bessel : ceux ci sont dénombrables  $z_{n,l}$  d'après la figure 2. On a ainsi  $2\pi \frac{f_{n,l} R}{u} = z_{n,l}$  d'où  $f_{n,l} = \frac{1}{2\pi} \frac{u}{R} z_{n,l}$ . On voit sur le graphe des zéros que très vite, ils sont proches les uns des autres dès qu'on prend des valeurs un peu élevées : ainsi au voisinage de la valeur 11, on trouve  $z_{3,0}, z_{2,2}, z_{1,5}$  et  $z_{0,9}$ . Si jamais les résonances autour des fréquences correspondantes sont un peu élargies (à cause des effets dissipatifs), le risque croît que ces pics se superposent et réduisent la précision sur la mesure de  $f$ . On voit en revanche que le mode  $z_{0,1} \simeq 2$  est parfaitement isolé.

12. **Retrouver la relation (8) en l'absence de correction de fréquence. Estimer, en utilisant la limite à pression nulle de la relation (7), la vitesse du son  $u$  et la fréquence  $f_{0,1}$  pour une cavité de rayon 60 mm et pour de l'hélium à température égale à  $T_{TPW}$  (masse molaire  $M = 4 \text{ g.mol}^{-1}$  et  $\gamma^0 = 5/3$ )**

On a un haut-parleur qui émet un (faible) son pur et un micro qui enregistre le son en un point de la cavité (les deux 'transducteurs' de la figure). L'enregistrement permet d'identifier les fréquences résonantes. La première obtenue (la plus basse) est  $f_{0,1}$ . Dans le cas d'une cavité sphérique,  $V = \frac{4\pi}{3} R^3$  et  $2\pi R = 2\pi \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{6\pi^2 V}$ . On a donc en substituant  $f_{n,l} = \frac{u}{\sqrt[3]{6\pi^2 V}} z_{n,l}$ , d'où on peut déduire  $u = \frac{f_{n,l}}{z_{n,l}} \sqrt[3]{6\pi^2 V}$ .

Application numérique : la limite basse pression donne  $u = \sqrt{\frac{\gamma^0 RT}{M}}$ . Si on prend de l'hélium à 273,16 K, s'agissant d'un gaz monoatomique on a  $\gamma^0 = 5/3$ . On obtient  $u = 0,97 \text{ km.s}^{-1}$  ce qui avec un volume de  $9 \times 10^{-4} \text{ m}^3$  donne  $f_{0,1}$  à 5,1 kHz.

13. **Citer les différentes méthodes envisagées dans le texte pour mesurer le volume d'une cavité sphérique. Justifier la similitude entre les relations (8) et (9)**

Méthode volumétrique : on remplit avec un liquide de masse volumique connue (l'eau ou le mercure) et on détermine ensuite sa masse. Par division entre les deux, on a le volume.

Méthode électromagnétique : on procède de la même façon que pour l'acoustique sachant que le champ électrique vérifie la même équation que le potentiel des vitesses (l'équation de d'Alembert) et la même équation aux limites si l'intérieur de la sphère parfaitement conductrice est non chargé (la composante radiale du champ s'annule alors - c'est la seule qui aurait pu être discontinue car le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur). L'avantage est que cette fois ci on connaît la vitesse mise en jeu (la vitesse de la lumière, corrigée par l'indice du milieu tout de même... dont on ne parle pas vraiment dans l'article) donc la mesure de la fréquence donne le volume.

L'autre avantage de cette dernière méthode est que manifestement on connaît très bien les corrections de fréquence dues à l'asphéricité et que l'on se sert de cela pour effectuer



des mesures meilleures encore.

## Thermodynamique et vitesse du son

Dans cette partie, on cherche à exprimer la vitesse du son  $u = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}$  en fonction de grandeurs thermodynamiques mesurables. On raisonne d'abord sur un système de  $N_0$  moles d'un gaz parfait monoatomique classique.

14. **En identifiant l'énergie interne  $U$  de ce système, montrer que sa capacité thermique à volume constant  $C_V$  est égale à  $C_V^0 = \frac{3}{2}N_0R$ . En déduire sa capacité thermique  $C_P^0$  à pression constante en vous aidant de la relation de Mayer (5).**

Pour un gaz parfait monoatomique classique, la seule énergie est l'énergie cinétique de translation des atomes  $\epsilon = \frac{mv^2}{2}$  qui correspondent à trois degrés de liberté quadratique. Le théorème d'équipartition (chaque degré de liberté quadratique donne une énergie moyenne  $k_B T/2$ ) nous donne alors que  $U = N_0 N_A \langle \epsilon \rangle = N_0 \frac{3RT}{2}$ . Par ailleurs, l'expression de  $dU$  que l'on trouve dans le formulaire appliqué dans le cas d'un gaz parfait  $PV = N_0 RT$  donne  $dU = C_V dT = N_0 \frac{3R}{2} dT$  d'où l'on déduit  $C_V^0 = \frac{3}{2}N_0R$ . La formule de Mayer donne par ailleurs  $C_P^0 - C_V^0 = R$  aussi  $C_P^0 = C_V^0 + R = \frac{5}{2}R$ . Et finalement  $\gamma^0 = \frac{C_P^0}{C_V^0} = \frac{5}{3}$ .

15. **Montrer que, lors d'une transformation isentropique de ce système,  $dP/P + \gamma^0 dV/V = 0$ . Retrouver alors la seconde partie de la relation (7) dans la limite de la pression nulle**

Pour une transformation isentropique du système  $dS = 0 = \frac{C_V^0}{T} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV = \frac{C_V^0}{T} dT + \frac{P}{T} dV = C_V^0 \frac{d(PV)}{N_0 RT} + \frac{N_0 R}{V} dV = C_V^0 \frac{dP}{P} + (C_V^0 + N_0 R) \frac{dV}{V} = C_V^0 \frac{dP}{P} + C_P^0 \frac{dV}{V}$  d'où  $\frac{dP}{P} + \frac{C_P^0}{C_V^0} \frac{dV}{V} = \frac{dP}{P} + \gamma^0 \frac{dV}{V} = 0$ .

On en déduit (masse de  $N_0$  moles :  $N_0 M$ )

$$u^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = -\frac{V^2}{N_0 M} \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \left(-\frac{V^2}{N_0 M}\right) \times \left(-\frac{\gamma^0 P}{V}\right) = \gamma^0 \frac{PV}{N_0 M} = \gamma^0 \frac{RT}{M} = \gamma^0 \frac{k_B T}{m} \text{ soit } u^2 = \frac{5k_B T}{3m}, \text{ qui est bien la limite à pression nulle de la formule (7).}$$

**On s'intéresse désormais à un gaz réel de capacité thermique à volume constant  $C_V$  et à pression constante  $C_P$ . Le développement du viriel de son équation d'état à basse pression s'écrit**

$$PV_m = RT \left(1 + \frac{B_2(T)}{V_m} + \frac{B_3(T)}{V_m^2} + \dots\right), \quad (12)$$

où  $V_m$  est le volume molaire. On veut faire le lien entre les coefficients du viriel ( $B_2, B_3 \dots$ ) et ceux ( $A_1, A_2 \dots$ ) du développement de la relation (7) du texte introductif.

16. En utilisant la formule de Reech (6), montrer que le carré de la vitesse du son dans le gaz réel de masse molaire  $M$  peut se développer sous la forme

$$u^2 = \frac{RT}{M} \gamma \left( 1 + \frac{C_2}{V_m} + \frac{C_3}{V_m^2} + \dots \right), \quad (13)$$

où chacun des coefficients ( $C_2, C_3 \dots$ ) s'exprime en fonction de chacun des coefficients ( $B_2, B_3 \dots$ ).

On a donc  $u^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = -\frac{V_m^2}{M} \left( \frac{\partial P}{\partial V_m} \right)_S = -\frac{V_m^2}{M} \gamma \left( \frac{\partial P}{\partial V_m} \right)_T = \frac{\gamma}{M} \left( \frac{\partial P}{\partial \left( \frac{1}{V_m} \right)} \right)_T = \frac{\gamma RT}{M} \left( 1 + 2\frac{B_2}{V_m} + 3\frac{B_3}{V_m^2} \dots \right)$  car  $P = RT \left( \frac{1}{V_m} + \frac{B_2(T)}{V_m^2} + \frac{B_3(T)}{V_m^3} + \dots \right)$ .

17. Montrer en vous aidant du formulaire que

$$C_V(T, V) = C_V^0(T) - T \int_V^\infty \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V dV, \quad (14)$$

où  $C_V^0(T) = \lim_{V \rightarrow +\infty} C_V(T, V)$ . En déduire que, dans le cas général,  $\gamma$  dépend à la fois de  $T$  et de  $V$  et que, dans la limite de la pression nulle (c'est-à-dire d'un volume infini),  $\gamma^0 = \lim_{V \rightarrow +\infty} \gamma(T, V)$  peut dépendre de  $T$ .

On a  $dS = \frac{C_V}{T} dT + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV$  qui est une différentielle totale donc  $\left( \frac{\partial \left( \frac{C_V}{T} \right)}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V$ .

Ainsi  $\left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V$  d'où  $C_V(T, V_2) - C_V(T, V_1) = T \int_{V_1}^{V_2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V dV$ . Cela montre qu'on peut calculer à partir de l'équation d'état  $C_V$  et  $C_P$  (avec la formule de Mayer) si on connaît  $C_V(T, V_{ref})$  pour tout  $T$ . Cette dernière grandeur n'a pas de raison a priori de ne pas dépendre de  $T$ . Même chose pour les grandeurs  $C_P$  et  $\gamma$ . La limite à pression nulle est équivalente au volume infini ou à la densité nulle (citée dans le texte).

18. Expliquer la démarche pour obtenir à partir des équations précédentes les coefficients du viriel acoustique de l'équation (7). Faire le calcul explicite pour  $A_1(T)$  et montrer que

$$MA_1(T) = 2\gamma^0 B_2(T) + 2\gamma^0(\gamma^0 - 1)TB_2'(T) + (\gamma^0 - 1)^2 T^2 B_2''(T). \quad (15)$$

Il pourra être utile de relier  $C_V^0(T)$  et  $C_P^0(T)$  à  $\gamma^0$ .

Il s'agit d'une question difficile à la fois dans la démarche et dans le calcul. Pour simplifier, le volume a été choisi égal au volume molaire.

On a déjà  $C_V(T, V) = C_V(T)^0 - T \int_V^\infty \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V dV = C_V(T)^0 - RT \int_V^\infty \left( \frac{2B_2' + TB_2''}{V^2} + \dots \right) dV = C_V(T)^0 - RT \left( \frac{2B_2' + TB_2''}{V} + \dots \right) = C_V^0 - R \frac{2TB_2' + T^2 B_2''}{V} + \dots$

Par ailleurs,  $C_P = C_V - T \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2 = C_V - T \frac{1}{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2 = C_V + \frac{T}{\frac{RT}{V^2} (1 + \frac{2B_2}{V} + \dots)} \left[ \frac{R}{V} (1 + \frac{B_2 + B_2' T}{V} + \dots) \right]^2 = C_V + R \frac{(1 + 2 \frac{B_2 + B_2' T}{V} + \dots)}{(1 + \frac{2B_2}{V} + \dots)} = C_V + R (1 + 2 \frac{B_2' T}{V} + \dots) = C_P^0 - R \frac{T^2 B_2''}{V} + \dots$

On peut désormais écrire avec  $C_P^0 = R \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}$  et  $C_V^0 = R \frac{1}{\gamma_0 - 1}$  que  $\frac{C_P}{C_V} = \frac{C_P^0 - R \frac{T^2 B_2''}{V} + \dots}{C_V^0 - R \frac{2TB_2' + T^2 B_2''}{V} + \dots} = \gamma_0 \frac{1 - \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} \frac{T^2 B_2''}{V} + \dots}{1 - (\gamma_0 - 1) \frac{2TB_2' + T^2 B_2''}{V} + \dots} = \gamma_0 (1 + (\gamma_0 - 1) \frac{2TB_2'}{V} + \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{\gamma_0} \frac{T^2 B_2''}{V} + \dots)$ .

Ainsi  $u^2 = \frac{\gamma RT}{M} (1 + \frac{2B_2}{V} + \dots) = \frac{RT}{M} \gamma_0 (1 + (\gamma_0 - 1) \frac{2TB_2'}{V} + \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{\gamma_0} \frac{T^2 B_2''}{V} + \dots) (1 + \frac{2B_2}{V} + \dots) = \frac{RT}{M} \gamma_0 (1 + \frac{2B_2}{V} + (\gamma_0 - 1) \frac{2TB_2'}{V} + \frac{(\gamma_0 - 1)^2}{\gamma_0} \frac{T^2 B_2''}{V} + \dots)$  sachant qu'à l'ordre 0,  $\frac{1}{V} = \frac{P}{RT}$ . On obtient la bonne expression de  $A_1$ .

## Partie II : La balance de Kibble

19. Définir en quelques lignes, sans formalisme mathématique, ce qu'est la supraconductivité et en donner quelques applications. On introduira la notion de température critique  $T_c$ .

La supraconductivité est un phénomène quantique qui se manifeste à l'échelle macroscopique à partir d'une température critique  $T_c$  par une résistivité électrique nulle et un diamagnétisme parfait (expulsion du champ magnétique de l'intérieur du matériau supraconducteur (effet Meissner)).

Applications : Production de champs magnétiques intenses (IRM), Magnétométrie de très haute sensibilité à l'aide de SQUID (superconducting quantum interference device), étalon de tension électrique utilisant une jonction Josephson.

20. Indiquer quelles sont les propriétés physiques d'une paire de Cooper : charge, masse, spin. Conclure sur la nature statistique (bosonique ou fermionique) des paires de Cooper.

Charge  $(-2e)$ , masse  $= 2m_e$ , spin  $= 0$ ; boson.

21. Indiquer l'interaction à l'origine de la formation des paires de Cooper. Donner un ordre de grandeur de l'énergie d'appariement, en adoptant  $T_c = 4 \text{ K}$ .

La formation d'une paire de Cooper dans les matériaux supraconducteurs conventionnels (à très basse température) peut être expliquée par un modèle simple : les électrons dans un métal interagissent avec le réseau cristallin formé d'ions positifs. Lorsque l'un des électrons passe près d'un ion, il y a attraction entre l'électron négatif et l'ion positif. Ceci provoque une vibration qui passe d'un ion à l'autre dans le réseau cristallin.

Un premier électron, chargé négativement, attire sur son sillage des ions positifs. Les ions se déplacent et créent une zone locale électriquement positive. Compte tenu de l'inertie de l'ion relativement lourd, cette zone persiste alors que l'électron est passé, et peut attirer un second électron qui passera également le long du sillon « positif » produit par le premier. Le second électron est ainsi capable de suivre la trajectoire du premier

avant que le réseau cristallin ne retrouve sa position normale. Ce couplage subsiste sur une très longue distance (plus de 1000 fois la maille cristalline). On parle d'interaction électron-phonon, car dans ce processus on considère que le premier électron de la paire émet un phonon (quantum de vibration) et qui sera absorbé par le deuxième électron.

Ce couplage est très faible mais persiste tant que l'énergie thermique reste inférieure à l'énergie d'appariement. Dans ce modèle, la paire de Cooper ainsi formée ne peut survivre qu'à très basses températures. L'énergie d'appariement doit être supérieure à  $k_B T_c$ . Pour  $T_c = 4$  K ;  $k_B T_c = 3,45 \times 10^{-4}$  eV. L'énergie d'appariement est de l'ordre de  $10^{-3}$  eV.

22. **À partir des relations (37) et de l'expression de la fonction d'onde  $\psi$ , déterminer les deux relations reliant les dérivées temporelles de  $\varphi_1$ ,  $n_1$  d'une part et  $\varphi_2$ ,  $n_2$  d'autre part aux différents paramètres du problème.**

On remplace dans les équations 54, les fonctions d'ondes  $\psi_l$  par  $\sqrt{n_l} \exp i\varphi_l$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= E_1 \psi_1 + E_J \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= E_2 \psi_2 + E_J \psi_1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} -\hbar \sqrt{n_1} \frac{d\varphi_1}{dt} \exp i\varphi_1 + i\hbar \frac{1}{2\sqrt{n_1}} \frac{dn_1}{dt} \exp i\varphi_1 &= E_1 \sqrt{n_1} \exp i\varphi_1 + E_J \sqrt{n_2} \exp i\varphi_2 \\ -2\hbar n_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + i\hbar \frac{dn_1}{dt} &= 2n_1 E_1 + 2E_J \sqrt{n_2 n_1} \exp i(\varphi_2 - \varphi_1) \\ -2\hbar n_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + i\hbar \frac{dn_2}{dt} &= 2n_2 E_2 + 2E_J \sqrt{n_1 n_2} \exp i(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (17)$$

En égalisant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= -\frac{E_1}{\hbar} - \frac{E_J}{2\hbar} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= -\frac{E_2}{\hbar} - \frac{E_J}{2\hbar} \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{dn_2}{dt} = \frac{2E_J}{\hbar} \sqrt{n_2 n_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (19)$$

23. **Donner l'expression du courant  $I_s$  de paires de Cooper à travers la jonction Josephson, faisant intervenir la densité numérique de paires  $n_1$ . On suppose pour la suite que  $n_1 \simeq n_2 \simeq n_0$ . En déduire que**

Le courant supraconducteur  $I_s$  est

$$I_s = (-2e) \frac{dn_1}{dt} \quad (20)$$

pour  $n_1 \approx n_2 \approx n_0$ , on obtient

$$I_s = (-2e) \frac{dn_1}{dt} = (-2e) \frac{2E_J}{\hbar} n_0 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dt} = - \frac{(E_2 - E_1)}{\hbar} \quad (21)$$

Par identification  $I_c = (-2e) \frac{2E_J}{\hbar} n_0$

24. **On applique une tension électrique constante  $V_0$  entre les deux supraconducteurs de telle sorte que les supraconducteurs 1 et 2 soient portés respectivement aux potentiels  $-V_0/2$  et  $+V_0/2$ . Donner l'expression de  $E_2 - E_1$  pour une paire de Cooper. En déduire que le courant  $I_s$  oscille à une pulsation  $\omega_0$  dont on donnera l'expression. Calculer la valeur de la fréquence  $f_0$  associée à la pulsation  $\omega_0$  pour une tension  $V_0$  égale à  $10 \mu\text{V}$ .**

$$E_2 - E_1 = -2eV_0$$

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \int \frac{(2eV_0)}{\hbar} dt \quad (22)$$

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{(2eV_0)}{\hbar} t + \varphi_0 \quad (23)$$

$$I_s = (-2e) \frac{2E_J}{\hbar} n_0 \sin \left[ \frac{(2eV_0)}{\hbar} t + \varphi_0 \right] \quad (24)$$

Dans cette configuration, le courant de paires de Cooper est une fonction sinusoïdale du temps avec une pulsation proportionnelle à la tension appliquée aux bornes de la jonction :  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{(2eV_0)}{\hbar}$

Pour  $V_0$  égale à  $10 \mu\text{V}$ , la fréquence  $f_0 = \frac{(2eV_0)}{h}$  vaut 4,8 GHz.

25. **On applique maintenant aux bornes de la jonction une tension alternative de pulsation  $\omega$**

$$V(t) = V_0 + V_1 \cos(\omega t) \quad (25)$$

**Montrer que le courant supraconducteur s'écrit sous la forme**

$$I_s(t) = I_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \sin [(\omega_0 + k\omega) t + \varphi_0] \quad (26)$$

où  $\varphi_0$  est une phase initiale.

$$E_2 - E_1 = -2e(V_0 + V_1 \cos \omega t)$$

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \int \frac{(2eV_0)}{\hbar} dt + \int \frac{(2eV_1)}{\hbar} \cos \omega t dt \quad (27)$$

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{(2eV_0)}{\hbar} t + \frac{(2eV_1)}{\hbar\omega} \sin \omega t + \varphi_0 \quad (28)$$

$$I_s = (-2e) \frac{2E_J}{\hbar} n_0 \sin \left[ \frac{2eV_0}{\hbar} t + \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \sin \omega t + \varphi_0 \right] \quad (29)$$

On peut écrire  $I_s$  sous la forme

$$I_s = I_c \mathcal{I}m \left[ \exp i \left( \frac{2eV_0}{\hbar} t + \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \sin \omega t + \varphi_0 \right) \right] = I_c \mathcal{I}m \left[ \exp i \left( \frac{2eV_0}{\hbar} t + \varphi_0 \right) \exp \left( i \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \sin \omega t \right) \right] \quad (30)$$

on donne :

$$\exp [i\beta \sin \phi] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k(\beta) \exp (ik\phi) \quad (31)$$

où  $J_k$  est la fonction de Bessel d'ordre  $k$ .

En utilisant le développement (31) dans l'équation (30), on obtient la relation attendue

$$I_s = I_c \mathcal{I}m \left[ \exp i \left( \frac{2eV_0}{\hbar} t + \varphi_0 \right) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \exp i (k\omega t) \right]$$

$$I_s = I_c \mathcal{I}m \left[ \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \exp i \left( \frac{2eV_0}{\hbar} t + k\omega t + \varphi_0 \right) \right] \quad (32)$$

$$I_s = I_c \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} J_k \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \sin \left( \frac{2eV_0}{\hbar} t + k\omega t + \varphi_0 \right) \quad (33)$$

26. **On applique toujours aux bornes de la jonction une tension alternative d'expression  $V(t) = V_0 + V_1 \cos(\omega t)$ , en maintenant constantes l'amplitude  $V_1$  de la modulation et sa pulsation  $\omega$ . En revanche, la constante  $V_0$  peut être ajustée. Montrer que la moyenne temporelle  $\langle I_s \rangle$  du courant est nulle sauf pour des valeurs particulières de  $V_0$ . Donner l'expression de  $\langle I_s \rangle$  pour ces valeurs.**

$I_s$  est une fonction sinusoïdale en temps, sa valeur moyenne est donc égale à 0 sauf pour  $\frac{2eV_0}{\hbar} + k\omega = 0$ , soit pour  $\frac{2eV_0}{\hbar} = -k\omega$ . On a ainsi  $V_0 = -k \frac{\hbar\omega}{2e}$  et donc

$$\langle I_s(k) \rangle = J_k \left( \frac{2eV_1}{\hbar\omega} \right) \sin \varphi_0 \quad (34)$$

27. **Expliquer qualitativement ces observations.**

L'excitation (la polarisation) de la jonction Josephson par une tension alternative à la fréquence  $f = \omega/2\pi$ , influe sur la dynamique de la phase du courant des paires de Cooper. Celle-ci se synchronise avec la fréquence d'excitation c'est à dire  $\varphi(t + 1/f) = \varphi(t) + 2n\pi$  où  $n$  est un entier. On parle de régime de verrouillage de phase.

28. **Calculer la tension associée à la première marche de Shapiro pour une fréquence égale à 70 GHz. La figure (6) représente la caractéristique courant-tension aux bornes de 8192 jonctions Josephson montées en série. Justifier l'intérêt d'utiliser un réseau de jonctions.**

Pour une fréquence égale à 70 GHz, la tension  $V_0$  ( $\frac{\hbar\nu_{RF}}{2e}$ ) vaut 0,145 mV. Cette tension étant faible, on utilise un réseau de jonctions Josephson montées en série. Par exemple pour 8192 jonctions en série, on obtient une tension  $V$  égale à 1,2 V.

29. **Indiquer en quoi ce schéma expérimental permet d'obtenir un étalon quantique de tension électrique. Donner l'expression et la valeur numérique du facteur de conversion impliqué.**

La tension aux bornes d'une jonction Josephson irradiée par une onde radiofréquence est proportionnelle à la fréquence de l'onde. La jonction joue le rôle d'un convertisseur fréquence-tension. Le coefficient de conversion est  $h/(2e)$  et ne dépend que des constantes physiques fondamentales  $h$  et  $e$ . Cette dépendance a été démontrée expérimentalement sur différents systèmes (avec une incertitude relative de  $10^{-9}$ ). La valeur numérique du coefficient de conversion est 2,1 mV/GHz.

### Un étalon quantique de résistance électrique : effet Hall quantique

30. **On considère un électron en mouvement dans un plan  $(xy)$  en présence d'un champ magnétique uniforme et constant orienté selon un axe vertical  $z$  ( $\vec{B} = B\vec{e}_z$ ). Obtenir les caractéristiques du mouvement. Expliciter la pulsation cyclotron  $\omega_B$  en fonction de  $B$ , de la charge élémentaire  $e$  et de la masse de l'électron  $m_e$ .**

L'électron dans le champ magnétique  $\vec{B}$  est soumis à la force de Lorentz  $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ . On écrit le principe fondamental de la dynamique (en négligeant le poids de l'électron)

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} m_e \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{eB}{m} v_y = -\omega_B v_y \\ m_e \frac{dv_y}{dt} &= \frac{eB}{m} v_x = \omega_B v_x \end{aligned} \quad (36)$$

Les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega_B t) + C_x \\ y(t) &= y_0 \sin(\omega_B t) + C_y \end{aligned} \quad (37)$$

La trajectoire est circulaire de centre  $(C_x, C_y)$ , de rayon  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  et de pulsation  $\omega_B = eB/m_e$

31. **Dans le cadre du modèle classique de Drude de la conduction électrique sans effet magnétique, un porteur électronique de vitesse  $\vec{v}$  est non seulement soumis à une force électrique (en raison d'un champ électrique  $\vec{E}$ ) mais aussi à une force de la forme  $\vec{f} = -m_e \vec{v} / \tau_e$ . Préciser l'origine de cette force et la signification de  $\tau_e$  pour un matériau conducteur. Obtenir l'expression de la mobilité  $\mu_e$ , telle que  $\vec{v} = \mu_e \vec{E}$  en régime continu, en fonction de  $e$ ,  $\tau_e$  et  $m_e$ .**

La force de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse,  $\vec{f} = -m_e\vec{v}/\tau_e$ , traduit l'amortissement du mouvement des électrons dû aux collisions avec les ions du réseau cristallin. Le temps caractéristique  $\tau_e$  est l'intervalle de temps moyen entre deux collisions successives. En fait, il a été montré que les collisions ne se faisaient pas avec les ions, mais avec les phonons, c'est-à-dire les modes de vibration du réseau cristallin.

En faisant le bilan des forces et en négligeant toujours le poids de l'électron, on a

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m_e}{\tau_e} \vec{v} - e\vec{E} \quad (38)$$

La vitesse de l'électron à l'équilibre (i.e. dans le régime permanent) est

$$\vec{v} = -\frac{e\tau_e}{m_e} \vec{E} = \mu_e \vec{E} \quad (39)$$

On en déduit la mobilité électronique

$$\mu_e = -\frac{e\tau_e}{m_e} \quad (40)$$

32. **En utilisant le modèle de Drude avec effet magnétique et en régime permanent, montrer que le champ électrique est relié au vecteur densité de courant surfacique  $\vec{j}$  par la relation**

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \rho_0 \begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau_e \\ -\omega_B \tau_e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$

**Expliciter  $\rho_0$  en fonction de  $e$ ,  $\tau_e$ ,  $m_e$  et  $n_{el}$ . Commenter.**

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m_e}{\tau_e} \vec{v} - e\vec{E} \quad (41)$$

dans le régime permanent

$$-e\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m_e}{\tau_e} \vec{v} - e\vec{E} = 0 \quad (42)$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m_e}{e\tau_e} \vec{v} \quad (43)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \wedge B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{m_e}{e\tau_e} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = -B \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} - \frac{m_e}{e\tau_e} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$



comme  $\vec{J} = -n_{\text{el}}e\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{m_e}{n_{\text{el}}e^2\tau_e} \begin{pmatrix} 1 & \frac{eB}{m_e}\tau_e \\ -\frac{eB}{m_e}\tau_e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \rho_0 \begin{pmatrix} 1 & \omega_B\tau_e \\ -\omega_B\tau_e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$

où

$$\rho_0 = \frac{m_e}{n_{\text{el}}e^2\tau_e} \quad (46)$$

33. **Un courant circule dans la direction  $\vec{e}_x$ . Donner l'expression de la tension de Hall  $V_H$  qui apparaît dans la direction transverse. En déduire l'expression de la résistance de Hall  $R_H = R_{xy} = V_H/I$  en fonction  $e$ ,  $B$ ,  $m_e$  et  $n_{\text{el}}$ .**

$$R_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = -\frac{L_y E_y}{L_y J_x} = -\frac{E_y}{J_x} = \rho_0 \omega_B \tau_e = \frac{B}{n_{\text{el}}e} \quad (47)$$

Il apparaît une résistance transverse qui dépend de  $B$ , et de la densité surfacique de charge  $n_{\text{el}}$ . Notez que la résistance  $R_{xy}$  est indépendante de la géométrie du système.

## Ordres de grandeurs et quantification

34. **À partir de la quantification du moment cinétique de l'électron, montrer que le rayon minimal de l'orbite cyclotron est de l'ordre de la longueur magnétique  $l_B = \sqrt{\hbar/(eB)}$ . Calculer  $l_B$  pour  $B = 4 \text{ T}$ .**

L'électron soumis à un champ magnétique  $B$ , uniforme et constant, a une trajectoire circulaire de rayon  $r$ , sa vitesse angulaire est  $\omega_B$ . Le moment cinétique orbital de l'électron est  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m_e \vec{v}$ . Soit  $L = r^2 m_e \omega_B = r^2 e B$ , on suppose que  $L$  est un multiple entier ( $p$ ) de  $\hbar$  (quantification).

$$L = r^2 e B = p \hbar \implies r^2 = p \frac{\hbar}{eB} = p l_B^2 \quad (48)$$

Pour  $B=4 \text{ T}$ ,  $l_B = 13 \text{ nm}$ .

35. **La longueur d'onde de Fermi  $\lambda_F$  dans un gaz bidimensionnel est égale à  $\sqrt{2\pi/n_{\text{el}}}$ . Donner la signification physique de  $\lambda_F$ . Comparer  $l_B$  et  $\lambda_F$  dans un métal ( $n_{\text{el}} = 10^{14} \text{ cm}^{-2}$ ) et dans un semi-conducteur ( $n_{\text{el}} = 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ ). Commenter.**

La longueur d'onde de Fermi est associée au vecteur d'onde de Fermi ( $k_F = 2\pi/\lambda_F = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^* E_F}$  où  $E_F$  est l'énergie de Fermi et  $m^*$  la masse effective de l'électron dans le réseau. Elle représente l'extension spatiale du paquet d'ondes électronique. La longueur d'onde de Fermi est un paramètre utile pour définir la dimensionnalité du matériau en comparaison avec ses dimensions réelles. Si l'une de ses dimensions, par exemple son épaisseur, est inférieure ou égale à  $\lambda_F$ , alors l'électron est confiné car sa fonction d'onde

électronique ne peut pas s'étendre suivant cette dimension. Un tel système peut être considéré comme un gaz d'électrons bi-dimensionnel.

Dans l'espace des impulsions les électrons occupent un certain volume délimité par la surface de Fermi. On assimile généralement ce volume à une sphère, appelée la sphère de Fermi. On peut relier le vecteur d'onde  $k_F$  à la densité électronique, cette relation dépend de la dimensionnalité du conducteur. Pour un gaz d'électrons 2D,  $k_F = \sqrt{2\pi n_e}$ . Pour les données du problème, nous obtenons.

$$\lambda_F(\text{métal}) = 2,5 \text{ nm} \ll l_B; \lambda_F(\text{semi-conducteur}) = 80 \text{ nm} \gg l_B.$$

Les ordres de grandeur montrent qu'il est plus facile de concevoir un gaz d'électrons à 2D en utilisant des structures à base de matériaux semiconducteurs.

36. **Le spectre d'énergie d'un électron dans un champ magnétique uniforme est donné par les niveaux de Landau**

$$E_n = \hbar\omega_B\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (49)$$

où  $n$  un entier naturel. La masse effective  $m^*$  d'un électron dans une hétérostructure GaAs/AlGaAs est égale à  $0,07 m_e$ . Évaluer l'écart en énergie des deux premiers niveaux de Landau pour un champ magnétique de 4 T, ainsi que la température associée. Commenter.

$\hbar\omega_B = eB/m_e^* = 1.06 \times 10^{-21}$  J; T = 77 K. A température ambiante, les électrons occupent plusieurs niveaux de Landau.

37. **Le caractère bidimensionnel du problème se manifeste par une forte dégénérescence de chaque niveau d'énergie de Landau. On peut l'estimer simplement pour le niveau fondamental par l'approche semi-classique suivante : on admet que chaque état est représenté par une orbite cyclotron dans le plan ( $xy$ ) et occupe une surface  $2\pi l_B^2$  sur la surface totale  $S$  accessible (avec  $S \gg l_B^2$ ). Obtenir la dégénérescence du niveau de Landau fondamental. Proposer, hypothèse(s) éventuelle(s) à l'appui, une justification de la relation (54) donnant la densité surfacique électronique dans le cas où les  $p$  premiers niveaux de Landau en dessous du niveau de Fermi sont intégralement remplis :**

$$n_{\text{el}} = p \frac{eB}{h}. \quad (50)$$

soit  $\mathcal{N}$  le nombre d'orbites disponibles. C'est aussi le nombre d'états possibles dans le niveau d'énergie fondamental.

$$\mathcal{N} = \frac{S}{2\pi l_B^2} \quad (51)$$

Si on place un électron par orbite dans chaque niveau d'énergie (on néglige le spin), les  $N$  électrons devraient être répartis sur  $p$  niveaux d'énergie où  $p$  est

$$p = \frac{N}{\mathcal{N}} = \frac{N}{S} \times 2\pi l_B^2 = n_{\text{el}} \times 2\pi l_B^2 \quad (52)$$

ce qui donne

$$n_{\text{el}} = p \frac{1}{2\pi l_B^2} = p \frac{eB}{h} \quad (53)$$

38. **Montrer, à partir des résultats précédents, que dans le régime quantique la résistante Hall s'écrit**

$$R_H = \frac{1}{p} \frac{h}{e^2} \quad (54)$$

où  $p$  est un entier naturel. Calculer sa valeur numérique pour  $p = 1$ .

On remplace dans la résistance de Hall  $R_H$  la densité surfacique  $n_{\text{el}}$  par son expression on obtient le résultat escompté.

pour  $p = 1$ , la résistance de Hall  $R_H$  vaut 25,81 k $\Omega$

39. **Donner conditions expérimentales requises pour observer la quantification de la résistance prédite par l'effet Hall quantique.**

Il faut un matériau de faible densité de porteurs (un semi-conducteur), porté à une basse température et soumis à un fort champ magnétique ( $\sim$  Tesla)

## Principe de la balance de Kibble

40. **En mode force, la masse  $M_K$  est placée sur le plateau et on fait circuler un courant constant  $I$  pour rétablir l'équilibre de la balance. Faire un (ou des) schéma(s) soigné(s) en précisant le sens donné à  $I$  pour rétablir l'équilibre. Déterminer l'expression de la force de Laplace  $\vec{F}$  exercée sur la bobine. En déduire la relation liant à l'équilibre  $M_K$ ,  $B$ ,  $I$ ,  $L$  et l'accélération de la pesanteur  $g$ .**

On considère un portion élémentaire  $dl$  de la bobine parcourue par un courant  $I$ . Elle est soumise à la force de Laplace  $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ . Comme le champ magnétique est radial et orienté vers le centre de la bobine, si l'on choisit le sens du courant selon la figure (3), la force de Laplace sera orientée vers le haut. La force de Laplace totale exercée sur la bobine sera aussi verticale et orientée vers le haut et doit compenser le poids de  $M_K$ .

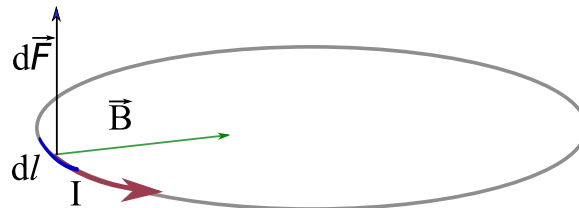


FIGURE 3 –

La norme de  $\vec{B}$  étant supposée constante en tout point, on obtient la relation

$$M_K g = IBL \quad (55)$$

41. **En mode vitesse, la masse  $M_K$  est retirée et le circuit de la bobine est ouvert. Celle-ci est alors animée d'un mouvement vertical d'ensemble à la vitesse  $\vec{v}_z = v_z \vec{e}_z$ . On mesure aux bornes de la bobine une tension  $u$  positive associée à une force électromotrice. Exprimer  $u$  en fonction des données du problème.**  
La force électromotrice  $u$  qui apparait aux bornes de la bobine est égale à la variation du flux coupé

$$u = -\frac{d\phi_c}{dt} = -BL\frac{dz}{dt} = -BLv_z \quad (56)$$

42. **En déduire que  $M_K g v_z = uI$ . Expliquer quel est l'intérêt du protocole de mesure qui consiste à combiner le mode force et le mode vitesse.**

On déduit l'expression de  $B$  de l'équation (56), puis on remplace dans (55). L'intérêt de ce protocole à deux modes est de s'affranchir de la mesure du champ magnétique. Ainsi, la puissance électrique  $uI$  est égale à la puissance mécanique nécessaire pour déplacer la masse  $M_K$  à la vitesse  $v_z$  dans le champ de gravité.

43. **Le courant peut-être mesuré à partir de la chute de tension  $u'$  au travers d'une résistance  $R$ . Dans l'expérience, les tensions sont mesurées par rapport à un étalon de tension Josephson et les résistances par rapport à un étalon de résistance Hall. Les mesures peuvent être exprimées ainsi**

$$u = C_1 k f_{J,1} \frac{h}{2e} \quad (57)$$

$$u' = C_2 k' f_{J,2} \frac{h}{2e} \quad (58)$$

$$R = C_3 \frac{1}{p} \frac{h}{e^2} \quad (59)$$

où les quantités  $C_i$  représentent les facteurs de calibration,  $f_{J,i}$  les fréquences Josephson et  $k, k'$  et  $p$  des nombres entiers naturels. Montrer que l'on obtient au final la relation

$$M_K = \frac{C}{4} f_{J,1} f_{J,2} \frac{h}{g v_z} \quad (60)$$

Expliciter l'expression de  $C$ .

$$M_K g v_z = uI = \frac{uu'}{R} \quad (61)$$

$$M_K g v_z = C_1 C_2 k k' \left(\frac{h}{2e}\right)^2 f_{J,1} f_{J,2} \frac{p}{C_3} \frac{h}{e^2} \quad (62)$$

$$(63)$$

$$M_K = C \frac{h}{4} \frac{1}{g v_z} f_{J,1} f_{J,2} \quad (64)$$

avec

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_3} k k' p \quad (65)$$

44. **Citer une méthode permettant de mesurer la vitesse et l'accélération avec une très bonne précision.**

On peut citer deux méthodes : la gravimétrie optique et la gravimétrie atomique. Dans le premier cas, le principe repose sur un interféromètre optique de Michelson où l'un des deux bras est doté d'un coin de cube en chute libre. Le second est un interféromètre atomique, les deux paquets d'ondes atomiques qui interfèrent sont aussi en chute libre dans le champ de gravité. Dans les deux techniques, la mesure de  $g$  est déduite de la mesure du déphasage à la sortie de l'interféromètre qui revient au final à des mesures de fréquences lasers.

45. **L'une des balances de Kibble des plus précises au monde est celle du *National Institute of Standards and Technology* aux États-Unis. La figure (9) présente la liste des effets systématiques identifiés sur cette expérience lors de la mesure de  $h$  réalisée en 2016, ainsi que les incertitudes associées. Donner l'incertitude globale sur la valeur de  $h$  et identifier l'effet systématique prépondérant.**

on note  $u_s$  l'incertitude statistique et  $u_i$  l'incertitude associée à l'effet systématique  $i$ . L'incertitude globale  $u_c$  est

$$u_c = \sqrt{u_s^2 + \sum_i u_i^2} \quad (66)$$

dans notre cas

$$\begin{aligned} u_c &= 10^{-9} \sqrt{(24,9)^2 + (15,4)^2 + (10,9)^2 + (6,5)^2 + (6,3)^2 + (5)^2 + (4,4)^2 + (1,7)^2} \\ u_c &= 33 \times 10^{-9} \end{aligned} \quad (67)$$

L'effet systématique dominant est lié à la non-homogénéité du champ magnétique.

46. **En conclusion, montrer qu'en fixant la valeur numérique de la constante de Planck  $h$ , la balance de Kibble permet de ramener la mesure de la masse à une mesure de fréquence. Expliciter l'intérêt de cette approche.**

D'après l'équation 64, en fixant la valeur de la constante de Planck  $h$ , la balance de Kibble permet de déterminer une masse macroscopique à partir de la mesure des fréquences Josephson, de l'accélération locale de la pesanteur et celle de la vitesse  $v_z$ , puisque les nombres  $k, k'$  et  $p$  sont des nombres entiers connus sans ambiguïté et le coefficient  $C$  est un paramètre expérimental connu avec une grande précision. Les grandeurs  $g$  et  $v_z$  sont mesurées par interférométrie (atomique pour le premier et optique pour le second) et donc les valeurs de  $g$  et  $v_z$  seront déduites, directement ou indirectement, à partir de mesures de fréquences lasers. Au final, en fixant la valeur numérique de  $h$ , la balance de Kibble permet de ramener la mesure d'une masse à des mesures de fréquences.