

Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

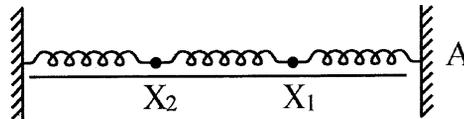
Épreuve A : Composition de Physique - Session : 1995

PARTIE A

ONDES STATIONNAIRES, MODES PROPRES ET RÉSONANCE EN MÉCANIQUE

A.1. OSCILLATEURS COUPLÉS.

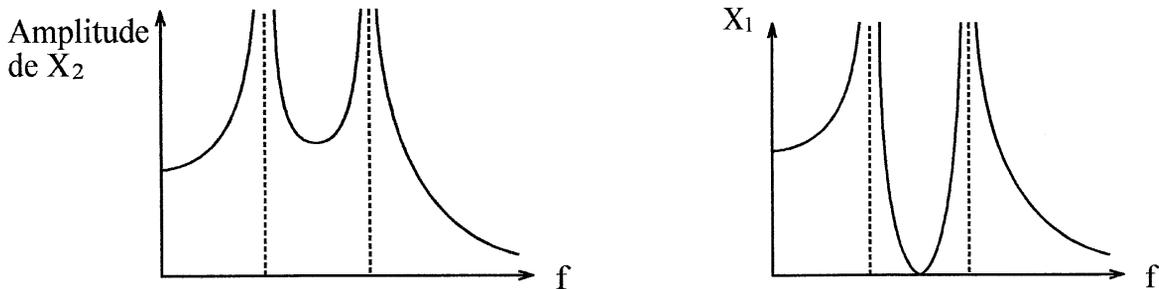
A.1.a. Exemple d'oscillateurs : deux masses mobiles en translation reliées par des ressorts à un support fixe.



Un mode propre est un mouvement où les deux oscillateurs vibrent sinusoïdalement à la même fréquence. Le mouvement de l'ensemble est périodique.

Si on écarte un oscillateur de la position de repos, on observe ensuite le démarrage progressif (couplage faible) des oscillations de l'autre et l'atténuation des oscillations du premier. Il y a transfert d'énergie entre les oscillateurs. Le transfert s'effectue ensuite dans l'autre sens (→ battements). Les frottements conduisent à un amortissement des oscillations.

A.1.b. La mise en mouvement de l'extrémité du ressort fixée en A (dessin de la question précédente) permet de simuler une force $f = f_0 \cos \omega t$. Pour certaines fréquences l'amplitude des oscillations devient infinie (ou maximale en présence de frottements) : résonance, ou nulle (minimale en présence de frottements) : antirésonance.



A.1.c. A.1.c.1.

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -K(u_n - u_{n-1}) - K(u_n - u_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad \text{c.q.f.d. avec } \omega_0^2 = \frac{2K}{m}$$

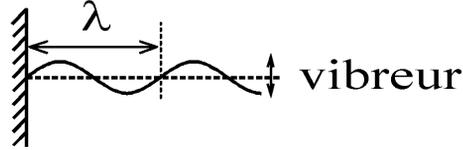
ω_0 est une pulsation (pulsation des oscillations de M_n à $M_{n\pm 1}$ fixés) sa dimension est l'inverse d'un temps (unité rad s^{-1}).

A.1.c.2.

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\sim a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u_{n-1} - u_n &\sim -a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \text{ de plus } \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (x = na)$$

$$\Rightarrow \text{ c.q.f.d. avec } c = \frac{\omega_0 a}{\sqrt{2}}$$

A.2. CORDE VIBRANTE.

A.2.a. **Expérience de la corde de Melde.**

Une corde est tendue entre un support fixe et un vibreur oscillant perpendiculairement à la position au repos de la corde. Un stroboscope permet l'observation «ralentie» de la corde. Les ondes stationnaires créées ont une amplitude dépendant de la fréquence. L'observation de la corde permet de mesurer la longueur d'onde associée à chaque fréquence (mesures possibles au voisinage des résonances) $\lambda = c/\text{fréquence}$. On peut alors déterminer la célérité des ondes (le stroboscope permet de mesurer la fréquence).

A.2.b. **Équation des cordes vibrantes.**

A.2.b.1. L'élément compris entre x et $x + dx$ est soumis aux forces $\vec{T}(x + dx)$ et $-\vec{T}(x)$ (en négligeant le poids) soit environ (au total) $\frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx$. Son accélération est $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y$. Alors

$$\mu dx \vec{a} = \Sigma \vec{F} \text{ permet d'écrire - en projection sur } \vec{u}_x \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow T_x = \text{cte} - \text{en projection}$$

$$\text{sur } \vec{u}_y \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}. \text{ Or } \vec{T} \text{ est tangent à la corde donc : } \frac{T_y}{T_x} = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow T_y = T \frac{\partial y}{\partial x}.$$

$$\text{Finalement} \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

A.2.b.2.

$$y(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Si G est nulle

$$y(x, t) = F(x - ct)$$

Alors

$$y(x + \Delta x, t + \Delta t) = y(x, t) \quad \text{si } \Delta x = c\Delta t$$

Il s'agit d'une onde progressive se propageant à la célérité c dans le sens x croissant (idem pour G dans le sens x décroissant).

A.2.b.3. Exemple :

$$\mu = 1 \text{ g/m} \quad T = 10 \text{ N} \Rightarrow c = 100 \text{ m/s}$$

A.2.c. **Modes propres.**

A.2.c.1.
$$c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \omega^2 f = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = A \sin\left(\frac{\omega}{c} x + \varphi\right)$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \quad (\text{ou } \pi) \quad f(L) = 0 \Rightarrow \frac{\omega L}{c} = n\pi$$

Les seules pulsations possibles vérifient $\omega_n = n\omega_1 \quad \omega_1 = \frac{\pi c}{L}$

Tous les points de la corde vibrent ici à la même pulsation (mode propre). Il y a une infinité de modes propres.

A.2.c.2.

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin 2n\pi \frac{x}{2L}$$

série de Fourier d'une fonction impaire (sin) de période 2L.

$$\left. \begin{array}{l} y(x, 0) = 3b \sin \frac{\pi x}{L} - b \sin \frac{3\pi x}{L} \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(x, t) = b \left\{ 3 \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi c t}{L} - \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{3\pi c t}{L} \right\}$$

De façon générale, $y(x, t)$ est construit par superposition des modes propres (équation linéaire). En présence de termes d'amortissement, l'amplitude du mode n décroît d'autant plus vite que n est grand. Le mode fondamental domine assez rapidement.

A.2.d. **Ondes stationnaires - Résonance.**

A.2.d.1. Onde stationnaire : plus de propagation apparente, tous les points vibrent en phase (ou en opposition de phase). Certains points ne bougent jamais.

A.2.d.2.

$$c^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \omega^2 f = 0 \quad + \quad \text{conditions limites} \Rightarrow f(x) = b \frac{\sin\left(\frac{\omega}{c} (L - x)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{c} L\right)}$$

Nœud : pas de mouvement $L - x = n \frac{\pi c}{\omega} = n \frac{\lambda}{2}$

Ventre : amplitude maximale $L - x = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$

Les nœuds successifs sont distants de $\frac{\lambda}{2}$. $x = 0$ n'est pas un nœud.

$$\sin \frac{\omega}{c} (L - x) \cos \omega t = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\omega}{c} (L - x) + \omega t\right) + \sin\left(\frac{\omega}{c} (L - x) - \omega t\right) \right]$$

est la superposition de deux ondes progressives que l'on peut considérer comme une onde incidente (dans le sens x croissant) et une onde réfléchie en $x = L$.

A.2.d.3. Pour $\sin \frac{\omega L}{c} \rightarrow 0$, l'amplitude tend vers l'infini : résonance. L'amplitude b en $x = 0$ est négligeable par rapport à l'amplitude des ventres. $x = 0$ est pratiquement un nœud. Les pulsations de résonance sont identiques à celles des modes propres. Cela est général en l'absence de frottements. L'amplitude des ventres à la résonance (ici infinie) est en réalité finie à cause des frottements et de la non linéarité des équations exactes.

A.3. PUIITS DE POTENTIEL EN MÉCANIQUE QUANTIQUE.

A.3.a. États stationnaires.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Un état stationnaire correspond à $\|\Psi\|^2$ indépendant de t . La probabilité de présence est indépendante de t .

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + V(x) \phi = E \phi$$

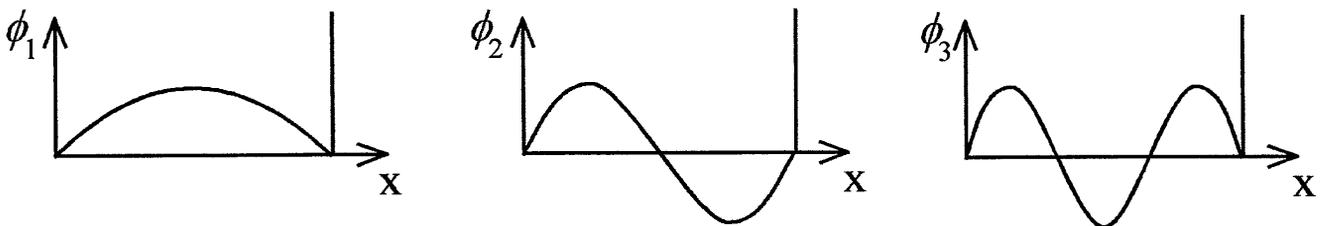
A.3.b. Puits de potentiel infini.

A.3.b.1. En $x = 0$ et $x = L$ on doit avoir $\phi = 0$ (continuité de ϕ mais pas de $\frac{d\phi}{dx}$ car le saut de potentiel est infini).

$$\text{Alors } \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ (normalisé pour avoir } \int_0^L \phi_n^2 dx = 1).$$

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

A.3.b.2. Même forme que pour la corde.



A.3.b.3.

$$\Psi\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\exp\left(-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right) - \exp\left(-\frac{9iE_1 t}{\hbar}\right) \right) = \frac{2i}{\sqrt{L}} \exp\left(-\frac{5iE_1 t}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{4E_1 t}{\hbar}\right)$$

$\|\Psi\|^2$ est proportionnel à $\sin^2\left(\frac{4E_1 t}{\hbar}\right)$ et oscille donc au cours du temps entre 0 et sa

valeur maximale à la pulsation $\frac{8E_1}{\hbar}$ (c'est-à-dire $\frac{E_3 - E_1}{\hbar}$).

A.3.b.4. Atome H : $E_1 = 37 \text{ eV}$; puits quantique : $5,3 \cdot 10^{-2} \text{ eV} = E_1$;
 à 300 K $k_B T = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$ est du même ordre de grandeur que les différences
 d'énergie entre les premiers niveaux.

Pour la transition $1 \rightarrow 2$: $E_2 - E_1 = 3E_1 = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 7,8 \mu\text{m}$ (infrarouge). Les
 raies seront très larges ($k_B T \sim \Delta E$).

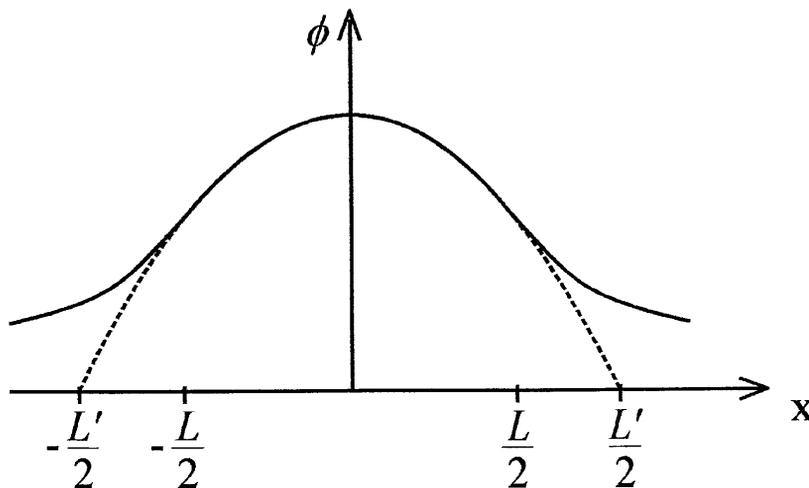
A.3.c. **Puits de potentiel fini.**

A.3.c.1. Pour $|x| > \frac{L}{2}$ $\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \phi \Rightarrow \phi = A \exp -\frac{|x|}{\delta}$ (en évitant $\phi \rightarrow \infty$ _{$x \rightarrow \infty$})

avec $\delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}}$ «profondeur de pénétration». La décroissance exponentielle
 correspond au fait qu'au-delà de $\sim \delta$ la particule ne peut pratiquement pas exister avec
 $E < V_0$.

A.3.c.2. En $x = \pm \frac{L}{2}$ ϕ et $\frac{d\phi}{dx}$ sont continues : graphe sans saut ni point anguleux.

A.3.c.3. En prolongeant le cosinus au-delà de $|x| = \frac{L}{2}$ on constate que la forme donnée correspond
 à une cavité étudiée au A.3.b. de largeur $L' > L$ donc d'énergie $E_F < E_{\text{puits infini}}$.



A.3.c.4. $\delta = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Deux puits successifs présenteront un couplage significatif si la largeur n'est pas
 supérieure à quelques δ soit quelques nm. Le niveau E_F sera alors dédoublé.

PARTIE B

**ONDES STATIONNAIRES, MODES PROPRES
ET RÉSONANCE EN ÉLECTROMAGNÉTISME**

B.1. PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE.

B.1.a. **Équation d'ondes.**

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \square = \Delta - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \square \vec{E} = 0 \quad \square \vec{B} = 0 \quad \square f = 0 \quad (E) \end{aligned}$$

Onde plane : f ne dépend que de x (et de t). $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. c vaut exactement 299 792 458 m/s.

Cela sert de définition du mètre. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ S.I. fixe l'Ampère.

B.1.b. **Structure des ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement.**

Direction de propagation : $\vec{u} = \vec{u}_x$ (axe x). Direction de polarisation : direction constante de \vec{E} (direction de \vec{E}_0).

L'onde est transverse $\vec{E} \cdot \vec{u} = 0 \quad \vec{B} \cdot \vec{u} = 0 \quad \vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$

En notation complexe $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - kx)}$

(avec $\underline{\vec{E}}_0 = \vec{E}_0 \quad \underline{\vec{B}}_0 = \vec{B}_0 e^{i\phi}$ (en fait ici on peut prendre $\phi = 0$)).

$$\underline{Z} = \mu_0 \frac{\underline{E}}{\underline{B}} \quad |\underline{Z}| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \quad (\text{impédance du vide})$$

Les ondes acoustiques sont longitudinales.

B.2. RÉFLEXION SUR UN PLAN MÉTALLIQUE CONDUCTEUR PARFAIT. ONDES STATIONNAIRES.

B.2.a. **Effet de peau dans un conducteur.**

En régime variable, les champs \vec{E} et \vec{B} et les courants ne sont non négligeables que sur une couche superficielle (peau) à la surface d'un conducteur.

$$\gamma_{\text{cu}} \sim 10^8 \text{ SI} \quad \lambda \left(\begin{array}{l} \text{radio FM} \\ 100 \text{ MHz} \end{array} \right) = 3 \text{ m} \quad \delta = 2,9 \cdot 10^{-6} \sqrt{\lambda} = 5 \mu\text{m}$$

Une onde radio ne peut traverser une feuille de cuivre. Les micro-ondes ne peuvent non plus traverser un plat métallique et sont (en particulier) réfléchies vers l'émetteur.

B.2.b. Conditions aux limites imposées par un conducteur parfait.

Conducteur parfait : limite $\gamma \rightarrow \infty$ soit $\delta \rightarrow 0$. Un conducteur réel se comporte comme un conducteur parfait si toutes les dimensions caractéristiques du problème étudié sont grandes devant δ (longueur d'onde dans le vide, épaisseur du conducteur, taille d'une cavité...).

$$\vec{E}_{\text{②}} - \vec{E}_{\text{①}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \vec{B}_{\text{②}} - \vec{B}_{\text{①}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$

Ici $\vec{E}_{\text{①}} = 0 \quad \vec{B}_{\text{①}} = 0$

Conditions imposées : \vec{E}_t et B_n nuls dans le vide au voisinage du conducteur parfait.

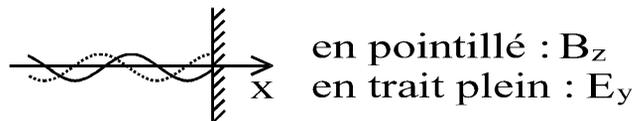
B.2.c. Réflexion d'une OPPM sur un plan métallique conducteur parfait.

Pour $x < 0$ on ajoute une onde réfléchie (\vec{E}'_0) à l'onde incidente :

$$\vec{E}_t = 0 \text{ pour } x = 0^- \Rightarrow \vec{E}'_0 = -E_0 \vec{u}_y$$

d'où
$$\vec{E} = 2 E_0 \vec{u}_y \sin \omega t \sin kx \quad \vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_i}{c} + \frac{-\vec{u}_x \wedge \vec{E}'_{\text{réfléchi}}}{c}$$

$$\vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \vec{u}_z \cos \omega t \cos kx$$



Nœud de E = ventre de B

Nœud de B = ventre de E

$$\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin 2\omega t \sin 2kx \vec{u}_x$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est nulle. Il n'y a pas de propagation globale de l'énergie.

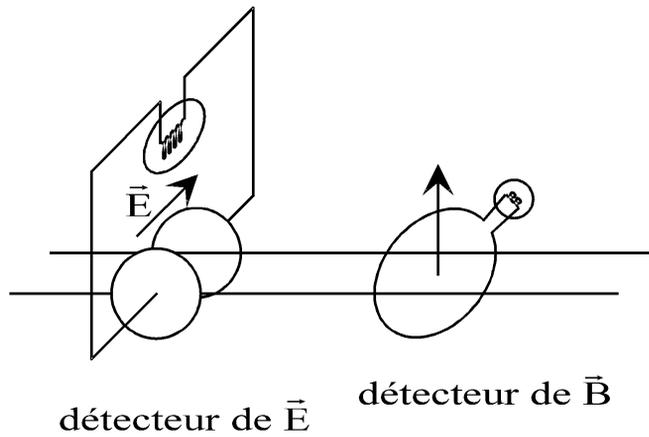
B.3. LIGNE BIFILAIRE : IMPÉDANCE ET TAUX D'ONDES STATIONNAIRES.

B.3.a. Dispositif expérimental : fils de Lécher.

Un générateur H.F. alimente deux conducteurs métalliques parallèles.

Une diode ou un circuit avec une ampoule permet de détecter le champ électrique.

Une boucle permet la détection du champ \vec{B} . En déplaçant les détecteurs le long des conducteurs on repère les nœuds et les ventres des champs. On peut alors mesurer la longueur d'onde.



B.3.b. Équation d'ondes - Impédance.

Pour une onde **transverse électromagnétique** où $\vec{E} = \vec{E}_0(y, z) e^{i(kx - \omega t)}$ l'équation de Maxwell-Faraday permet de montrer que $\text{rot}(\vec{E}_0) = 0$ donc $\vec{E}_0 = -\text{grad} V$. Alors, dans un plan $x = \text{cte}$ les conducteurs formant la ligne bifilaire peuvent s'étudier comme des conducteurs en équilibre **électrostatique**, bien qu'on soit en **régime variable**.

$$v(x + dx, t) - v(x, t) = -\Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

$$i(x + dx, t) - i(x, t) = -\Gamma dx \frac{\partial}{\partial t} (v(x + dx)) \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(1)}{\partial t} - \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial(2)}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial(1)}{\partial x} - \Lambda \frac{\partial(2)}{\partial t} &\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{équations de d'Alembert de célérité } c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$$

$$\text{si } i = f(x - ct) \quad \text{et} \quad v = g(x - ct) \quad (1) \Rightarrow f' = (\Lambda c)^{-1} g' \Rightarrow f = (\Lambda c)^{-1} g$$

(en prenant nulles les constantes d'intégration)

$$\frac{v}{i} = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_C$$

B.3.c. Réflexion sur une charge.

B.3.c.1. Coefficient de réflexion et taux d'ondes stationnaires.

Pour une onde progressive $v = \pm Z_C i$ (signe + pour propagation dans le sens $x \nearrow$)

$$\text{donc : } \underline{v} = A Z_C \left[\exp j(\omega t - kx) - \rho \exp j(\omega t + kx) \right]$$

$$\text{en } x = 0 \quad \frac{v}{i} = \underline{Z} = Z_C \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right) \Rightarrow \rho = \frac{Z_C - \underline{Z}}{Z_C + \underline{Z}}$$

$$\left. \begin{aligned} Z = 0 & \quad \rho = 1 \\ Z \rightarrow \infty & \quad \rho = -1 \end{aligned} \right\} \text{onde réfléchie de même amplitude que l'incidente avec déphasage}$$

de 0 ou π .

Il n'y a pas d'onde réfléchie si ($\rho = 0$) $\underline{Z} = Z_C$.

$$TOS_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{\text{amplitude max de } v}{\text{amplitude min de } v} \right)$$

La mesure du TOS ne donne pas l'argument de ρ . Il faut étudier la position des extrema d'amplitude (pour accéder à l'argument de ρ).

B.3.c.2. *Ligne quart d'onde.*

En $x = \frac{-\lambda}{4}$ $\exp(-j kx) = j$ $\exp(+j kx) = -j$

donc $\frac{v}{i} = \underline{Z}_{eq} = Z_C \frac{j + \rho j}{j - \rho j} = Z_C \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{Z_C^2}{\underline{Z}}$

B.3.c.3. *Adaptation d'impédance.*

On doit avoir $Z_{eq} = Z_C$ soit $Z_C = \frac{Z'^2}{R}$ $Z'_C = \sqrt{RZ_C}$.

Un problème analogue en optique correspond à la couche anti-reflet dont on peut recouvrir la surface d'un verre. En acoustique on utilise de la glycérine sur la peau pour les échographies.

B.4. CAVITÉ ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

B.4.a. **Modes propres d'une cavité parallélépipédique.**

B.4.a.1.

$$E(x = a) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{n_x \pi}{a}$$

De même $k_y = \frac{n_y \pi}{b}$ $k_z = \frac{n_z \pi}{d}$

La plus petite valeur de $k = \frac{\omega}{c}$ est $\pi \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} \right]^{1/2}$ correspondant à :

$$n_x = n_y = n_z = 1 \quad \omega_C = \pi c \left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2} \right]^{1/2} = 2\pi f_C$$

Application Numérique : $f_C = 9,8 \text{ GHz}$

B.4.a.2.

$$Q = \frac{\text{Énergie emmagasinée}}{\text{Puissance dissipée}} \times \omega$$

Les pertes viennent des parois des conducteurs (non parfaits) $\Delta f = \frac{f_C}{Q} = 0,39 \text{ MHz}$.

B.4.b. Densité de modes.

Le domaine correspondant à $[\omega, \omega + d\omega]$ est compris dans l'espace des \vec{k} entre deux sphères de rayons $\frac{\omega}{c}$ et $\frac{\omega + d\omega}{c}$. D'autre part, changer k_x en $-k_x$ ne change pas le champ. On ne considère donc que les valeurs positives de k_x, k_y ou k_z . Le volume est alors $\frac{1}{8} 4\pi \frac{\omega^2 d\omega}{c^3}$.
Chaque mode occupe un volume $\frac{\pi}{a} \times \frac{\pi}{b} \times \frac{\pi}{d} = \frac{\pi^3}{V}$ d'où $dN = V \omega^2 d\omega / 2\pi^2 c^3$.

B.5. GUIDE D'ONDES.

B.5.a. Fréquence de coupure.

$$\text{Nécessairement} \quad \omega_n \geq \omega_c = \frac{\pi c}{a} \quad f_c = \frac{c}{2a} = 7,5 \text{ GHz}$$

Les quartz servant de base de temps vibrent à des fréquences notablement inférieures à f_c . L'entrée en résonance de la cavité (par variation de l) permet de déterminer la fréquence $\left(\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \left(\frac{n_x^2}{l^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{d^2} \right) \right)$.

B.5.b. Polarisation des ondes dans un guide d'ondes.

$$\text{B.5.b.1.} \quad \omega_{C_b} < \omega < \omega_{C_a}$$

On ne peut donc avoir que le mode où $\vec{E} \sim \sin \frac{\pi}{b} y \vec{u}_x$ c'est-à-dire $\vec{E} //$ petit côté.

B.5.b.2. Lorsque les fils sont parallèles au petit côté du guide (donc à \vec{E}) les électrons du conducteur se mettent en mouvement sous l'action de \vec{E} . La grille se comporte comme un conducteur. Il n'y a pas d'onde transmise. Par contre si les fils sont perpendiculaires à \vec{E} , les électrons ne peuvent se mouvoir. L'onde est transmise. Le système est un polariseur rectiligne. On pourrait illustrer la loi de Malus $I = I_0 \sin^2 \alpha$ ($\alpha =$ angle \vec{E} , fils).

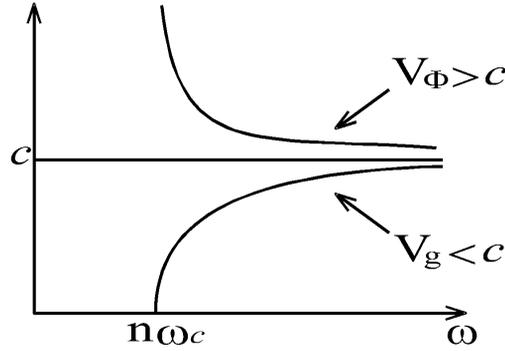
En considérant la grille comme un ensemble de guides d'ondes, elle peut transmettre l'onde si $\omega > \frac{\pi c}{d}$ soit $d > \frac{\pi c}{\omega}$.

B.5.c. Vitesse de phase - Vitesse de groupe.

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - n^2 \omega_c^2}} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{n^2 \omega_c^2}{\omega^2}}$$

Un paquet d'ondes est une superposition d'ondes de fréquences très voisines. La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie (ou de l'enveloppe du paquet d'ondes).

$v_\phi > c$ n'est pas gênant car il s'agit de la vitesse de propagation d'un signal purement sinusoïdal et qui ne transporte donc aucune information.



B.5.d. Structure des modes TE.

Mode TE : $\vec{E} \perp$ direction de propagation.

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{B} = E^0 \left[-\frac{k}{\omega} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x - \frac{n\pi}{a\omega} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin(\omega t - kz) \vec{u}_z \right]$$

$B_z \neq 0 \Rightarrow \vec{B}$ n'est pas transversal.

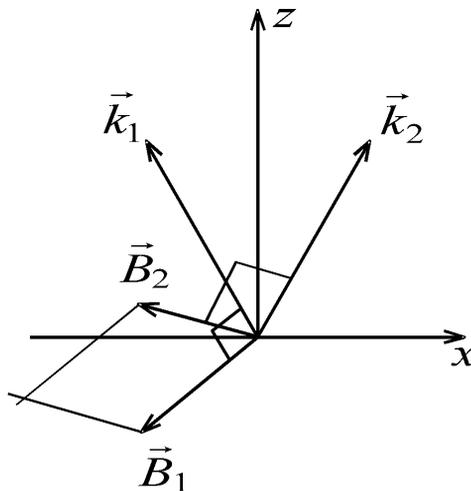
\vec{E} se propage selon z et dépend de x : l'onde n'est pas plane.

$$\vec{E} = \frac{E_0}{2} \vec{u}_y \left[\sin(\omega t - (kz - \alpha x)) - \sin(\omega t - (kz + \alpha x)) \right]$$

C'est la superposition de deux ondes planes de vecteurs d'onde $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$

$$\left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{E_0^2 k}{2\omega \mu_0} \sin^2 \frac{n\pi x}{a} \vec{u}_z$$

$\left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle \parallel \vec{u}_z \Rightarrow$ propagation de l'énergie selon \vec{u}_z .



On peut calculer la vitesse de propagation de l'énergie $\vec{v} = \frac{\langle\langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle\rangle / \mu_0}{\langle\langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle\rangle}$ où $\langle\langle \rangle\rangle$ signifie une valeur moyenne par rapport à t et à x. On trouve alors $\vec{v} = v_g \vec{u}_z$.

B.5.e. Dispersion modale.

$$v_{\phi_1} \neq v_{\phi_2} \Rightarrow t_1 = \frac{L}{v_{\phi_1}} \neq \frac{L}{v_{\phi_2}} = t_2$$

Le signal est déformé au cours du parcours. Le guide est monomode si seul le mode TE_1 se propage :

$$\frac{\pi c}{a} < \omega < \frac{2\pi c}{a}$$

On évite alors la dispersion modale. Ce problème se retrouve en optique dans la conception des fibres optiques. Un guide d'onde à cavité non simplement connexe permet la propagation sans dispersion de modes transverses (câble coaxial).

B.5.f. Expérience : TOS dans un guide d'ondes.

- i. Plaque de cuivre analogue à court-circuit $\Rightarrow |\rho| = 1$
- ii. Rien analogue à circuit ouvert $\Rightarrow |\rho| \approx 1$
- iii. Un cornet analogue à impédance $\Rightarrow |\rho| \in]0, 1[$ TOS < 1 (en fait $|\rho| \ll 1$)
- iv. Charge adaptée $\Rightarrow \rho = 0$ TOS = 0

Dans le cas ii. l'impédance du vide n'est pas infinie $|\rho| < 1$.

Le cornet permet de transmettre une grande partie de l'énergie vers le vide. La charge adaptée évite le retour du signal vers l'émetteur.

B.6. INTERFÉROMÈTRE DE FABRY-PÉROT ET LASER.

B.6.a. Interféromètre de Fabry-Pérot.

B.6.a.1.

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2e = 2e \frac{\omega}{c}$$

B.6.a.2. Le rayon k subit k réflexions sur L_1 et k sur L_2 donc $\underline{a}_k = (r_1 r_2 e^{i\phi})^k a_0 t_1 t_2$

$$\frac{\underline{a}_{k+1}}{\underline{a}_k} = r_1 r_2 e^{i\phi}.$$

B.6.a.3.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underline{a}_k = t_1 t_2 a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2 e^{i\phi})^k = \frac{a_0 t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}}$$

$$\text{Alors } I = \frac{a_0^2 t_1^2 t_2^2}{\left| 1 - r_1 r_2 e^{i\phi} \right|^2} = \frac{a_0^2 t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\phi} = \frac{\frac{a_0^2 t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2}}{1 + \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

$$\text{donc } m = \frac{4r_1 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2}$$

B.6.a.4. $\Delta\omega$ est petit si m est grand donc si $r_1 r_2 \sim 1$. La cavité est alors très sélective. La résonance correspond à $\frac{\phi}{2} = n\pi$ (pour rendre nul $\sin \frac{\phi}{2}$) donc à $\omega_n = \frac{n\pi c}{e}$ → identique à une cavité de largeur e .

B.6.b. Laser.

La série calculée au B.6.a.3. diverge si $r_1 r_2 g \geq 1$.

L'amplitude est alors fixée par les phénomènes non linéaires (limites de validité de l'utilisation de $g(\omega) = \text{cte}$ indépendante de a). Une seule des extrémités du laser laisse sortir la lumière. Le laser n'est pas symétrique → $r_1 \neq r_2$.

B.6.c. Polarisation de certains lasers.

B.6.c.1. Par réflexion sur un dioptre entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 , si l'angle d'incidence vérifie $\text{tg } i = \frac{n_2}{n_1}$, le coefficient de réflexion pour une onde de plan de polarisation parallèle au plan d'incidence est nul : il n'y a pas de rayon réfléchi. Pour l'observer, il suffit d'éclairer un miroir en verre avec une onde de polarisation rectiligne. En faisant varier i , on observe la disparition du rayon réfléchi.

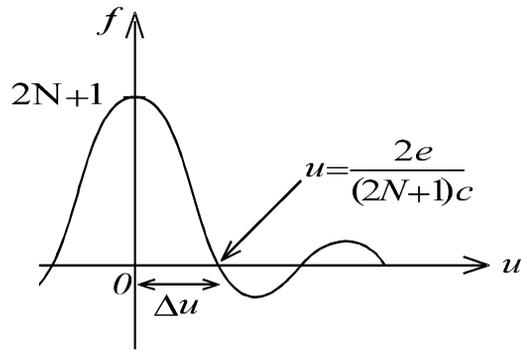
B.6.c.2. Les fenêtres de Brewster évitent toute réflexion parasite sur les faces de l'ampoule. Seuls M_1 et M_2 réfléchissent la lumière. La lumière du laser est alors polarisée avec son plan de polarisation parallèle au plan d'incidence sur les fenêtres de Brewster. Cela peut vérifier avec un analyseur (feuille de polaroïd par exemple).

B.6.d. Laser à verrouillage de modes.

$$\text{B.6.d.1. } n_{\text{modes}} = \frac{\Gamma}{\omega_n - \omega_{n-1}} = \frac{\Gamma e}{\pi c} = 106 \sim 107 = 2N + 1$$

$$\text{B.6.d.2. } a(t) = A \exp\left(j \omega_{n0} \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \sum_{-N}^N \exp\left(j \frac{k\pi c}{e} \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \Rightarrow \text{c.q.f.d.}$$

$$\text{avec } f(u) = \frac{\sin(2N+1) \frac{\pi c}{2e} u}{\sin \frac{\pi c}{2e} u}$$



(la fonction f intervient dans l'étude des réseaux).

$$\Delta u = \frac{2e}{(2N+1)c} = \frac{2\pi}{\Gamma} \sim 10^{-11} \text{ s}$$

La durée du signal est de quelques ps. On a donc un laser à impulsion.

Ce type de laser permet par exemple de visualiser des interférences entre deux ondes venant de deux lasers distincts.

J.-F. L.

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

Épreuve B : Composition de chimie - Session : 1995

A

QUELQUES ASPECTS DE L'ANALYSE CHIMIQUE QUANTITATIVE

1. Notion de quantité de matière ; stœchiométrie.

1.1. Quantité de matière.

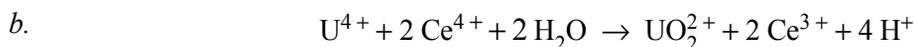
- a. La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.
- b. La masse molaire d'une entité est la masse d'une mole de cette entité ; elle s'exprime (S.I.) en $\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$.

c.

$$C = \frac{(C_1V_1 + C_2V_2)}{(V_1 + V_2)}$$

1.2. Stœchiométrie.

- a. La stœchiométrie d'une réaction est la relation qui existe entre les quantités de réactifs et de produits tels qu'ils apparaissent dans le bilan de réaction.



$$10 \text{ g KI} = 6.10^{-2} \text{ mol} \quad 30 \text{ g Pb(NO}_3)_2 = 9.10^{-2} \text{ mol}$$

I^- en défaut : on obtiendra 3.10^{-2} mol de Pb I_2 soit masse maximale 13,8 g.

2. Matériel.

3. Méthodes titrimétriques.

- 3.1. a. *Titrimétrie* : détermination du titre (concentration),
 volumétrique - par mesure de volume,
 gravimétrique - par mesure de masse,
 coulométrique - par mesure de charge.

b. Titrage direct : la concentration de l'échantillon est déterminée directement à partir de la concentration du réactif titrant.

Titrage indirect : titrage du produit formé par réaction de l'échantillon avec un excès (inconnu) d'un réactif.

Titrage en retour : titrage de l'excès de réactif ajouté en quantité connue, en excès, dans l'échantillon.

- 3.2. *a.* Point du dosage où la quantité de réactif ajoutée est exactement dans le rapport stœchiométrique avec la quantité de substrat à doser dans l'échantillon.
- b.* Point où se produit le «changement» utilisé pour repérer l'équivalence.
- c.* Écart entre le point équivalent et le point de fin de titrage (dosage).

4. Solutions standard.

4.1. Stabilité des solutions.

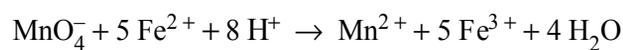
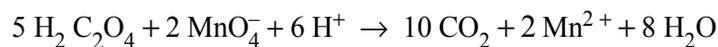
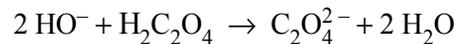
a. Acide chlorhydrique : perte HCl volatil.

Soude : carbonatation CO₂ air.

Solution ferreuse : oxydation des ions Fe²⁺ en Fe³⁺/O₂ air.

Solution KMnO₄ : MnO₄⁻ : réaction avec H₂O.

4.2. Utilisation de solutions standard secondaires.



b.
$$V_0 \cdot C_S = 2 V_A \cdot C_A \quad V_S \cdot C_S = 2 V_0 \cdot C_{\text{Ox}}$$

$$2 V_0 \cdot C_{\text{Ox}} = 5 V_{\text{Mn}} \cdot C_{\text{Mn}} \quad V_0 \cdot C_{\text{Fe}} = 5 \cdot V_{\text{Mn}} \cdot C_{\text{Mn}}$$

c.
$$C_{\text{Fe}} = \frac{2 \cdot V_{\text{Mn}} \cdot V_S \cdot V_A \cdot C_A}{V_{\text{Mn}} \cdot V_0^2}$$

d.
$$C_{\text{Fe}} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

B

PROPRIÉTÉS ET DOSAGE DE QUELQUES CONSTITUANTS D'EAUX DE DIVERSES ORIGINES

1. Généralités sur la mesure du pH.

1.1. Matériel.

- a. Électrode de verre + électrode de référence (E.C.S. ou Ag/AgCl).
- b. Voltmètre.
- c. Standardisation : $\Delta V = \alpha \text{ pH} + \beta$: réglages α et β .

1.2. Sélectivité d'une électrode de verre.

a.

	HCl	KCl	LiCl	KOH	NaOH	LiOH
pH théorique	2	7	7	12	12	12

- b.
- $$K_{\text{HK}} = 0$$
- $$K_{\text{HNa}} = 1,5 \cdot 10^{-10}$$
- $$K_{\text{HLi}} = 6,2 \cdot 10^{-9}$$

2. Propriétés des indicateurs colorés acido-basiques : détermination spectrophotométrique de la constante d'acidité d'un indicateur.

2.1. a. Transmittance : $T = \frac{I}{I_0}$

Absorbance : $A = \log \frac{I_0}{I}$ (ou densité optique)

b. Loi de Beer-Lambert : $A_i = \epsilon_i^\lambda \cdot l \cdot C_i$

2.2. a.
$$A = \left(\epsilon_A [\text{HIn}] + \epsilon_B \cdot [\text{In}^-] \right) l$$

b.
$$A_{\text{max}} = \epsilon_A \cdot C \cdot l \quad A_{\text{min}} = \epsilon_B \cdot C \cdot l$$

c.
$$A = \frac{1}{([\text{H}^+] + K_{\text{In}})} \left(A_{\text{max}} \cdot [\text{H}^+] + A_{\text{min}} \cdot K_{\text{In}} \right)$$

d.
$$\frac{A_{\text{max}} - A}{A - A_{\text{min}}} = \frac{K_{\text{In}}}{[\text{H}^+]}$$

$$\log \left(\frac{A_{\max} - A}{A - A_{\min}} \right) = \text{pH} - \text{pK}_{\text{in}}$$

$$\text{pK}_{\text{in}} = \text{pH} \quad \text{pour} \quad \log \left(\frac{A_{\max} - A}{A - A_{\min}} \right) = 0$$

2.3. a. Le rouge de méthyle forme acide absorbe à 530 nm donc couleur «rouge» en milieu acide :

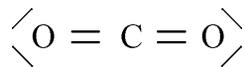
pH	4,0	4,6	5,0	5,4	6,0
$\log \frac{A_{\max} - A}{A}$	- 0,908	- 0,36	0,069	0,50	1,06

$$\text{pK}_{\text{In}} = 4,9$$

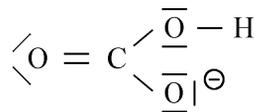
b. Point isobestique λ^* : $\epsilon_A^{\lambda^*} = \epsilon_B^{\lambda^*}$

3. Dioxyde de carbone, hydrogénocarbonate et carbonate.

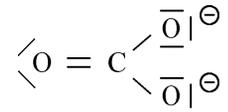
3.1.



CO₂



HCO₃⁻



CO₃²⁻

3.2. a. •

$$p_0 = \frac{K_{a1} K_{a2}}{h^2 + K_{a1} \cdot h + K_{a1} \cdot K_{a2}} \quad p_1 = \frac{K_{a1} \cdot h}{h^2 + K_{a1} \cdot h + K_{a1} K_{a2}}$$

$$p_2 = \frac{h^2}{h^2 + K_{a1} \cdot h + K_{a1} K_{a2}}$$

•
$$\frac{d p_1}{d [\text{H}^+]} = \frac{K_{a1} (K_{a1} K_{a2} - h^2)}{\left(h^2 + K_{a1} \cdot h + K_{a1} K_{a2} \right)^2} = 0 \quad \text{pour} \quad h^2 = K_{a1} \cdot K_{a2}$$

soit
$$\text{pH} = \frac{1}{2} (\text{pK}_{a1} + \text{pK}_{a2})$$

$$p_{1 \max} = \frac{K_{a1} \cdot \sqrt{K_{a1} K_{a2}}}{2K_{a1} K_{a2} + (\sqrt{K_{a1} K_{a2}}) K_{a1}} = \frac{1}{1 + 2 \sqrt{\frac{K_{a2}}{K_{a1}}}} = 97,8 \%$$

– Non, deux espèces seulement simultanément de façon notable :



– 99 % $\text{pH} < \text{pK}_{a1} - 2$: CO₂ $\text{pH} > \text{pK}_{a2} + 2$: CO₃²⁻.

- Notablement (rapport 10) CO_2 et HCO_3^- pour $\text{pK}_{a1} - 1 < \text{pH} < \text{pK}_{a1} + 1$
 HCO_3^- et CO_3^{2-} pour $\text{pK}_{a2} - 1 < \text{pH} < \text{pK}_{a2} + 1$

b. Espèces présentes Na^+ , HO^- , CO_3^{2-}

$$[\text{HO}^-] = 8,65 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{CO}_3^{2-}] = 1,55 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

Soit $1,55 \cdot 10^{-2}$ mol de CO_2 absorbé par un litre de solution de soude.

4. Chlorures.

4.1. Dosage des chlorures par la méthode de Charpentier-Volhard.

a.
$$V_{\text{Ag}} \cdot C_{\text{Ag}} > V_{\text{Cl}} \cdot C_{\text{Cl}}$$

b.
$$V_{\text{Ag}} \cdot C_{\text{Ag}} = V_{\text{Cl}} \cdot C_{\text{Cl}} + V_{\text{S}} C_{\text{S}} ; \quad C_{\text{Cl}} = \frac{V_{\text{Ag}} \cdot C_{\text{Ag}} - V_{\text{S}} \cdot C_{\text{S}}}{V_{\text{Cl}}}$$

c. A l'équivalence :
$$V_{\text{Ag}} \cdot C_{\text{Ag}} - V_{\text{Cl}} \cdot C_{\text{Cl}} - V_{\text{S}} \cdot C_{\text{S}} = 0$$

$$V_{\text{Ag}} \cdot C_{\text{Ag}} = n_{\text{AgCl}} + n_{\text{AgSCN}^+} + n_{\text{Ag}^+}$$

$$V_{\text{Cl}} \cdot C_{\text{Cl}} = n_{\text{Cl}^-} + n_{\text{AgCl}}$$

$$V_{\text{S}} \cdot C_{\text{S}} = n_{\text{SCN}^-} + n_{\text{AgSCN}^+} + n_{\text{FeSCN}^{2+}}$$

- Soit
$$[\text{Ag}^+] - [\text{Cl}^-] - [\text{SCN}^-] - [\text{FeSCN}^{2+}] = 0$$

- Soit
$$[\text{Ag}^+] - \frac{K_{s1}}{[\text{Ag}^+]} - \frac{K_{s2}}{[\text{Ag}^+]} - [\text{FeSCN}^{2+}] = 0$$

$$[\text{Ag}^+]^2 - [\text{FeSCN}^{2+}] [\text{Ag}^+] - 2,005 \cdot 10^{-10} = 0$$

- Application :
$$[\text{FeSCN}^{2+}] = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{Ag}^+] = 1,77 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{SCN}^-] = \frac{10^{-12}}{1,77 \cdot 10^{-5}} = 5,65 \cdot 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{Fe}^{3+}] = \frac{[\text{FeSCN}^{2+}]}{[\text{SCN}^-] \cdot 10^{3,1}} = \frac{6,4 \cdot 10^{-6}}{5,65 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{3,1}} = 8,99 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

d.

$$C_{Cl} = \frac{V_{Ag} \cdot C_{Ag} - V_S \cdot C_S}{V_{Cl}} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

e. Avec x ml de solution ferrique $C_{Fe} = 2 \text{ mol.L}^{-1}$ à l'équivalence :

$$[Fe^{3+}] = \frac{2x}{(81+x)} = 8,99 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$x = 3,8 \text{ mL}$$

avec seulement quelques gouttes de Fe^{3+} , il faut «davantage de SCN^- » donc erreur par excès de SCN^- ajouté et donc par défaut pour C_{Cl}

4.2. Dosage potentiométrique d'une solution de chlorure.

a. – Utiliser une allonge (contre la diffusion des ions Cl^-).

$$b. \quad E = E^0 + 0,06 \log \frac{K_{s1}}{[Cl^-]}$$

$$c. \text{ – Avant l'équivalence : } \quad E = E^0 + 0,06 \log \frac{K_{s1} (V_{Ag} + V_{Cl})}{V_S C_{Cl} - V_{Ag} \cdot C_{Ag}}$$

$$\text{– Après l'équivalence : } \quad E = E^0 + 0,06 \log \frac{V_{Ag} \cdot C_{Ag} - V_{Cl} \cdot C_{Cl}}{V_{Ag} + V_{Cl}}$$

$$\text{– A l'équivalence : } \quad [Ag^+] = \sqrt{K_{s1}}$$

$$E = E^0 - 0,03 \text{ p}K_{s1}$$

$$d. \text{ – } \quad C_{Cl} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \quad \left(0,1 \cdot \frac{15}{20} \right)$$

$$\text{– } \quad 0,29 = E^0 + 0,06 \log \frac{K_{s1} \times 23}{20 \cdot C_{Cl} - 0,3}$$

$$0,71 = E^0 + 0,06 \log \frac{3 - 20 \times C_{Cl}}{50}$$

on en tire :

$$E^0 = 0,80 \text{ V}$$

$$\log K_{s1} = -9,8 \quad K_{s1} = 1,56 \cdot 10^{-10}$$

5. Dosage de traces de métaux dans une eau de consommation.

5.1. Méthode : dosage par la méthode de l'incrément connu (ajouts dosés).

Si $G = a \cdot C$

$G + \Delta G = a (C + \Delta C)$

$$C = \Delta C \cdot \frac{G}{\Delta G}$$

5.2. Technique : «redissolution anodique».

a. Sens des potentiels croissants (oxydation anodique).

b. Plomb : $C_1 = \frac{1,56 \times 10^{-8}}{0,32} = \Delta C \times \frac{i}{\Delta i} = 4,9 \cdot 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$

Cadmium : $C_2 = \frac{0,28 \times 10^{-8}}{0,66} = \Delta C \times \frac{i}{\Delta i} = 4,24 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$

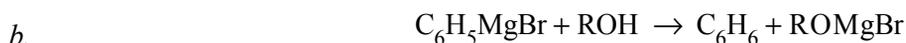
C

DOSAGE D'UN ORGANOMAGNÉSIEU ET PRÉPARATION DE QUELQUES COMPOSÉS ORGANIQUES : BENZALDÉHYDE, ALCOOL BENZYLIQUE ET ACIDE BENZOÏQUE1. Dosage d'une préparation d'organomagnésium C_6H_5MgBr .

Solvant anhydre, par exemple éther.

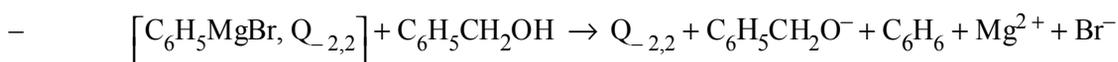
Absence totale d'eau, verrerie séchée à l'étuve.

Atmosphère inerte, par exemple azote.



c. – Coloration : formation du complexe.

– Décoloration : «destruction» de l'organomagnésium, disparition du complexe coloré.



– $C_{OM} \cdot V_{OM} = C_{AB} \cdot V$

2. Action de l'orthoformiate d'éthyle $\text{HC}(\text{OC}_2\text{H}_5)_3$ sur le bromure de phénylmagnésium.

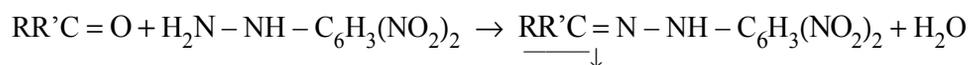
Présence d'un carbone site électrophile.

2.1. Protocole expérimental.

a. – Utilité NaHCO_3 : neutralisation HCl en excès.

– Dégagement de CO_2 .

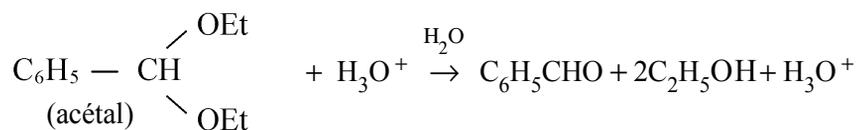
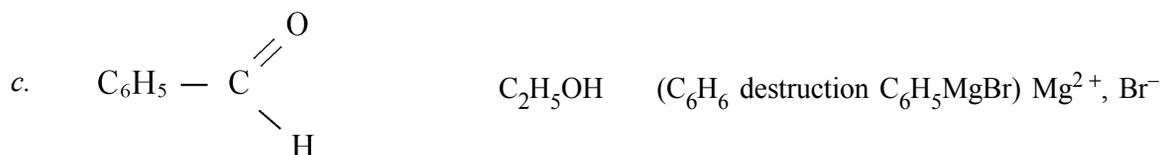
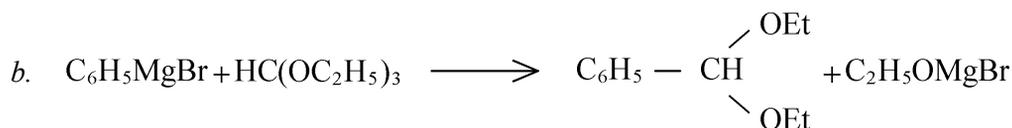
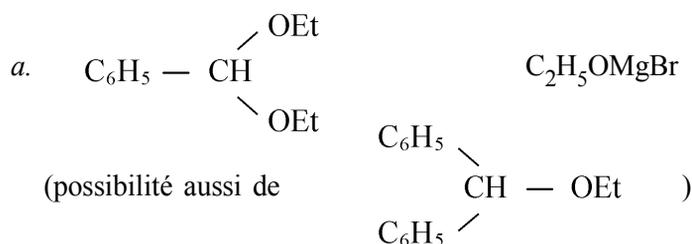
b. – 2,4 DNPH ; milieu acide



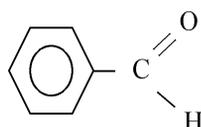
– Analyse mélange : spectro IR, chromatographie.

– Chromatographie, précipitation d'un dérivé caractéristique du carbonyle.

2.2. Discussion.



On obtient le benzaldéhyde



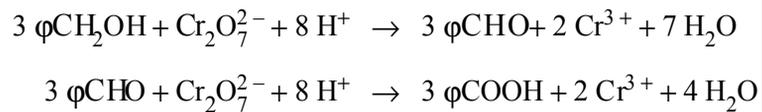
d. Accès aux aldéhydes à partir des dérivés bromés. On passe de n à $n + 1$ atomes de carbone, l'atome de carbone de l'aldéhyde provient de l'orthoformiate d'éthyle.

3. Oxydation de l'alcool benzylique $C_6H_5CH_2OH$ en benzaldéhyde C_6H_5CHO .

3.1. Oxydation d'un alcool primaire.

a. $Cr_2O_7^{2-}$ ou MnO_4^-

–

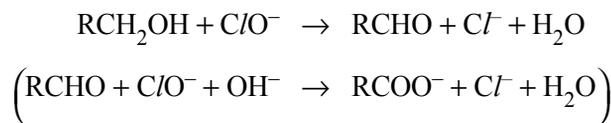


b. – Non, l'aldéhyde s'oxyde facilement en acide.

– Introduction oxydant dans l'alcool et distillation (oxydant toujours en défaut).

c. – Eau de javel.

–



On opère souvent en introduisant l'eau de javel dans un mélange alcool + acide acétique.

3.2. Protocole expérimental (description simplifiée).

a. Réfrigérant à boules (condensation vapeurs solvant), ballon, chauffe-ballon.

b. La température est limitée à la température d'ébullition du solvant, temps de réaction long.

3.3. Discussion.

a. $2 C_6H_5CH_2OH + Ca(ClO)_2 \rightarrow 2 C_6H_5CHO + 2 H_2O + Ca^{2+} + 2 Cl^-$

—————↓

b. – $Ca(ClO)_2$ n'est pas soluble dans la phase organique.

– Non, passage «interdit» (composé ionique : hydrophile).

– Bu_4N^+ est un agent de transfert de phase : le passage est possible pour (Bu_4N^+, ClO^-) .

– $2 Bu_4N^+, HSO_4^- + Ca(ClO)_2 \rightarrow Ca^{2+} + 2 HSO_4^- + 2 (Bu_4N^+, ClO^-)$

(solution) (solide)² (solide) (solution)

c. Réaction.

– $C_6H_5CH_2OH + (Bu_4N^+, ClO^-) \rightarrow C_6H_5CHO + (Bu_4N^+, Cl^-) + H_2O$

– $(Bu_4N^+, Cl^-) + HSO_4^- \rightarrow Cl^- + (Bu_4N^+, HSO_4^-)$

solution solide solide solution
($Ca(HSO_4)_2$) ($CaCl_2$)

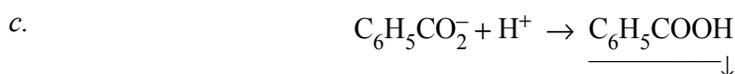
– Formation de chlorure de calcium $CaCl_2$.

- H₂O passe en phase solide, «captée» par CaCl₂.
- d. - L'absence d'eau dans le milieu évite que l'aldéhyde ne forme son hydrate, intermédiaire pour l'oxydation ultérieure en acide.
 - On évite l'emploi de solutions aqueuses en quantités importantes.
- e. RSO₃⁻, ROSO₃⁻, éthers - couronnes (ou macrocycles)...

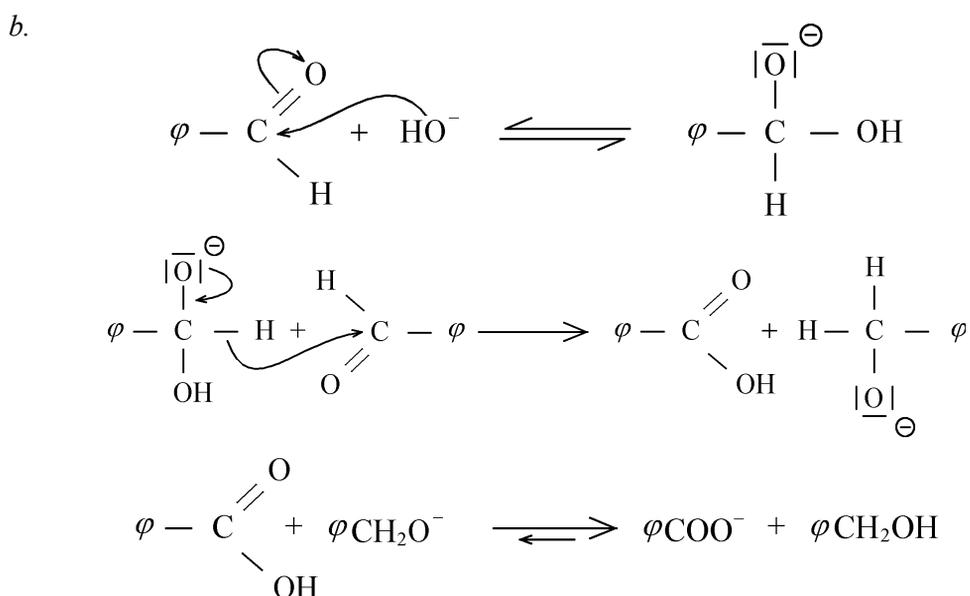
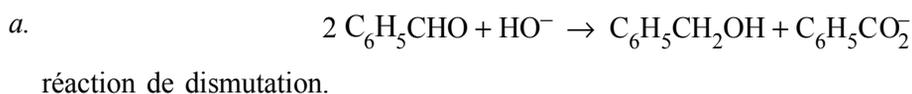
4. Réaction de Cannizzaro.

4.1. Protocole expérimental.

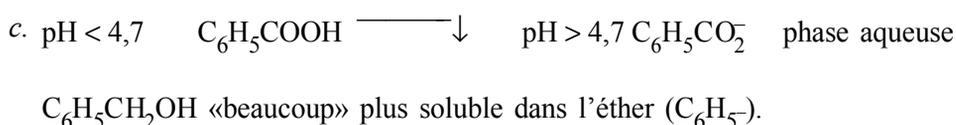
- a. Ici, l'éther diéthylique est au-dessus. Sinon, addition d'une petite quantité d'eau et observation.
- b. - Na₂SO₄ anhydre : au chaud (étuve).
 - Élimination de H₂O dans la phase éther («séchage»).



4.2. Discussion.



pas de liaison CD, H vient de l'aldéhyde.



Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

Épreuve C : Problème de Physique - Session : 1995

L.Boyer et A.Pocheau

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre
Case 252, Université Saint-Jérôme, 13397 Marseille Cedex 20

COMMENTAIRES GENERAUX

Ce problème traite de divers aspects de physique de combustion en phase gazeuse et, en particulier, de la propagation d'une interface, appelée front de flamme. Ce phénomène représente la voie choisie par le système, initialement hors-équilibre, pour parvenir à l'équilibre thermodynamique. Les buts de l'étude consistent à déterminer son "efficacité" en terme de vitesse de propagation d'interface, à mettre en lumière son irréversibilité par l'introduction d'une fonction de Lyapunov, à étudier les conditions de son initiation et de son observation et enfin à expliciter son comportement en présence de mélange turbulent.

Le second principe de la thermodynamique ne contenant aucune échelle de temps se révèle sans utilité pour déterminer la vitesse de flamme. Une étude plus fine du système hors-équilibre s'avère alors nécessaire. Elle comporte une première étape de nature statistique où le degré d'instabilité du mélange initial en fonction de la température est précisé par les concepts de barrière d'énergie d'activation, de loi d'Arrhénius et de taux volumique de réaction (partie I). Il s'agit cependant d'une étude à température et composition chimique homogènes qu'il convient d'adapter au cas de la flamme, interface entre des milieux de température et de composition chimique différentes. Ceci est l'objet de la partie II où sont introduits les phénomènes de transport grâce auxquels les différentes parties du milieu interagissent. L'étude de leurs bilans amène à identifier une vitesse de propagation, conséquence d'un équilibre entre advection, diffusion et réaction. Ce résultat constitue un exemple de résolution de dynamique de système dissipatif. Il présente l'intérêt de montrer comment les phénomènes de diffusion, certaines fois abusivement réputés d'effet négligeable devant ceux d'advection, peuvent, par leur caractère limitant, contrôler un phénomène propagatif.

La troisième partie s'intéresse au cas où l'évolution hors-équilibre peut-être associée à la décroissance d'une fonction d'état appelée fonction de Lyapunov. Cette situation se rencontre notamment lorsque la dynamique se réduit à celle d'une variable unique, ce qui est le cas ici lorsque les coefficients de diffusion de température et de concentration massique sont égaux. Les sens d'évolution du système ainsi que ses états finaux sont alors, au problème de stabilité près, imposés. Ceci permet de montrer la tendance à l'homogénéisation des phénomènes de diffusion indépendamment des conditions initiales, et, dans le cas des systèmes de réaction-diffusion, de retrouver, en régime permanent, la vitesse de propagation des flammes.

La quatrième partie utilise de nouveau le concept de fonction de Lyapunov, pour traiter de l'allumage de la flamme. On utilise pour cela le concept de compétition surface/volume d'une manière analogue au traitement classique des "noyaux critiques" en thermodynamique. On aboutit ainsi à un critère d'allumage montrant la faisabilité de celui-ci pour des dépôts d'énergie concentrés sur des volumes de l'ordre de l'épaisseur de flamme. La suite de cette partie montre comment le réaliser pratiquement par décharge électrique initiée par un phénomène d'ionisation par avalanche.

La cinquième partie utilise l'inhomogénéité de température associée à la flamme pour concevoir un dispositif optique de mesure de sa vitesse et de son épaisseur.

La sixième partie, enfin, s'intéresse à la forme et la vitesse moyenne d'une interface propagative en présence de mouvements turbulents. On y montre comment, dans le cadre d'une modélisation en échelle, le système peut manifester une covariance par dilatation des lois qui le gouvernent, à savoir présenter les mêmes formes de loi indépendamment des gammes d'échelles étudiées. Cette propriété, légitimée par l'absence d'échelles caractéristiques dans cette modélisation, conduit, de par la forme des lois covariantes, à une nature fractale des interfaces turbulentes et à une dimension fractale $7/3$ de celles-ci.

I. ENERGIE D'ACTIVATION ET TAUX DE REACTION

a. Décomposons l'ensemble des molécules F en sous-populations de même direction \mathbf{e}_F et comparons le taux de réaction de deux sous-populations données de directions \mathbf{e}_{F1} et \mathbf{e}_{F2} . Comme toute observable, ces taux sont indépendants du repère choisi pour les calculer, et donc invariants par rotation de ceux-ci. Appliquons alors une rotation amenant \mathbf{e}_{F1} en \mathbf{e}_{F2} . La différence de taux de réaction ne résulte plus que de l'effet de cette rotation sur la fonction de distribution de la sous-population de direction \mathbf{e}_{F1} , f_{F1} , et sur celle des molécules O , f_O .

Par raison d'isotropie, aucune direction \mathbf{e}_F n'est statistiquement privilégiée. Dès lors, les fonctions de distribution des sous-populations de direction \mathbf{e}_F sont indépendantes de \mathbf{e}_F et valent ainsi toutes f_F : $f_{F1} = f_F$. D'autre part, par suite de l'isotropie de la distribution de Maxwell, les distributions f_F et f_O sont invariantes par rotation. Il s'en suit que le taux de réaction est le même pour toute sous-population de molécules F , de sorte que leurs directions peuvent être assimilées à une seule, \mathbf{e}_x , sans modifier le taux de réaction.

b.

$$\begin{aligned} dn_F(\mathbf{v}_F) &= n_F f_F(\mathbf{v}_F) d^3\mathbf{v}_F & ; & & dn_O(\mathbf{v}_O) = n_O f_O(\mathbf{v}_O) d^3\mathbf{v}_O \\ \mathbf{J}(\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_O) &= (\mathbf{v}_O - \mathbf{v}_F) dn_O(\mathbf{v}_O) \\ dn_c(\mathbf{v}_F) &= \left| \mathbf{J}(\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_O) \cdot \sigma \mathbf{e}_x \right| dn_F(\mathbf{v}_F) = \sigma |(\mathbf{v}_O - \mathbf{v}_F) \cdot \mathbf{e}_x| dn_F(\mathbf{v}_F) dn_O(\mathbf{v}_O) \end{aligned}$$

c.

$$E_c = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \mu v_f^2$$

d. D'après l'hypothèse ii) et $\mathbf{e}_F = \mathbf{e}_x$, le critère de réaction s'écrit :

$$\frac{1}{2} \mu (\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_x)^2 > \frac{1}{2} \mu v_a^2 \quad \text{où} \quad E_a = \frac{1}{2} \mu v_a^2$$

Le nombre de collisions réactives par unité de volume et de temps s'obtient en intégrant dn_c sur l'espace des vitesses, compte tenu de ce critère.

e. Soit le changement de variables $(\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_O) \rightarrow (\mathbf{v}_G, \mathbf{v}_r)$ où :

$$\mathbf{v}_G = \frac{m_0 \mathbf{v}_O + m_F \mathbf{v}_F}{m_0 + m_F} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_G = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_F$$

Son jacobien ayant pour module 1, les volumes élémentaires sont conservés :

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{m_F}{m_0 + m_F} & \frac{m_0}{m_0 + m_F} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{d'où :} \quad d^3\mathbf{v}_F d^3\mathbf{v}_O = d^3\mathbf{v}_G d^3\mathbf{v}_r$$

Ce changement de variable appliqué à \mathbf{v}_r conduit ainsi à :

$$\begin{aligned} v_r &= \int_{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_x| > v_a} \sigma |\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_x| n_F n_0 f_F(\mathbf{v}_F) f_0(\mathbf{v}_O) d^3\mathbf{v}_F d^3\mathbf{v}_O \\ v_r &= n_F n_0 \sigma \left(\frac{m_F}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_x| > v_a} |\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_x| e^{-\frac{1}{2} \frac{M v_G^2}{k_B T}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mu v_r^2}{k_B T}} d^3\mathbf{v}_G d^3\mathbf{v}_r \\ v_r &= n_F n_0 \sigma \left(\frac{m_F m_0}{M} \frac{1}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi k_B T}{\mu} \right) \int_{|\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_x| > v_a} |\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_x| e^{-\frac{1}{2} \frac{\mu |\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_x|^2}{k_B T}} d(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{e}_x) \end{aligned}$$

La réponse demandée résulte de la valeur $2k_B T/\mu \exp(-E_a/k_B T)$ de la dernière intégrale.

Considérons $E_a = 0$. L'expression $(2k_B T/\pi\mu)^{1/2}$ apparaît alors comme le module moyen de la vitesse de la particule fictive selon l'axe Ox . Son ordre de grandeur est le même que celui de la vitesse quadratique moyenne de cette particule.

L'expression de v_r fait référence à une loi d'Arrhénius. Notons que la dépendance en \sqrt{T} du préfacteur résulte de la modélisation adoptée pour la section efficace de collision.

f. $W_F = -dn_F/dt = n_F v_r/n_F$ où v_r/n_F ne dépend que de n_0 , σ , μ , E_a et T .

Lorsque le comburant est en large excès, n_0 varie peu et v_r/n_F est assimilable à une constante notée $\tau_r^{-1}(T)$. Dans ce cas, $n_F(t)$ suit une loi de décroissance exponentielle dans laquelle $\tau_r(T)$ représente bien le temps caractéristique de disparition du combustible :

$$n_F(t) = n_F(0) \exp[-t/\tau_r(T)]$$

g. Dans l'hypothèse de gaz parfaits, avec H_2 en large excès, $p_0 \approx n_{H_2} k_B T$. D'où :

$$\tau_r(T) = \frac{(k_B T)^{1/2}}{p_0} \frac{e^{-E_a/k_B T}}{1,48 \cdot 10^{-6}} \text{ s} \quad \text{avec} \quad k_B T_1 = 2,35 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$$

Ainsi: $\tau_r(T_1) = 10^4$ années, $\tau_r(T_2) = 22$ jours, $\tau_r(T_3) = 15$ s.

L'évolution naturelle du mélange initial (c'est-à-dire avant le changement de température induit par la réaction), bien qu'inéluctable, dépend donc fortement de sa température :

- à température ambiante T_1 , l'évolution est quasi-gelée,
- à $2 T_1$, elle est très lente,
- à $3 T_1$, elle est presque immédiate

(à l'échelle de temps humaine).

II. STRUCTURE ET VITESSE DE FLAMME

II-A-1. Chaleur de réaction

a. Pour que $Q_p(T_f)$ représente la chaleur reçue par le milieu extérieur, il faut que les gaz brûlés soient revenus à température T_f sous pression p . La transformation correspondante est alors isobare et isotherme.

On constate ainsi que $Q_p(T_f)$ représente la variation d'enthalpie molaire $\Delta H(T_f, p)$ du milieu réactif entre les états "gaz frais" et "gaz brûlés" à température T_f et pression p . Etant égale à la variation d'une fonction d'état, elle est indépendante du chemin suivi et donc du mode de réaction.

Dans l'hypothèse de gaz parfaits, de nombre de moles conservés dans la réaction et de molécules de même nature (e.g. diatomiques), les capacités calorifiques molaires du milieu sont identiques dans l'état "frais", $C_{p,f}$, et l'état "brûlé", $C_{p,g}$. La formule de Kirchhoff, qui identifie leur différence avec la dérivée de la variation d'enthalpie molaire du milieu par rapport à la température, montre alors que Q_p ne dépend pas de la température des gaz frais:

$$\frac{\partial Q_p}{\partial T} = \frac{\partial \Delta H}{\partial T} = C_{p,b} - C_{p,f} = 0$$

Pour la mesurer, on peut opérer la réaction dans une enceinte adiabatique et noter la température T_b atteinte par les gaz brûlés. Q_p serait la quantité de chaleur fournie au milieu extérieur lors de leur refroidissement à température T_f , puisqu'alors, le nombre de moles étant conservé, leur pression atteindrait bien la valeur p . Il suffit ainsi de mesurer la quantité de chaleur nécessaire pour monter de nouveau leur température à la valeur T_b pour obtenir Q_p .

b. W_F se réfère à un taux volumique de consommation particulière. Le taux molaire correspondant est, par proportionnalité, W_F/\mathcal{N} . Il correspond à un taux volumique de production de chaleur $W_Q = Q_p W_F/\mathcal{N} = q_p W_F$.

N.B. : On notera que Q_p ne représente une énergie transférée sous forme de chaleur que pour une transformation particulière. L'appellation "chaleur de réaction" n'est donc justifiée que dans ce cas et apparaît, autrement, impropre. De manière générale, Q_p doit être conçue comme une différence d'enthalpie correspondant, suivant le point de vue adopté, à une libération d'enthalpie de nature "chimique" ou à un gain d'enthalpie de nature "thermique".

Pour des raisons analogues, W_Q représente un taux volumique de production d'enthalpie "thermique" ou de libération d'enthalpie "chimique". Il ne correspond à un taux volumique

de production de chaleur que lorsque l'enthalpie libérée est effectivement transférée sous forme de chaleur.

On constate ainsi que les dénominations "chaleur de réaction" et "taux volumique de production de chaleur" sont en général abusives : bien qu'éliminé de la pensée scientifique, le calorique reste pesant au niveau des appellations thermodynamiques.

II-A-2. Equation de bilan

a. L'équation de continuité de la quantité s s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\sigma_s)}{\partial t} = -\nabla\mathbf{J}^t + \mathbf{W}$$

Dans le référentiel R_0 et en négligeant la réaction spontanée suite aux conclusions de la partie I ($\mathbf{W}_F(x=-\infty)\approx 0$), les champs décrivant la flamme sont stationnaires. D'autre part, pour une flamme plane, seuls les gradients suivant la direction de l'axe x sont non nuls. L'équation de continuité se réduit alors à $d\mathbf{J}_x^t/dx = \mathbf{W}$.

b. La résultante des densités de courant de masse d'origine diffusive vaut, puisque $\sum\rho_i=\rho$:

$$\mathbf{J}^d = \sum\mathbf{J}_i^d = -\rho D\nabla(\sum\rho_i/\rho) = \mathbf{0}$$

Par principe de conservation de la masse, le taux de production volumique de masse est nul. La question a) montre alors que la densité totale de courant de masse $\mathbf{J} = \sum\mathbf{J}_i^t$ est une constante. Valant par ailleurs $\mathbf{J} = \rho\sigma_m\mathbf{v} + \mathbf{J}^d$, elle se réduit, puisque $\mathbf{J}^d=\mathbf{0}$ et $\mathbf{v}=\mathbf{v}_x\mathbf{e}_x$, à $\rho\sigma_m\mathbf{v}_x\mathbf{e}_x$, et enfin, puisque, $\sigma_m=1$, à $\rho\mathbf{v}_x\mathbf{e}_x$.

En notant sa composante $\rho_f U_L$, on obtient $U_L=\mathbf{v}_x(-\infty)$ puisque $\rho_f=\rho(-\infty)$. Comme les gaz frais avancent vers la flamme, il s'agit ainsi d'une quantité positive, par conséquent égale au module de leur vitesse par rapport à la flamme.

c. La densité de courant de masse de l'espèce F d'origine diffusive vaut $\mathbf{J}_F^d=-\rho D\nabla(Y_F)$. Elle assure le transport de la masse de combustible F, de sorte que $s=m_F$ et $\sigma_s=m_F/m=\rho_F/\rho=Y_F$ (où m représente la masse du volume contenant une masse m_F de l'espèce F). La densité de courant d'origine advective correspondante vaut alors $\mathbf{J}_F^a=\rho Y_F\mathbf{v}$, d'où l'expression de la densité totale de courant $\mathbf{J}_F^t=\mathbf{J}_F^a+\mathbf{J}_F^d$:

$$\mathbf{J}_F^t = \rho Y_F \mathbf{v} - \rho D \nabla(Y_F)$$

De manière analogue, la densité de courant de chaleur d'origine diffusive vaut $\mathbf{J}_Q^d=-\rho\kappa\nabla(c_p T)$. Elle assure le transport de l'enthalpie "thermique" $mc_p T$, de sorte que $s=mc_p T$ et $\sigma_s=c_p T$. La densité totale de courant correspondante s'écrit alors, en utilisant la constance de c_p :

$$\mathbf{J}_Q^t = \rho c_p T \mathbf{v} - \lambda \nabla(T)$$

N.B. : La densité de courant \mathbf{J}_Q^t extrapole la densité de courant de chaleur \mathbf{J}_Q^d du point de vue lagrangien (i.e. dans le référentiel de centre de masse d'un volume élémentaire du mélange) au point de vue eulérien (i.e. dans le référentiel de flamme). Elle concerne ainsi un système ouvert et ne peut donc correspondre, en toute rigueur, à un mode de transfert sous forme de chaleur. Cependant, par un abus de langage similaire à celui déjà souligné pour les

concepts de "chaleur de réaction" et de "taux de production volumique de chaleur", elle revêt l'appellation de "densité totale de courant de chaleur".

d. L'obtention des équations de bilan résulte directement de la forme générale établie en a), de la constance de $\rho v_x = \rho_f U_L$, de la forme des densités totales de courant et des termes de production volumique de chaleur $W_Q = q_p W_F$ et de masse de combustible $W = m_F dn_F/dt = -n_F W_F$.

II-A-3. Bilan d'enthalpie

a. Soit $h(Y_F, T)$ l'enthalpie d'une masse unité caractérisée par Y_F et T . Puisqu'il s'agit d'une fonction d'état, nous pouvons calculer sa variation en deux étapes :

i) la température du milieu est fixe ; sa composition chimique évolue. On s'intéresse alors à une variation d'enthalpie d'origine chimique

ii) la composition chimique du milieu est inchangée ; sa température évolue. On s'intéresse alors à une variation d'enthalpie d'origine thermique.

On obtient ainsi :

i) $dh = q_p dn_F$ où, dans une masse unité du milieu, $dn_F = dY_F/m_F$. Soit : $dh = q_p/m_F dY_F$.

ii) $dh = c_p dT$

soit, au total, $dh = c_p dT + q_p/m_F dY_F$.

Comme d'autre part, c_p est indépendant de Y_F par hypothèse et q_p indépendant de T d'après II.A.1, l'intégration de h conduit à $h(T, Y_F) = c_p T + q_p/m_F Y_F + h(0, 0)$.

b. La combinaison (1) + q_p/m_F (2) donne de manière immédiate :

$$\rho_f U_L \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \left[\lambda \frac{dT}{dx} + \rho D \frac{q_p}{m_F} \frac{dY_F}{dx} \right] = 0$$

On remarque ainsi que le transport de l'enthalpie fait intervenir deux phénomènes de diffusion couplés, de diffusivité a priori différentes, et associés respectivement à la diffusion de l'enthalpie thermique et de l'enthalpie chimique.

c. Les champs de température et de concentration étant uniformes à l'infini (voir figure 2 de l'énoncé), les gradients dT/dx et dY_F/dx y sont nuls. L'intégration de l'équation précédente donne alors $h(x=+\infty) = h(x=-\infty)$.

D'après (3) et $Y_F, b=0$ (puisque dans l'état brûlé $\rho_F=0$), on obtient :

$$T_b = T_f + \frac{q_p}{c_p} \frac{Y_{F,f}}{m_F}$$

d. Pour $\kappa = D$, le résultat b) donne, en tenant compte de l'uniformité de λ et c_p :

$$\rho_f U_L \frac{dh}{dx} - \frac{\lambda}{c_p} \frac{d^2 h}{dx^2} = 0$$

soit $dh/dx = \alpha \exp[\rho_f U_L c_p / \lambda x]$. Ainsi h diverge sauf si $\alpha=0$, auquel cas elle est uniforme.

N.B. : La comparaison des cas c) et d) montre que la conservation de l'enthalpie massique, réalisée en tout état de cause en fin de réaction, n'est valable en transitoire que si les diffusivités des enthalpies thermique et chimique sont identiques. Remarquons que, du point de vue de la thermodynamique classique, les états initiaux et finaux de réaction (i.e. gaz

frais, gaz brûlés) sont des états d'équilibre, tandis que les états intermédiaires, $0 < Y_F < 1$, ne le sont pas. On touche ainsi du doigt, sur cet exemple, toute l'importance de la notion d'état d'équilibre en thermodynamique classique, ses prédictions de conservation d'enthalpie s'avérant en général fausses pour les états hors-équilibre.

II-B. STRUCTURE DE FLAMME

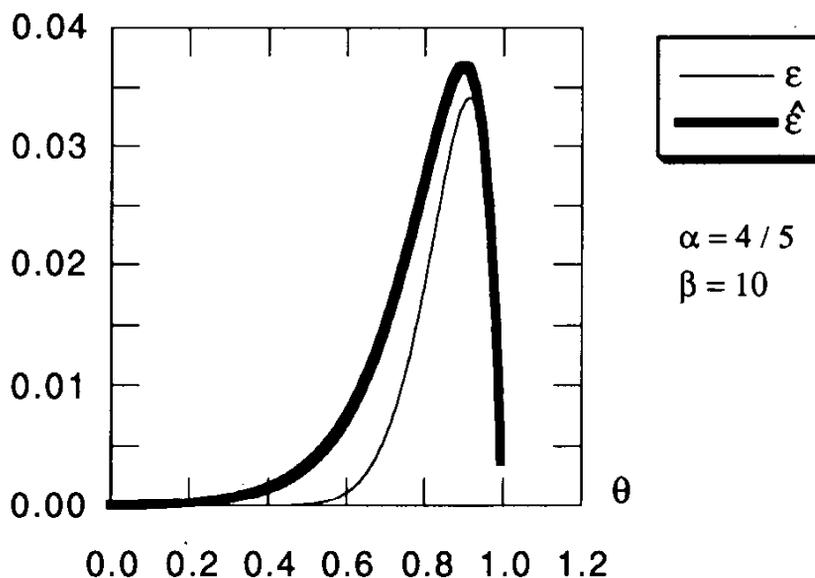
II-B-1. Equation de structure

a. La question précédente montre que Y et θ sont reliés linéairement. Comme $Y=1$ à $\theta=0$ et $Y=0$ à $\theta=1$, on obtient $Y=1-\theta$.

b. Immédiat d'après la relation (2), en tenant compte de l'uniformité de $\rho D = \rho \kappa = \lambda / c_p = \rho_f D_f$.

c. Lorsque $\beta(1-\theta)$ est supérieur à quelques unités, les exponentielles présentes dans les fonctions ε et $\hat{\varepsilon}$ sont très petites devant 1 : $\varepsilon(\theta)$ et $\hat{\varepsilon}(\theta)$ sont alors très différentes en valeur relative mais toutes deux négligeables.

Lorsque $\beta(1-\theta)$ est inférieur à quelques unités et $\beta \gg 1$, un développement limité de $\ln(\hat{\varepsilon}/\varepsilon)$ en $1-\theta$ montre que $\hat{\varepsilon}/\varepsilon - 1$ est d'ordre β^{-1} et donc très petit devant 1 : ε et $\hat{\varepsilon}$ sont alors très voisines en valeur relative.



La fonction $\hat{\varepsilon}$ est ainsi proche de ε dans le domaine $\theta > 1 - \beta^{-1}$ où la réaction se produit, θ et devient négligeable au-delà, comme ε . Elle en réalise donc une bonne approximation physique.

Comme ε et $\hat{\varepsilon}$ ne sont significatives que pour $\theta > 1 - \beta^{-1}$, on peut assimiler τ à sa valeur à T_b sans modifier le taux de production dans son domaine de prépondérance $T \approx T_b$.

L'expression de $\tau(T_b)$ résulte simplement de sa définition et de celles de β et α .

Le taux de production est faible dans les gaz frais (voir la partie I.g.), nul dans les gaz brûlés loin de la flamme et atteint sa valeur maximale dans la zone de production où brûlent les gaz ($\theta \approx 1 - \beta^{-1}$, soit $T \approx T_b$). Le rapport de W_F dans les gaz frais et dans cette dernière zone

vaut $\beta \exp(\beta^{-1}) \ll 1$. Ceci autorise à négliger W_F dans la suite, en dépit du fait qu'il est non nul dans les gaz frais. On s'absout ainsi du problème dit de la "frontière froide", suivant lequel aucun changement de référentiel ne pourrait conduire en toute rigueur à des champs stationnaires par suite du taux de réaction non-nul des gaz frais.

II-B-2. Champ de température

a. Immédiat par intégration, en remarquant que $\int_0^1 c \, d\theta = 1$.

b. Dans chaque domaine, θ est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Elle est donc somme d'une solution homogène (une exponentielle) et d'une solution particulière (une fonction linéaire).

c. Immédiat car $b_i = c(\theta_i)/l$.

d. Immédiat car : $\theta_3(+\infty) = 1 \Rightarrow \theta_3(x) = 1$

$$\theta_1(-\infty) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$\text{D'où} \quad \theta_1(0) = a_1 = 1 - \beta^{-1}$$

e. La continuité de la température résulte d'une hypothèse d'équilibre thermodynamique local sous-jacente à tout le problème et implicite par la définition même d'un champ de température. La continuité de sa dérivée résulte de celle du flux de chaleur, elle-même nécessaire pour éviter une accumulation non-bornée d'énergie en chaque point du milieu.

f. La continuité de $d\theta_2/dx$ donne $a_2 = -\beta/l \, d \exp(-\delta/d)$.

Celle de θ_2 revient à $a_2 \exp(-\delta/d) + \beta/l \, d + c_2 = 1$.

D'où l'expression de $\theta_2(x)$.

g. La continuité de θ_1 donne $1 - \beta^{-1} = 1 - \beta d/l + \beta d/l \exp(-\delta/d)$.

Celle de $d\theta_1/dx$ revient à $1 - \beta^{-1} = \beta d/l \exp(-\delta/d)$.

D'où les expressions demandées.

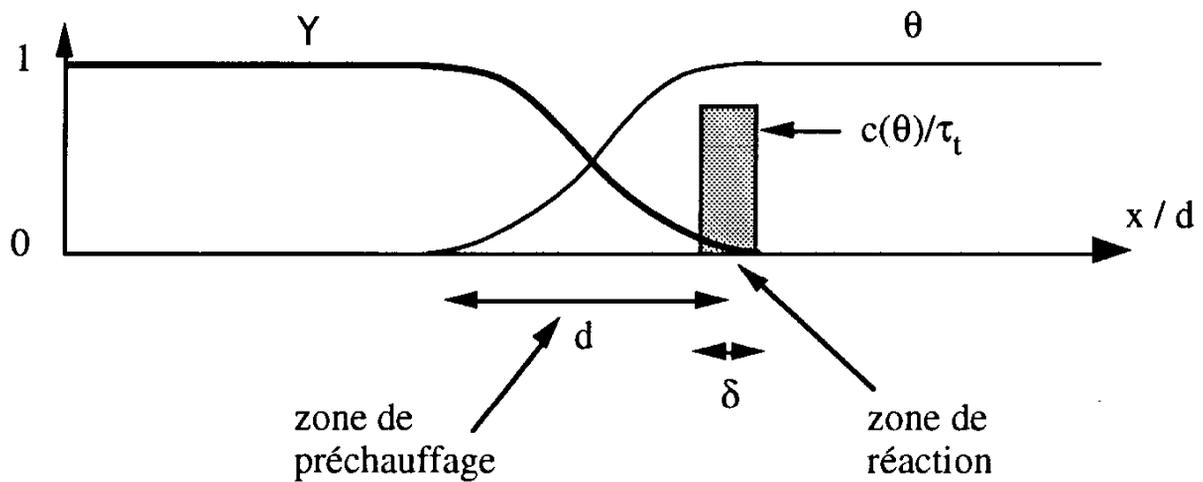
h. Dans la limite $\beta \gg 1$, $d/\delta \exp(-\delta/d) \rightarrow 1$ soit $\delta/d \rightarrow 0$.

La relation $l=2d$ résulte alors d'un développement au deuxième ordre de $(\beta-1)/\beta$ en δ/d . Les autres relations demandées découlent immédiatement des définitions de d et l .

La grandeur d apparaît comme l'échelle de décroissance du champ de température : $\theta_i \approx \exp(-x/d)$. Elle représente donc l'étendue typique de la zone de transition thermique entre gaz frais ($\theta=0$) et gaz brûlés ($\theta=1$) et correspond ainsi au concept d'épaisseur de flamme.

L'écriture $\tau_t = l/U_L = 2d/U_L$ montre que τ_t représente le temps typique de traversée de l'épaisseur de flamme par les gaz frais. Il correspond bien ainsi à la notion de temps de transit.

i.



j. $\tau_r = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$, $U_L = 0,18 \text{ m.s}^{-1}$, $l = 112 \text{ }\mu\text{m}$, $d = 56 \text{ }\mu\text{m}$, $\delta = 14 \text{ }\mu\text{m}$.

La zone de réaction, de taille δ , correspond à la zone d'émission lumineuse par les radicaux libres (chimieluminescence). Elle s'effectue dans le bleu.

II-C. Vitesse de flamme

1. Dans le référentiel où les gaz frais sont au repos, la flamme avance à une vitesse $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_f$ égale, d'après II-B à $U_L \mathbf{n}$. D'où : $\mathbf{v}_n = U_L \mathbf{n} + \mathbf{v}_f$

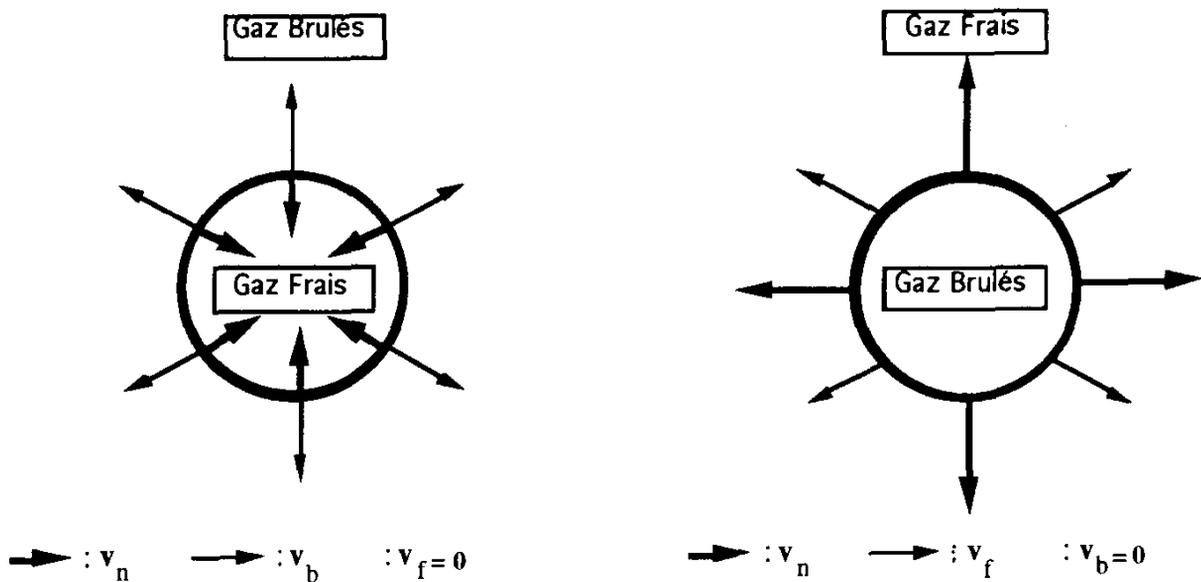
2. Le milieu contenu à l'intérieur de la sphère étant incompressible, le flux de masse à travers la surface de celle-ci est nul. D'autre part, par symétrie sphérique, \mathbf{v} est radial, $\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r$ avec v_r seulement fonction de r . D'où $4\pi r^2 v_r = 0$ et $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

3. Dans le référentiel de flamme $\rho_f v_f = \rho_b v_b$ où v_f et v_b sont les projections de \mathbf{v}_f et \mathbf{v}_b sur l'axe de propagation. Avec v_f et v_b mesurés dans le référentiel R de centre de masse de la sphère, cette relation devient, compte tenu du fait que tous les vecteurs sont dirigés selon l'axe de propagation : $\rho_f (v_f - v_n) = \rho_b (v_b - v_n)$. D'où :

$$\mathbf{v}_b = \chi \mathbf{v}_f + (1 - \chi) \mathbf{v}_n \text{ avec } \chi = T_b/T_f = \rho_f/\rho_b$$

4. La flamme se propage vers l'intérieur de la sphère : $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$. Celle-ci est donc composée de gaz frais : $\mathbf{v}_f = \mathbf{0}$. D'où $\mathbf{v}_n = -U_L \mathbf{e}_r$ et $\mathbf{v}_b = (\chi - 1)U_L \mathbf{e}_r$.

La flamme se propage vers l'extérieur de la sphère : $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$. Celle-ci est donc composée de gaz brûlés : $\mathbf{v}_b = \mathbf{0}$. D'où $\mathbf{v}_n = \chi U_L \mathbf{e}_r$ et $\mathbf{v}_f = (\chi - 1)U_L \mathbf{e}_r$.



5. $\chi = 5$

- flamme se propageant vers l'intérieur : $v_f = 0$, $v_b = 1,40 \text{ m.s}^{-1}$, $v_n = 0,35 \text{ m.s}^{-1}$

- flamme se propageant vers l'extérieur : $v_f = 1,40 \text{ m.s}^{-1}$, $v_b = 0$, $v_n = 1,75 \text{ m.s}^{-1}$

Ces différences proviennent de l'expansion des gaz au passage de la flamme ($\rho_b < \rho_f$), responsable d'un effet de "piston" sur l'interface.

III. POTENTIELS HORS ÉQUILIBRE.

III-A. Potentiel

1. En utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned}
 \frac{dK}{dt} &= \iiint_V D \nabla \theta \cdot \frac{\partial \nabla \theta}{\partial t} - W \frac{\partial \theta}{\partial t} d\tau \\
 &= \iiint_V \nabla [D \nabla \theta \cdot \frac{\partial \nabla \theta}{\partial t}] - [D \Delta \theta + W] \frac{\partial \theta}{\partial t} d\tau \\
 &= \iint_{\Sigma} D \frac{\partial \theta}{\partial t} \nabla \theta \cdot dS - \iiint_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 d\tau
 \end{aligned}$$

Or, pour les deux types de conditions aux limites, $\nabla \theta \cdot \partial \theta / \partial t = 0$. D'où :

$$\frac{dK}{dt} = - \iiint_V \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 d\tau \leq 0$$

K est ainsi une fonction de tout état du système qui décroît au cours de l'évolution. Il s'agit donc d'un potentiel d'évolution, également appelé fonction de Lyapunov.

2. K est minimal pour $\nabla\theta = \mathbf{0}$ et $G(\theta)$ maximal, soit, puisque W est positif, pour $\theta=1$. Cet état uniforme, correspondant au milieu brûlé, réalise donc le minimum absolu de K .

K étant décroissant au cours du temps et borné inférieurement, atteint nécessairement un état pour lequel $dK/dt=0$. D'après le 1), celui-ci répond nécessairement à la condition $\partial\theta/\partial t=0$: toute évolution relaxe donc vers un état stationnaire.

N.B. : Le temps nécessaire pour atteindre cet état peut éventuellement être infini.

III-B. Diffusion pure

1. Dans un état stationnaire, $\partial\theta/\partial t = \Delta\theta + W = 0$ avec $W=0$. Le champ de température répond donc à $\Delta\theta = 0$ avec $\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = 0$, soit à une équation de Laplace avec condition aux limites de Neumann. Ses solutions, $\nabla\theta = \mathbf{0}$, peuvent se retrouver par analogie hydrodynamique ou électrostatique. Dans le second cas, l'équation de Laplace implique l'absence de densité volumique de charge et la condition de Neumann, l'absence d'une telle densité surfacique. Ensemble, elles entraînent l'uniformité du potentiel électrostatique et la nullité du champ électrostatique, soit $\nabla\theta=\mathbf{0}$.

D'après III.A., l'évolution sous l'effet de la seule diffusion, conduit à un état stationnaire, qui, d'après les résultats précédents, est nécessairement homogène. Notons que ce résultat est indépendant des conditions initiales considérées.

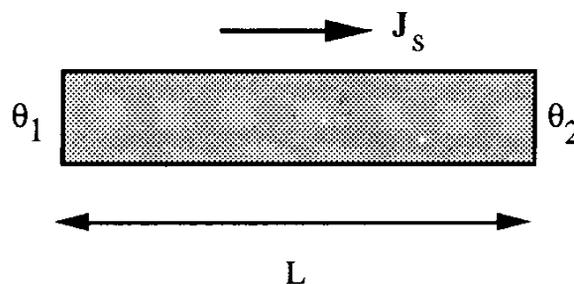
La valeur de K correspond à $\partial\theta/\partial t = 0$ pour $W=G=0$, soit $K=0$.

2. On a de nouveau, en état stationnaire, $\Delta\theta = -W = 0$. Or la condition aux limites n'étant pas adiabatique, on peut avoir un flux non-nul aux frontières, $\nabla\theta \neq \mathbf{0}$, incompatible avec l'uniformité de θ .

D'après III.A., la diffusion conduit ainsi certes à un état stationnaire, mais a priori inhomogène.

Dans un système unidimensionnel, la condition de stationnarité $\Delta\theta = \partial^2\theta/\partial x^2 = 0$ implique que $\mathbf{J}_s = -D \partial\theta/\partial x \mathbf{e}_x$ est constant. Comme $W=G=0$, K vaut alors $K = -VJ_s^2/2D$.

Un exemple physique de cette situation est donné par un barreau de métal de section constante à parois latérales adiabatiques et chauffé de manière uniforme sur ses faces droites:



III-C. Diffusion-Réaction

1. D'après III-A-2, le minimum absolu de K correspond à $\theta = 1$, c'est-à-dire à des gaz brûlés.

2. Les conditions aux limites étant adiabatiques, le théorème de Gauss implique :

$$\iiint_V D\Delta\theta \, d\tau = \iiint_V [\partial\theta/\partial t - W] \, d\tau = 0.$$

Puisque W est positif ou nul, cela impose, en état stationnaire, $W=0$. On se ramène ainsi à des états de diffusion pure, homogènes d'après III.B.1. Les résultats combinés de III.A. et III.B.1 montrent alors que l'évolution du mélange réactif aboutit nécessairement à un état stationnaire, par ailleurs homogène.

3. Les états d'équilibre correspondent d'après III.C. 2. à $W = 0$, soit :

$$\begin{aligned} \theta &= 1 \text{ pour } W_1 \\ \theta &= 0 \text{ ou } \theta = 1 \text{ pour } W_2 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites étant adiabatiques, $\iiint_V \Delta\theta \, d\tau = 0$ et :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \theta \, d\tau = \iiint_V W \, d\tau \geq 0$$

Toute évolution ne peut ainsi qu'élever la température moyenne dès que des états hors d'équilibre ($W>0$) sont visités. En particulier, la moindre évolution de température à partir des gaz frais ($\theta=0$) conduit à une température moyenne non-nulle, incompatible avec le retour à l'état $\theta=0$: cet état est instable. A l'opposé, l'état brûlé $\theta=1$, de température moyenne maximale, ne peut a priori être perturbé en conditions adiabatiques. En tout état de cause, il correspond au minimum absolu de K résultat ultime de toute évolution, même issue de $\theta=0$ par suite de son instabilité : l'état $\theta=1$ est stable.

4. $v_n=0$ correspond à un état stationnaire, donc homogène d'après III.C.2. Ceci étant incompatible avec la nature inhomogène de la flamme, v_n est forcément non-nul.

Le sens de propagation est déterminé par le critère $dK/dt < 0$. Comme $K(\theta=1) < K(\theta=0)$, son application induit que le milieu de gaz brûlés s'étend au détriment de celui de gaz frais.

Puisque la structure de flamme est invariante, la variation $\delta t \, dK/dt$ ne résulte que du remplacement d'un volume $AU_L \delta t$ de gaz frais par des gaz brûlés. Comme ceci abaisse K de $G(0)-G(1)$ par unité de volume, on obtient : $dK/dt = -U_L A [G(1)-G(0)]$.

5. L'intégration de W_1 donne $G(1)-G(0) \approx \beta^{-2} \tau^{-1}$, soit $dK/dt = -U_L A \beta^{-2} \tau^{-1}$.

D'autre part, d'après III.A., $dK/dt = -\iiint_V [\partial\theta/\partial t]^2 \, d\tau$. Or, puisque la structure de flamme est invariante, $\theta = \theta(x - U_L t)$ et $\partial\theta/\partial t = -U_L \partial\theta/\partial x$. Comme, en dehors de l'interface, $\partial\theta/\partial x = 0$ et, dans l'interface, $\partial\theta/\partial x \approx 1/d$, on en déduit $dK/dt = -U_L^2 A d^{-1}$.

L'égalité des deux évaluations donne $U_L = d/\tau_l$ avec $\tau_l = \beta^2 \tau$. On retrouve ainsi par un bilan de potentiel, le résultat de la partie II.

IV. ALLUMAGE

IV-A. Seuil d'allumage

1. Les expressions proposées correspondent à une approximation de gradient moyen qui repose sur les considérations suivantes :

Tant que la courbure de l'interface reste faible ($d \ll r_F$), la structure de flamme est assimilable localement à celle de la flamme plane étudiée en II. Ceci revient à dire que ses

champs de température et de concentration décroissent exponentiellement sur une distance d *invariante* au cours de la propagation. Dans la zone où ces champs sont notables, leur variation est alors assimilable à une variation linéaire sur une distance d .

2. L'évaluation de $K(r_F)$ résulte de deux contributions : celle de l'interface par suite du gradient moyen et celle des gaz brûlés ($0 < \theta$) par suite de la diminution de G . En négligeant dans cette dernière la part correspondant à l'interface ($0 < \theta < 1$), on obtient :

$$\begin{aligned} K(r_F) &= \iint_{|r-r_F| \leq d} \frac{D}{2} \frac{1}{d^2} d\tau + G(1) \iiint_{r < r_F} d\tau \\ &= 4\pi r_F^2 \left[\frac{D}{2d} - \frac{r_F}{3} \delta G \right] \end{aligned}$$

3. La relation précédente donne :

$$\frac{dK(r_F)}{dt} = 4\pi r_F \delta G (r_c - r_F) \frac{dr_F}{dt}$$

avec $r_c = D/(d\delta G)$.

4. Comme dK/dt est négatif on constate que :

- pour $r_F < r_c$, $dr_F/dt < 0$: la flamme s'éteint ; la diffusion l'emporte sur la réaction.
- pour $r_F > r_c$, $dr_F/dt > 0$: la flamme envahit le milieu ; la réaction l'emporte sur la diffusion.

5. Pour $\beta \gg 1$, $\delta G \approx \beta^{-2} \tau^{-1}$ (déjà vu en III.C.4). D'où $r_c = D\tau/d$ et, compte tenu de la relation $d^2 = D\tau/2$, $r_c = 2d$.

Le fait que la modélisation du champ de température néglige la courbure suppose implicitement $r_F \gg d$, en apparence contradiction avec le résultat $r_c = 2d$. Cependant, dans le cadre d'une dynamique gouvernée par un potentiel, la compétition surface/volume révélée par l'étude précédente reste valable indépendamment de la modélisation adoptée pour l'interface. Ceci confirme la pertinence du concept de rayon critique r_c mais indique que seul son ordre de grandeur $r_c \approx 2d$ ressort de l'étude précédente.

IV-B. Allumage commandé

IV-B-1. Energie d'allumage et tension de claquage

a. L'énergie d'allumage correspond à la différence d'enthalpie entre les deux états considérés. Comme le milieu est composé de gaz parfaits, de capacité calorifique constante, et ne subissant pas de transformation chimique, elle apparaît proportionnelle à $T_b - T_f$:

$$E = \frac{4\pi r_c^3}{3 V_M} C_p (T_b - T_f)$$

où V_M est le volume molaire des gaz frais à température T_b , lorsque ils occupent le volume $4/3 \pi r_c^3$.

b. A plusieurs milliers de tours par minute, la durée des cycles est suffisamment brève pour que, lors de chaque compression, la quantité de chaleur échangée avec les parois soit

négligeable devant le travail reçu : la compression peut être considérée comme adiabatique.

Pour la modéliser, remarquons tout d'abord qu'à 6000 tours/mn, un piston de 5 cm de longueur présente une vitesse de déplacement bien inférieure à la vitesse du son. La pression dynamique est alors voisine de la pression thermodynamique et s'homogénéise sur des échelles de temps bien inférieures à la période du cycle. D'autre part, l'étude classique de compression adiabatique d'un gaz parfait par un piston révèle des différences quantitatives faibles (<10% en valeur relative) entre des compressions quasistatiques (variables intensives définies en permanence, équilibre de pression de part et d'autre du piston) ou non-quasistatiques. En négligeant ces différences, nous pouvons adopter l'hypothèse de compression adiabatique réversible, soit :

$$p_f = p_i \omega^\gamma ; T_f = T_i \omega^{\gamma-1}$$

c. Les gaz parfaits étant diatomiques, $C_p = 7/2R$ et $\gamma = 7/5$. D'autre part la pression d'allumage p_b étant par hypothèse égale à p_f , nous obtenons : $v_M = RT_b/p_b$ où $T_b = (T_b - T_f) + T_f$ et, ici, $T_f = 689K$, $p_f = 18,4 \text{ Atm}$ et $E = 17,14 \text{ mJ}$.

d. Pour une tension U entre électrodes, l'énergie cédée à un électron e sur une distance \bar{l} vaut $E = U\delta^{-1} e\bar{l}$. Le critère $E \geq E_i$ donne ainsi :

$$U_c = \frac{\delta}{\bar{l}} \frac{E_i}{e}$$

e. Une substitution immédiate donne $U_c = \delta n \sigma E_i \bar{l}$ avec $n = \omega p_i / (k_B T_i)$.

Les collisions mettant en jeu des entités de tailles très différentes (molécule, électron), la relation $\bar{l} = 1/(n\sigma)$ se trouve plus pertinente que l'expression classique $\bar{l} = 1/(n\sigma\sqrt{2})$ valable pour entités de tailles comparables.

On obtient ainsi $U_c = \delta \omega p_i / (k_B T_i) \sigma E_i / e$, proportionnel à $\delta \omega$ à p_i , T_i , σ et E_i fixés, et de valeur ici $U_c = 38,6 \text{ kV}$.

IV-B-2. Dispositif d'allumage

a.

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C} + M \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

les conditions initiales ou finales étant fixées notamment par les tensions U_0 et U_2 .

b. Les conditions initiales et finales sont $i_1(0) = 0$, $i_1(\infty) = U_0/R_1$. D'où :

$$i_1 = U_0/R_1 [1 - \exp(-t/\tau_0)] \text{ avec } \tau_0 = L_1/R_1$$

$$E_1 = 1/2 L_1 i_1^2$$

$$U_2(t) = - M \frac{di_1}{dt} = - \frac{M U_0}{R_1 \tau_0} \exp(-t/\tau_0)$$

soit, ici, $\tau_0 = 2\text{ms}$, $i_1(3\tau_0) = 5,70\text{A}$, $E_1(3\tau_0) = 65\text{mJ}$.

c. A $t=0$, $i_1=U_0/R_1$. D'autre part, la continuité de la tension aux bornes du condensateur assure la continuité de di_1/dt , malgré l'ouverture du circuit : $di_1/dt = 0$ à $t=0$.

La solution de l'équation d'évolution de i_1 est alors de la forme :

$$i_1(t) = e^{-t/2\tau_0} [a e^{i\omega_0 t} + b e^{-i\omega_0 t}] \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{C}^2$$

et, compte tenu de $\omega_0 \tau_0 \gg 1$,

$$\frac{di_1}{dt} = i \omega_0 e^{-t/2\tau_0} [a e^{i\omega_0 t} - b e^{-i\omega_0 t}] \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{C}^2$$

Les conditions initiales, $i_1=U_0/R_1$, $di_1/dt=0$ à $t=0$ donnent alors :

$$i_1(t) = \frac{U_0}{R_1} \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \cos(\omega_0 t)$$

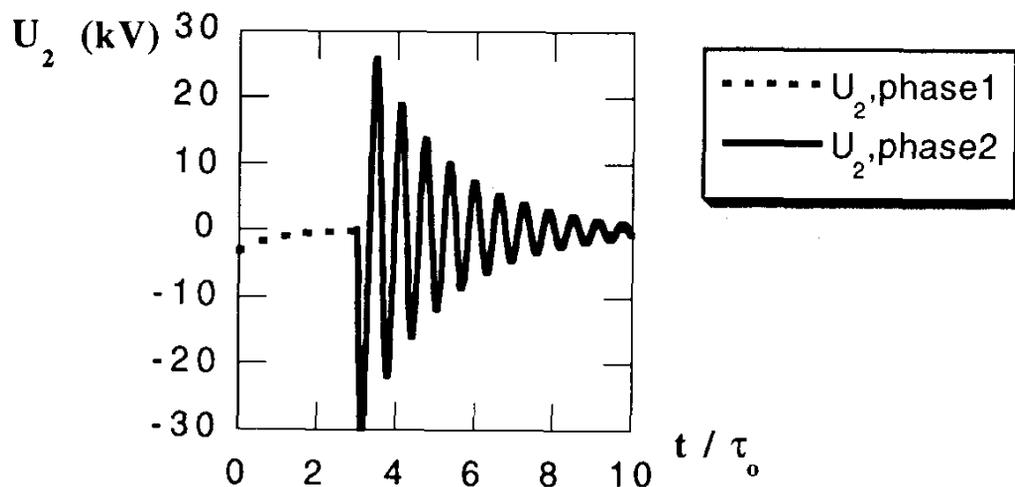
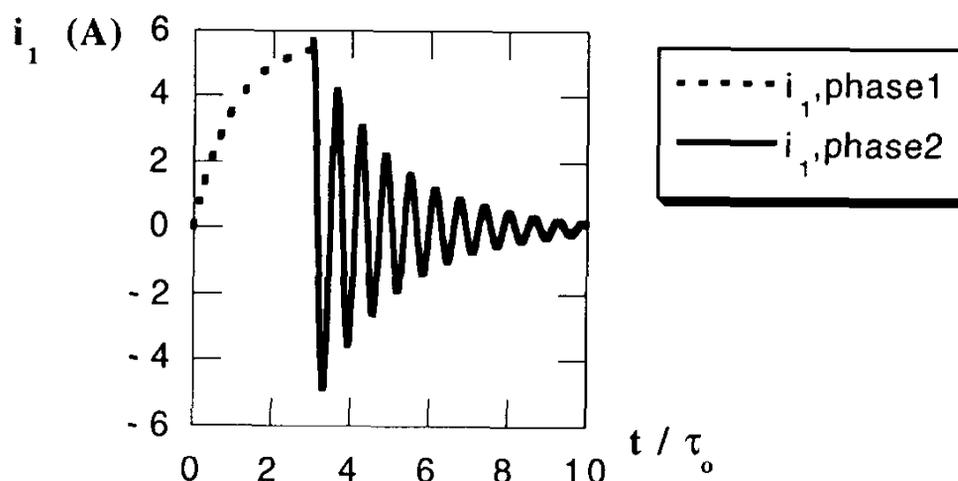
$$U_2(t) = -M \frac{di_1}{dt} \approx M \omega_0 \frac{U_0}{R_1} \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right) \sin(\omega_0 t)$$

$$U_{2m} = M \omega_0 U_0 / R_1$$

soit, ici, $U_{2m} = 30 \text{ kV}$.

d. Phase I : temps de décroissance τ_0 .

Phase II : temps de décroissance $2\tau_0$; signaux i_1 et i_2 en quadrature ; $U_{2m} = \omega_0 \tau_0 U_2(0)$ où l'origine des temps est prise au début de la phase I.



N.B. : La valeur de $\omega_0 \tau_0$ est de 50 d'après les données numériques. Pour une meilleure visibilité des courbes, elle a été cependant imposée à 10 dans les graphes ci-dessus.

e. Les critères pratiques d'allumage sont $U_{2m} > U_c / 2$ et $E_1 > 2E$.

Avec les valeurs précédentes :

$$U_{2m} = 30 \text{ kV} > U_c / 2 = 19,3 \text{ kV}$$

$$E_1 = 65 \text{ mJ} > 2E = 34 \text{ mJ}$$

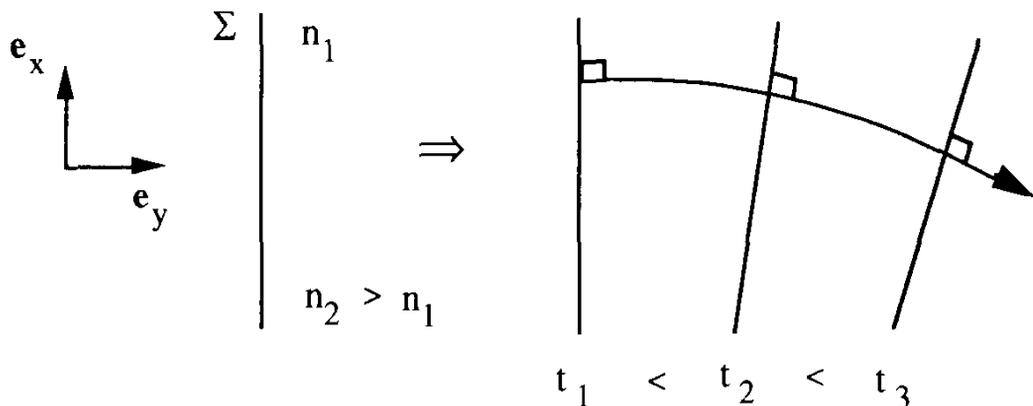
Le dispositif électrique peut donc réussir l'allumage.

V. MESURE OPTIQUE DE LA VITESSE DE FLAMME

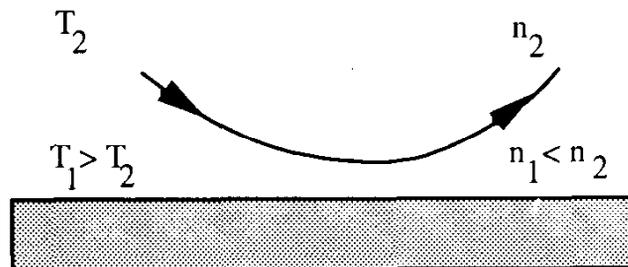
V-A. Propagation de la lumière dans un milieu d'indice variable

1. Les rayons lumineux se propagent normalement aux surfaces d'onde dans un milieu isotrope.

2. La vitesse de phase est variable sur le plan d'onde. Celui-ci subit donc, outre une translation globale, une déformation qui, localement, correspond à une rotation.



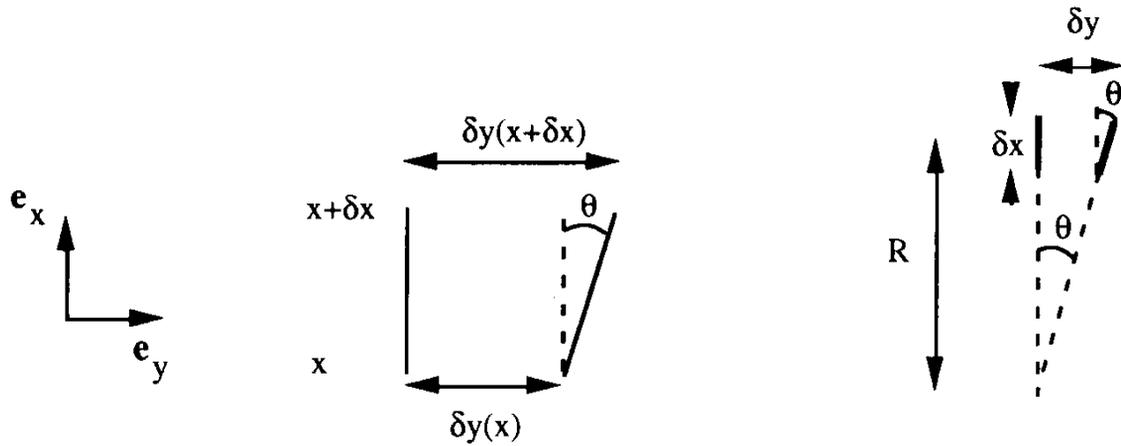
D'après le théorème de Malus, la rotation du plan d'onde entraîne celle des rayons lumineux. Ceux-ci sont donc déviés à la traversée du milieu. Le mirage résulte de ce phénomène.



3. Soit un plan d'onde élémentaire de longueur δx dans la direction \mathbf{e}_x . En un temps δt , il se déplace d'une distance $\delta y(x) = c/n \delta t$. L'angle de déviation du plan correspond à $\theta = d\delta y/dx$, soit $\theta = -\delta y / n \, dn/dx$.

En extrapolant cette portion de plan d'onde à l'infini, on constate, en projection dans le plan xOy , l'existence d'un point invariant, centre de courbure des trajectoires. Le rayon de courbure R vaut alors $R = \delta y / \theta$, soit :

$$R^{-1} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$$



4. Immédiat.

5. En différentiant la loi de Gladstone au voisinage des gaz brûlés, $T \approx T_b$, on obtient :

$$\theta = \frac{L}{d} \frac{b}{n} \frac{T_b - T_f}{T_b^2} \quad \text{et} \quad R = \frac{n}{b} \frac{T_b^2}{T_b - T_f}$$

soit, ici, $\theta = 3.8 \cdot 10^{-3}$ rad et $R = 13,16$ m.

V-B. Mesure de vitesse de flamme

1. Le tube agissant comme une lame à faces parallèles, ne modifie pas la direction des rayons, ni à l'entrée, ni à la sortie. En conséquence :

$$\delta x = \theta f = -L \frac{b}{n} \frac{dT^{-1}}{dx} f$$

Le critère de détection $|\delta x| \leq r_0$ devient ainsi :

$$\left| \frac{dT^{-1}}{dx} \right| \leq \frac{r_0}{f} \frac{n}{b} \frac{1}{L} = A$$

2. On se place dans le cas de gradients forts. Le profil de température dans la flamme (voir figure 2 de l'énoncé) montre que dT^{-1}/dx est une fonction piquée sur l'interface et décroissante vers 0 lorsqu'on s'en éloigne. De ce fait, deux points, situés de part et d'autre du maximum, atteignent la valeur seuil A lorsque celle-ci est franchie.

$d\delta/dt = 0$ car la structure de flamme est stationnaire.

$dx_0/dt = U_L$ car la flamme se déplace à la vitesse U_L .

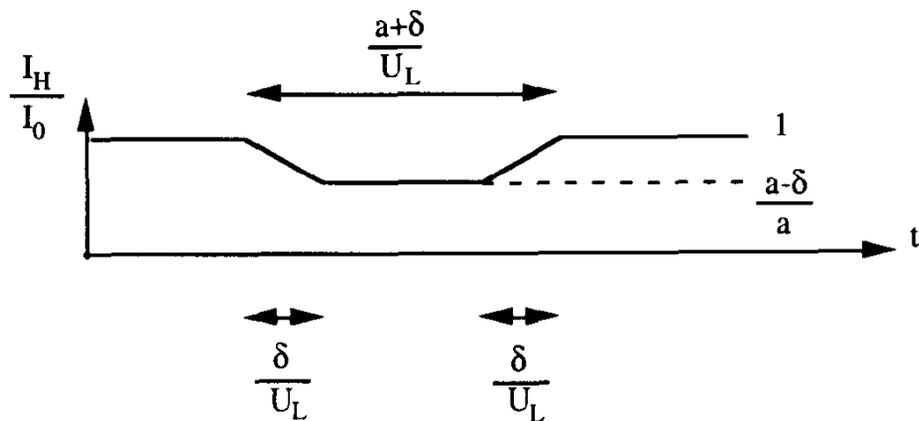
La puissance reçue est relative à la part du faisceau située hors de la zone $x_b < x < x_f$. Celle-ci correspond à $|x - x_0| \leq \delta/2$ soit $\Pi_\delta(x - x_0) = 1$. D'où :

$$I_H = \frac{I_0}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x) [1 - \Pi_\delta(x - x_0)] dx$$

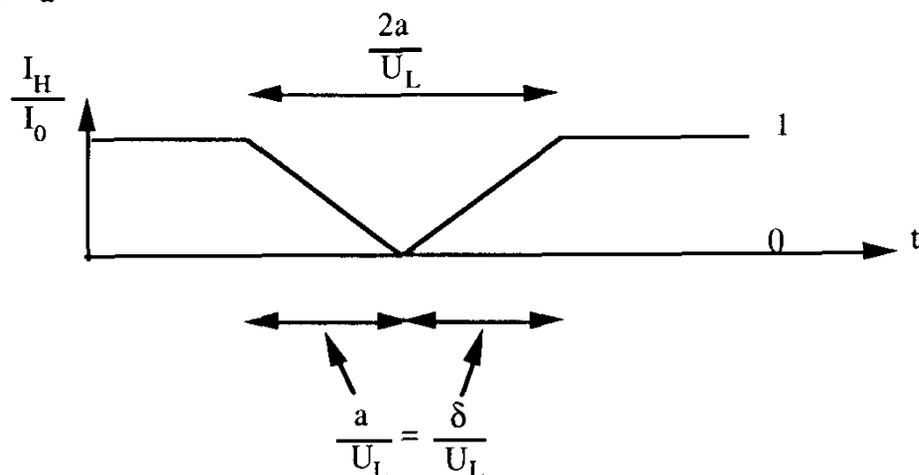
En prenant l'origine des temps telle que $x_0 = U_L t$, on obtient la convolution glissante:

$$I_H = \frac{I_0}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x) [1 - \Pi_\delta(x - U_L t)] dx$$

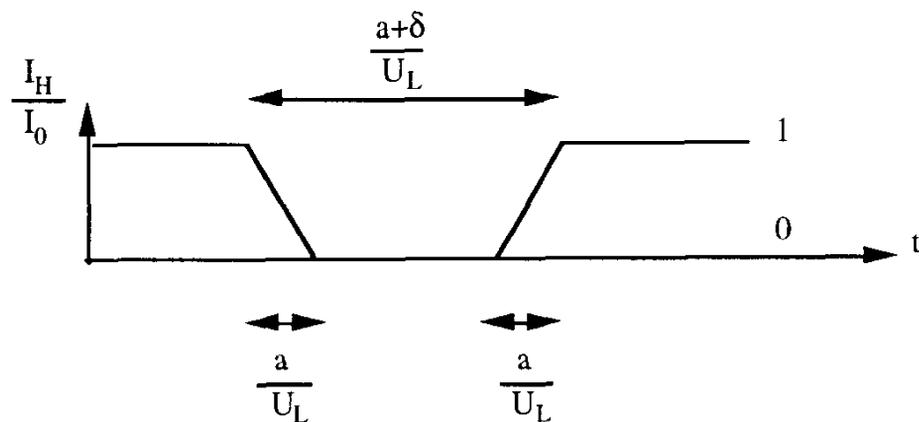
3. Le signal reçu est linéaire par morceaux. Il présente suivant les cas les caractéristiques suivantes :

i) $\delta \ll a$ 

valeur minimale de I_H/I_0 : $(a-\delta)/a$; durée de décroissance δ/U_L ; durée totale $(\delta+a)/U_L$.

ii) $\delta = a$ 

valeur minimale de I_H/I_0 : 0 ; durée de décroissance $a/U_L = \delta/U_L$; durée totale $2a/U_L = 2\delta/U_L$.

iii) $\delta \gg a$ 

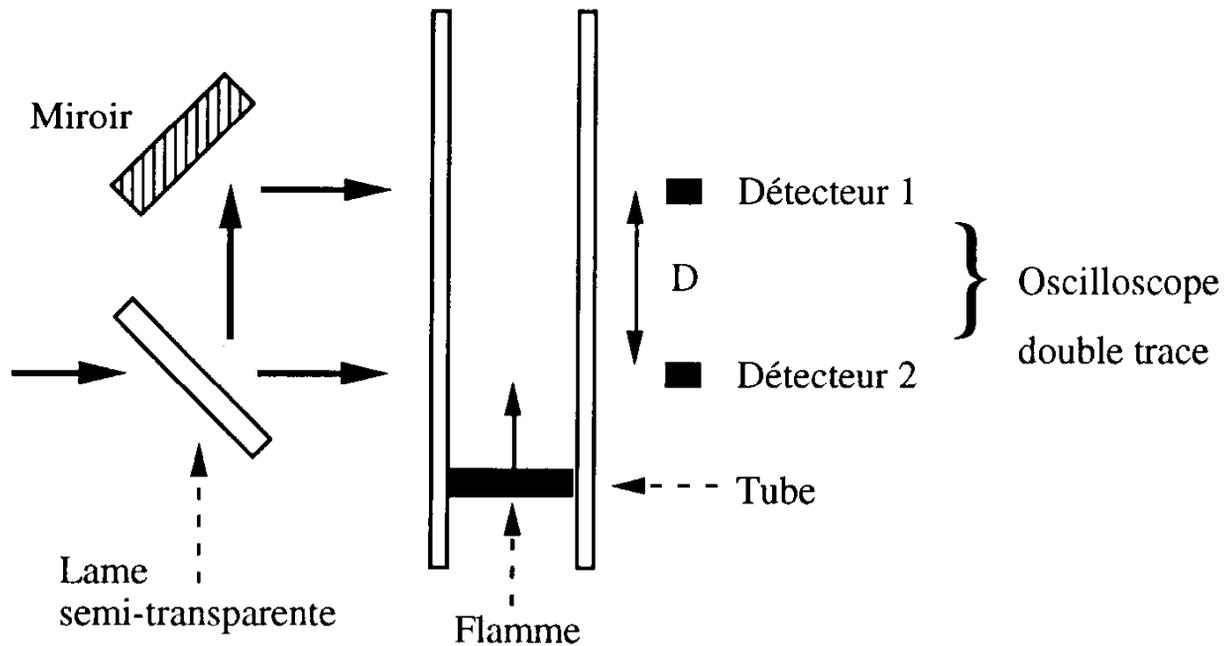
valeur minimale de I_H/I_0 : 0 ; durée de décroissance a/U_L ; durée totale $(\delta+a)/U_L$.

4. Le cas ii), $a=\delta$, correspond à un contraste maximal et à des temps de décroissance du signal longs. Il s'agit ainsi du meilleur compromis de résolution optique et temporelle et donc du cas le mieux adapté aux mesures.

Le cas iii) peut cependant se révéler également intéressant si la forme du signal est bien résolue, car le contraste est aussi maximal. On pourrait alors en principe mesurer séparément a/U_L et $(\delta+a)/U_L$ et en déduire δ/U_L .

Le cas ii) demande ainsi un ajustement de a à δ mais conduit à une mesure directe de δ/U_L ; le cas iii) ne demande pas d'ajustement de la section du faisceau mais conduit à une mesure indirecte de δ/U_L .

5. Choissant le cas ii), on règle la focale f pour que A soit tel que $\delta \approx a$. Afin de mesurer séparément U_L et δ/U_L , on réalise enfin le dispositif suivant de double mesure :



Le décalage temporel des signaux des deux détecteurs donne D/U_L et leur forme fournit δ/U_L . De ces deux mesures, on déduit δ et U_L .

6. D'après V.B.2., et $A=(T_b-T_f)/T_b T_F 1/d$, on déduit :

$$f = r_0 \frac{n}{b} \frac{d}{L} \frac{T_b T_f}{T_b - T_f}$$

Comme $\delta=d/2$ est inférieur à a , on obtient :

valeur minimale de I_H/I_0 : $(a-\delta)/a=12.5\%$

durée de décroissance jusqu'au minimum $\delta/U_L=875 \mu s$

durée totale de modification du flux $(\delta+a)/U_L=1,875 ms$

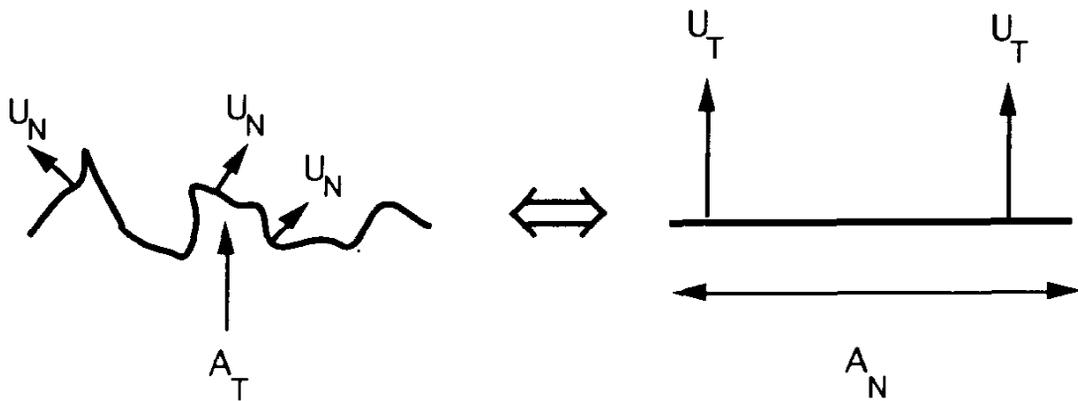
focale 5,25 cm.

VI. FLAMME TURBULENTE

VI-A. Rugosité et vitesse

1. Par définition de U_T , le taux de consommation de gaz frais par la flamme plissée est le même que celui d'une flamme plane d'aire A_N et de vitesse U_T . Ainsi :

$$\int_F U_N dS = U_N A_T = U_T A_N$$



2. De manière immédiate d'après la question précédente, $R = A_T/A_N = U_T/U_N$: les augmentations relatives de surface et de vitesse sont égales. Cette relation, apparemment anodine, permet en réalité de relier les effets dynamiques aux seules observations géométriques.

VI-B Interaction avec un écoulement à une échelle

1. La composante v_y traduit une advection parallèle à la flamme initialement plane. Elle a donc tendance à faire glisser celle-ci sur elle-même sans la déformer. Dans ce cadre, elle apparaît équivalente à un changement de référentiel d'observation, sans conséquence quant à l'objet observé.

Si la flamme n'est plus plane, la composante v_y la déforme, mais à un ordre supérieur à l'action de la composante v_x .

2. $v_x = 0$ correspond à $x = nL$, $y = (p+1)L$, et donc à un réseau carré de pas L .

3. Le temps caractéristique de passage d'une flamme sur un tourbillon de taille L est $T = L/U_N$.

Les extrema de δx sont atteints sur les lignes $y = pL$ où v_x est extrémal :

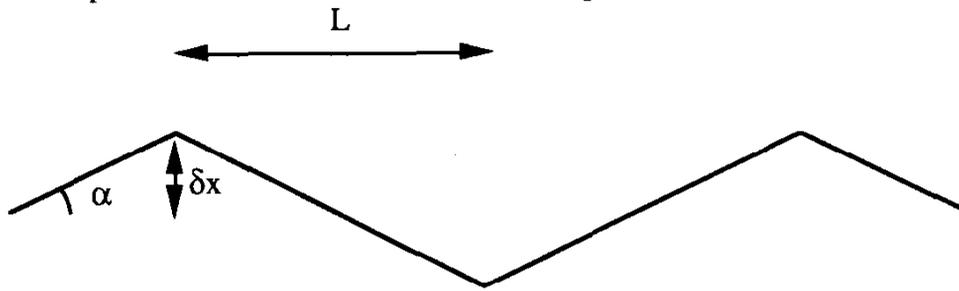
$$v_x = \pm U' \sqrt{2} \sin(2\pi x/2L) \text{ à } y = pL, p \in \mathbb{Z}$$

En intégrant l'effet d'advection de v_x sur un tourbillon et en notant que $dt = dx/U_N$, on obtient :

$$\delta x = \int_0^L \frac{v_x}{U_N} dx = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{U'}{U_N} L$$

4. On néglige les ondulations du front de la flamme car elles ne modifient les surfaces qu'à

un ordre supérieur à celui donné par les inclinaisons. On obtient ainsi, comme déformation typique induite par un tourbillon, la déformation triangulaire :



où $\alpha = \delta x / (L/2) = 4\sqrt{2}/\pi U' / U_N$.

En appliquant le théorème de Pythagore, la longueur de la flamme L_T est alors $L_T^2 = \delta x^2 + (L/2)^2$. D'où :

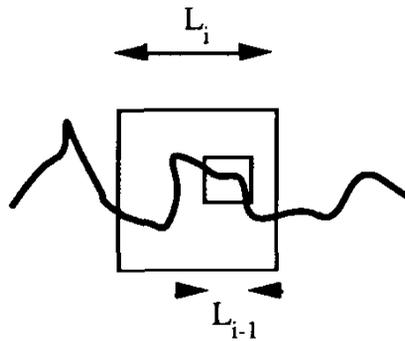
$$R^2 = (A_T / A_N)^2 = 1 + \alpha^2 = 1 + 32/\pi^2 (U' / U_N)^2$$

et, d'après VI.A.2 :

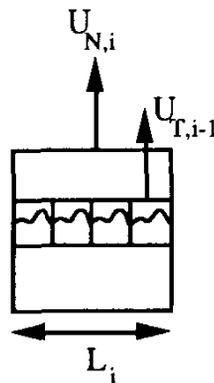
$$U_T^2 = U_N^2 + \frac{32}{\pi^2} U'^2$$

VI-C. Interaction avec un écoulement à plusieurs échelles

1. Soient deux fenêtres emboîtées de taille L_{i-1} et L_i .



Considérons une flamme de vitesse moyenne $U_{T,i-1}$ dans une fenêtre de taille L_{i-1} et extrapolons-la par juxtaposition dans toute la fenêtre de taille L_i :



Sa vitesse peut être obtenue de deux points de vue différents :

- comme cette flamme ne contient pas de plissement de taille L_p sa vitesse est par définition $U_{N,i}$.

- comme elle n'est qu'une juxtaposition de portions de flamme de vitesse $U_{T,i-1}$, sa vitesse est aussi $U_{T,i-1}$.

D'où $U_{N,i} = U_{T,i-1}$

En appliquant la relation (5) dans la fenêtre de taille L_i , on déduit, grâce à la relation précédente :

$$U_{T,i}^2 = U_{T,i-1}^2 + \frac{32}{\pi^2} U_i'^2$$

2. Immédiat en utilisant $U_{T,-1}^2 = U_{N,0}^2$.

3. De manière immédiate :

$$\begin{aligned} \langle v_i \rangle &= 0 \\ \langle v_i \cdot v_i \rangle &= U_i'^2 \\ U^2 &= \sum_{i=0}^n U_i'^2 \end{aligned}$$

4. $U_{T,n}$ est la vitesse moyenne à la plus grande échelle de turbulence. Au delà, la flamme ne gagne plus de plissement et donc plus de vitesse d'après VI.A.1. D'où $U_{T,n} = U_T$.

$U_{N,0}$ est la vitesse normale à la plus petite échelle de turbulence, en dessous de laquelle la flamme présente la même vitesse. D'où : $U_{N,0} = U_N$.

5. Immédiat d'après VI.C.2),3),4) :

La relation obtenue correspond à la résultante des effets produits par une famille d'écoulements d'échelles différentes. Comme le nombre d'échelles considérées peut être arbitrairement grand, U' et donc U'/U_N sont a priori illimités. Dès lors le domaine de validité de cette relation est non borné en U'/U_N .

Cette relation, jumelle de la relation (5), en constitue donc une extension dans le domaine non-linéaire des grandes intensités de turbulence : augmenter le nombre d'échelles ou l'intensité de turbulence ne modifie pas la loi gouvernant les vitesses moyennes.

6. La relation (5) est valable à une échelle ; la relation (6) est valable sur une gamme étendue d'échelles.

Comme l'augmentation du nombre d'échelles correspond à une augmentation de résolution, c'est à dire à une dilatation, l'identité des deux relations révèle une covariance par dilatation des lois du système, à savoir une invariance de leur forme par changement de mode d'observation.

Cette propriété est bien connue en mécanique et en électromagnétisme où la covariance des lois par transformation de Lorentz résulte du principe de relativité ainsi que de l'homogénéité et de l'isotropie de l'espace-temps. Sa pertinence provient ici de l'absence d'échelle caractéristique, puisque ni l'épaisseur de flamme ni l'échelle de dissipation de turbulence (échelle de Kolmogorov) n'interviennent dans la modélisation de l'interaction flamme-turbulence. Dans ce cadre, le système est invariant d'échelle de sorte qu'aucune de ses lois ne peut servir à identifier ni échelle, ni gamme d'échelles, tout comme les lois de la mécanique et de l'électromagnétisme ne peuvent conduire à identifier un repère galiléen absolu. C'est ce qu'atteste ici l'identité des deux relations (5) et (6).

N.B. : Le raisonnement précédent révèle la compatibilité entre la loi covariante (6) et la

propriété d'invariance d'échelle du système. Notons cependant qu'il est possible d'aller plus loin en dérivant la forme des lois covariantes de la seule hypothèse d'invariance d'échelle.

7. D'après la relation (6), $U_T \approx \sqrt{32/\pi} U'$ pour $U' \gg U_N$.

VI-D. Dimension fractale

1. Nous avons $R_{i+1}/R_0 = \beta^{i+1}$ et $L_{i+1}/L_0 = \alpha^{i+1}$. D'où $R_{i+1}/R_0 = (L_{i+1}/L_0)^\gamma$ avec $\beta = \alpha^\gamma$.

2. Le même raisonnement à partir de l'échelle L_k donne $R_{i+1}/R_k = (L_{i+1}/L_k)^\gamma$, soit $R_{i+1}/R_0 = \mu (L_{i+1}/L_0)^\gamma$ avec $\mu = R_k/R_0 (L_0/L_k)^\gamma$.

Si $\gamma = 0$, R_i est supérieur à R_0 pour $i > k$, de sorte que l'objet est constitué d'une gamme finie d'échelles. Il est donc euclidien et $d_F = 2$.

3. Par définition R_i et $U_{T,i}$ sont la rugosité et la vitesse moyenne résultant de plissements de tailles inférieures ou égales à L_i . Ces variables correspondent donc au même front, à savoir la portion de flamme contenue dans un tourbillon de taille L_i . On peut alors appliquer la relation VI.A.2 de sorte que $R_i = U_{T,i}/U_N$.

D'après VI.C.4 et VI.C.2 :

$$\frac{U_{T,j}^2}{U_N^2} = 1 + \frac{32}{\pi^2} \sum_{i=0}^j U_i'^2$$

Or $U_{T,j}/U_N = R_j$ d'après la question précédente, tandis que par hypothèse,

$$U_i'/U_0' = (L_i/L_0)^{1/3} = \alpha^{1/3}$$

Ainsi :

$$R_j^2 = 1 + \frac{32}{\pi^2} \left(\frac{U_0'}{U_N}\right)^2 \sum_{i=0}^j (\alpha^{2/3})^i = 1 + \frac{32}{\pi^2} \left(\frac{U_0'}{U_N}\right)^2 \frac{(L_{j+1}/L_0)^{2/3} - 1}{(L_1/L_0)^{2/3} - 1}$$

Lorsque le nombre d'échelles plissant la flamme augmente, i.e. $j \rightarrow \infty$, L_{j+1}/L_0 tend vers l'infini et R_j^2 devient asymptotiquement équivalent à $(L_{j+1}/L_0)^{2/3}$:

$$R_j^2 \rightarrow \frac{32}{\pi^2} \left(\frac{U_0'}{U_N}\right)^2 \left[\left(\frac{L_1}{L_0}\right)^{2/3} - 1\right]^{-1} \left(\frac{L_{j+1}}{L_0}\right)^{2/3} \quad \text{pour } j \rightarrow \infty$$

Ainsi, dans la limite d'un grand nombre d'échelles, il existe un préfacteur μ tel que :

$$\frac{R_j}{R_0} \approx \mu \left(\frac{L_{j+1}}{L_0}\right)^{1/3} \quad \text{pour } j \rightarrow \infty$$

D'après VI.D.2, cela signifie que plus le nombre d'échelles augmente, plus la flamme se rapproche d'un fractal : la nature fractale de l'interface apparaît ici comme conséquence de la covariance de sa loi de formation.

4. D'après la question précédente et VI.D.2, la dimension fractale d'une flamme turbulente dans un système satisfaisant la loi de Kolmogorov est $d_F = 2 + 1/3 = 7/3$.

Références :

- P.Clavin et E.Guyon, La flamme, *La Recherche*, 94, Novembre 1978
- L.Boyer, Flammes : formes et mouvement ; le regard d'un physicien, *Revue du Palais de la Découverte*, 18, n°178, 1990
- R.Borghi et M.Destriau, La combustion et les flammes, *Editions Technip*, 1995
- F.Williams, Combustion Theory, Second Edition, *Ed. The Benjamin/Cummins Publishing Company*, 1985
- A.Pocheau et D.Queiros-Condé, *C.R.Acad.Sci.*, t.319, Série II, 1994, p.879-885

Agrégation (Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

Épreuve A : Composition de chimie - Session : 1995

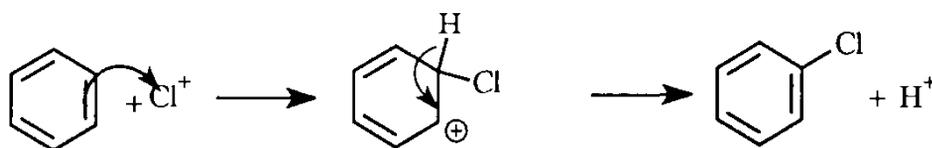
A PROPOS DE QUELQUES RÉACTIONS FONDAMENTALES

Synthèse du Valium

1. Mécanisme en 4 étapes :

- formation de Cl^+ : $\text{AlCl}_3 + \text{Cl}_2 \rightleftharpoons \text{AlCl}_4^- + \text{Cl}^+$;

- addition-élimination :



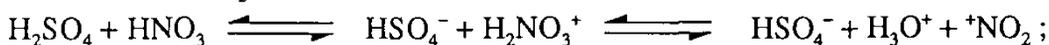
- régénération de AlCl_3 : $\text{AlCl}_4^- + \text{H}^+ \longrightarrow \text{AlCl}_3 + \text{HCl}$.

2.

2.1. 1-chloro-x-nitrobenzène, avec $x = 2, 3, 4$.

Mécanisme en quatre étapes :

- formation de NO_2^+ :



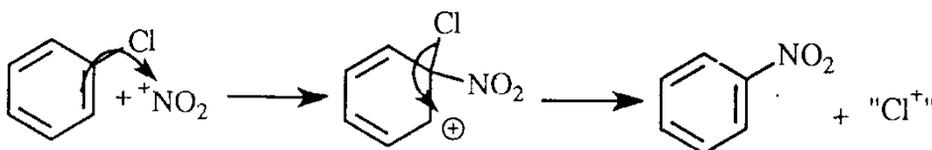
addition-élimination (mécanisme identique au précédent), régénération de H_2SO_4 .

On attend les **trois** produits possibles, avec ortho et para majoritaires et $p > o$.

Dans un diagramme réactionnel en G^\ddagger , les intermédiaires de Wheland sont hauts en G^\ddagger et $G^\ddagger(o, p) < G^\ddagger(m)$. On applique le postulat de Hammond (intermédiaires de G^\ddagger élevé) et on en déduit que o et p sont cinétiquement favorisés.

Souvent, p est favorisé par rapport à o à cause de l'encombrement stérique.

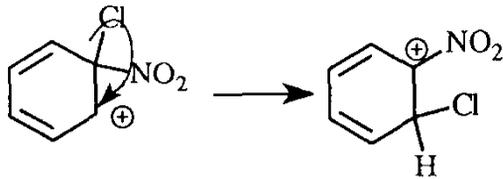
2.2. Mécanisme avec attaque *ipso* et départ de " Cl^+ ".



2.3. Si la réaction est sous contrôle orbitalaire : *para* et *ipso* sont très favorisés puisque la HOMO est la plus développée sur ces deux positions.

L'attaque *ipso* peut conduire au nitrobenzène (voir ci-dessus).

On peut également avoir *ipso* \rightarrow *ortho* par transposition avant la perte de H^+ :



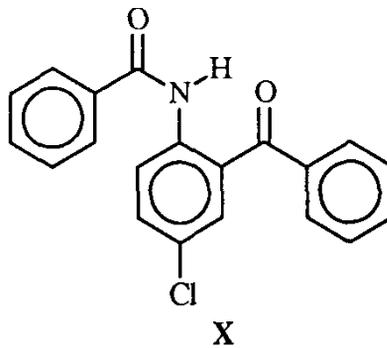
La gêne stérique est une interaction déstabilisante à 4 électrons (dans deux orbitales).

3.

3.1. Benzène → 4-chloroaniline : chloration, nitration, séparation des isomères, réduction par l'étain ou le fer dans l'acide chlorhydrique (LiAlH_4 ne marche pas).

Cette solution est bien meilleure que : nitration, réduction, chloration car la chloration dégage HCl qui donne un ion ammonium, *m*-directeur, avec l'aniline. Pour que cette voie fonctionne, il faut protéger le groupe NH_2 en le transformant en amide (par Ac_2O par exemple) puis le libérer par hydrolyse en fin de réaction. Dans ces conditions, la dernière étape sera probablement très régiosélective.

3.2.



Mécanisme qui donne X : formation de l'amide avec l'intermédiaire tétraédrique et SEA.

X → A : addition de NH_2 sur $\text{C}=\text{O}$ cétonique avec formation de l'amine alcool, puis réaction de l'azote avec le $\text{C}=\text{O}$ de l'amide.

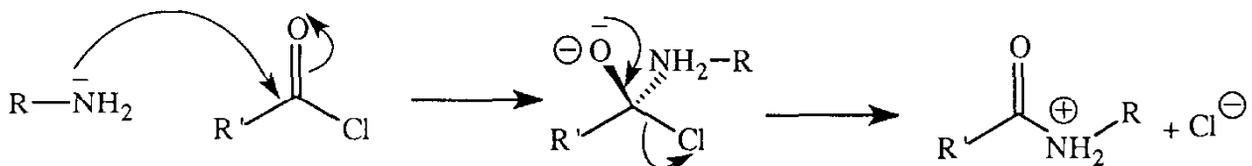
A → B : toute hydrolyse raisonnable et bien écrite convient. Il reste la moitié de la molécule à recycler : on n'obtient pas 2 B.

ZnCl_2 sert à former l'acylium : $\text{ArCOCl} + \text{ZnCl}_2 \longrightarrow \text{ArCO}^+ + \text{ZnCl}_3^-$.

3.3.

3.3.1. Cette écriture est incorrecte parce qu'on ne met pas en évidence l'intermédiaire tétraédrique.

Écriture correcte en deux étapes : addition conduisant à l'intermédiaire tétraédrique puis "élimination" :



Remarque générale : lorsqu'on demande un mécanisme, toutes les flèches et tous les doublets participant à la réaction doivent figurer dans l'écriture, sinon on a, au mieux, un bilan.

3.3.2. L'interaction $n - \pi^*$ entre le doublet de l'azote et le $\text{C}=\text{O}$ est plus favorisée (ΔE plus petit) que l'interaction $n - \sigma^*$ entre le doublet de l'azote et la liaison $\text{C}-\text{Cl}$.

Il ne faut pas oublier que toute rupture de liaison dans ce genre de mécanisme est dû à l'interaction d'une HOMO (pleine) et d'une LUMO (vide).

3.3.3. Un doublet non liant de O nourrit la σ^* C-Cl et la liaison s'en trouve affaiblie.

L'effet anomère dans l' α -glucose, par exemple, a la même origine.

La liaison C-O est plus longue et la S_N a lieu facilement avec HBr par exemple.

ΔE est plus faible entre n de O et σ^* de C-Cl qu'entre n de O et σ^* de C-C.

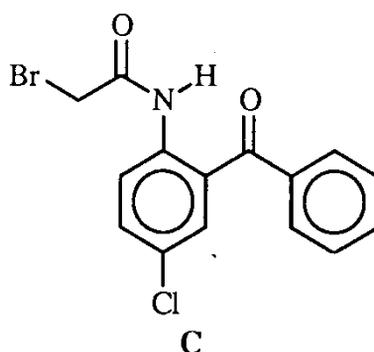
3.3.4. La notation indiquée est satisfaisante si l'on se limite à la formation de l'intermédiaire tétraédrique et au bilan électronique. Dans ces conditions, les indications de charge n'ont pas de raison d'être.

Mais cette notation est très dangereuse et fautive car elle implique un contrôle de charge, ce qui n'est pas le cas ici.

4.

4.1. En termes classiques, les chlorures d'acyle sont très réactifs à l'égard des amines, et l'acylation est favorisée par rapport à la S_N .

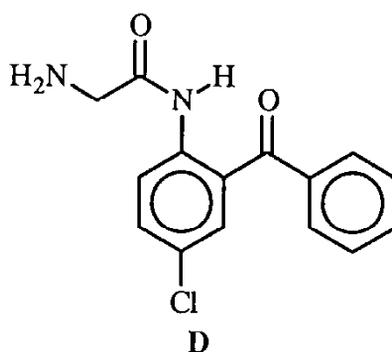
En termes orbitales : ΔE est plus faible entre n de l'azote et π^* du C=O qu'entre n et σ^* de C-Br, ce qui explique l'attaque observée.



4.2.

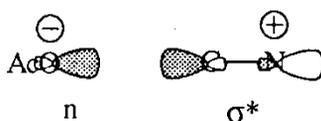
4.2.1. La réaction conduisant de C à D est une S_N .

I^- est meilleur nucléophile que NH_3 , donc $C-Br \rightarrow C-I$, et meilleur groupe partant que Br et $C-I \rightarrow C-NH_2$.



4.2.2. Si la réaction était sous contrôle de charge, le nucléophile attaquerait du côté de la charge positive et l'on observerait une rétention de configuration.

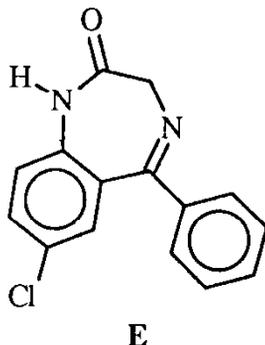
Le contrôle est donc orbitalaire : interaction entre n de AcO^- et σ^* de $C-N^+$ qui est plus basse que σ^* de C-C. Il y a donc bien départ de N.



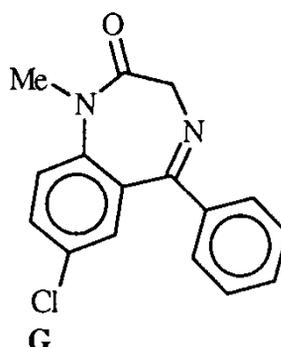
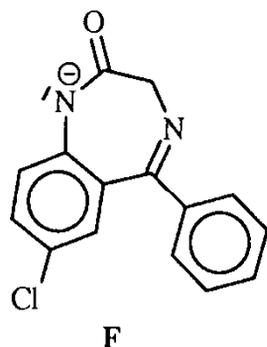
4.2.3. La notation indiquée est satisfaisante si l'on se limite au bilan électronique. Dans ces conditions, les indications de charge n'ont pas de raison d'être.

Mais cette notation est très dangereuse et fautive car elle implique un contrôle de charge, ce qui n'est pas le cas ici.

4.3. Mécanisme de la formation de l'imine : addition, prototropie, élimination d'eau.



4.4.



On passe par F pour s'assurer que la méthylation aura bien lieu sur l'azote de l'amide et non sur celui de l'imine. On remarquera que le H du groupe NH de l'amide, est plus acide que celui qui se trouve en α du CO : une amide n'est pas une cétone !

UN GRAND CLASSIQUE

Cyclopentanone : cyclohexanone + acide nitrique \rightarrow acide adipique, estérification, Dieckmann, saponification, décarboxylation, ou mieux Piria sur l'acide adipique.

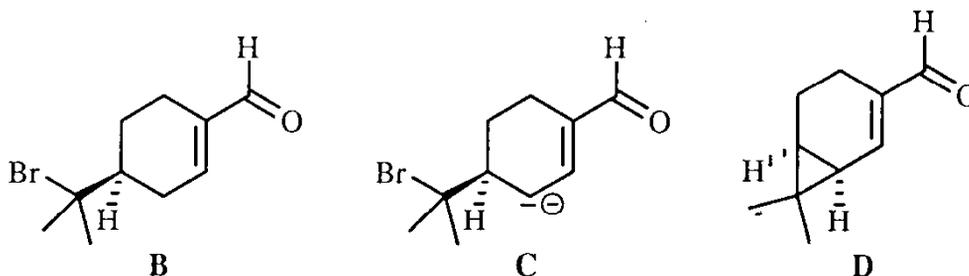
Cycloheptanone : acide adipique, adipate de diéthyle, LiAlH_4 , PBr_3 , NC^- , hydrolyse acide et on est ramené au problème précédent.

SYNTHÈSE DU (-)-AROMADENDRÈNE

1.

1.1. A = (S)-4-isopropénylcyclohex-1-énealdéhyde.

1.2.



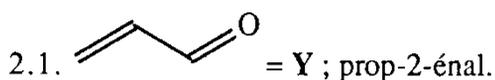
X = $\text{H}_2\text{C}=\text{PPh}_3$, ylure de phosphonium pour une réaction de Wittig.

$\text{MeI} + \text{PPh}_3$, puis BuLi (l'indication "base" est insuffisante, les autres bases fortes ne constituent pas la méthode générale).

C est l'énolate de la cétone conjuguée B, dont la charge est délocalisée sur l'oxygène.

1.3. La jonction de cycle est *cis* : sinon la S_N impossible sur C-Br.

2.



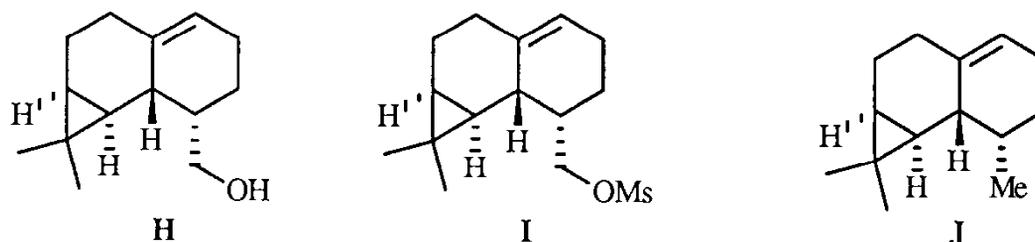
2.2. F : endo ; G : exo.

Endo est majoritaire à cause des interactions secondaires stabilisantes entre $\text{C}=\text{O}$ et le diène.

L'orientation est liée à la valeur des coefficients des O.A. dans les O.M. qui interagissent.

La jonction de cycle due à l'arrivée de l'alcène par en-dessous.

3.

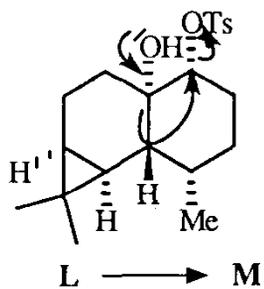
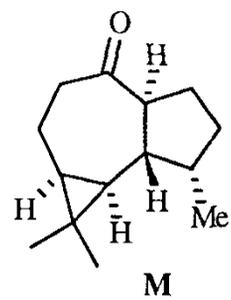
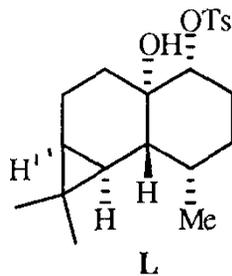
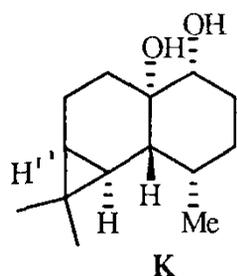


J : résultat d'une S_N par H^- sur OMs, bon groupe partant.

4.

4.1. Z = H_2S . Si l'on a suggéré H_2O_2 , il fallait préciser qu'alors OsO_4 , cher et toxique, est utilisé en quantité catalytique.

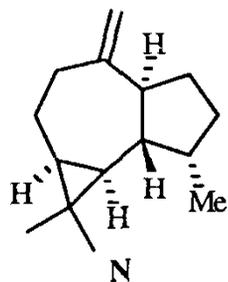
4.2.



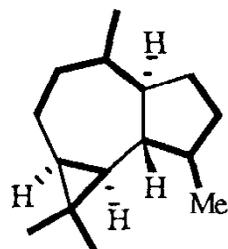
La transposition conduisant à un changement de taille des cycles ne pouvait être que celle-ci : c'est la seule qui permet une attaque de la liaison C-OTs par derrière.

Un mécanisme comportant une perte de OTs en premier n'était pas raisonnable : plusieurs produits auraient été obtenus (et l'alcool d'origine n'est que secondaire).

4.3.



4.4.



ÉTUDE DE QUELQUES HÉTÉROCYCLES AZOTÉS

1.

1.1. Le pyrrole est très peu basique : le doublet de l'azote participe à l'aromaticité et sa forme acide n'est pas aromatique (formation d'un ion ammonium).

Dans la pyridine, le doublet de l'azote est "autonome", donc basique.

pK_a du pyrrole : 0,4, pK_a de la pyridine : 5,2.

1.2. Attention ! Les deux systèmes considérés sont à six électrons.

$$A : 4 (\alpha + \beta) + 2 (\alpha + 1,5 \beta) = 6 \alpha + 7 \beta ;$$

$$A' : 2 (\alpha + 2,32 \beta) + 2 (\alpha + 1,18 \beta) + 2 (\alpha + 0,62 \beta) = 6 \alpha + 8,24 \beta.$$

$$E = E(A') - E(A) = 1,24 \beta.$$

$$B : 4 (\alpha + \beta) + 2 (\alpha + 1,29 \beta) = 6 \alpha + 6,58 \beta ;$$

$$B' : 2 (\alpha + 2,11 \beta) + 2 (\alpha + 1,17 \beta) + 2 (\alpha + 1,00 \beta) = 6 \alpha + 8,56 \beta.$$

$$E = E(B') - E(B) = 1,98 \beta.$$

L'énergie de résonance est plus grande pour la pyridine que pour le pyrrole.

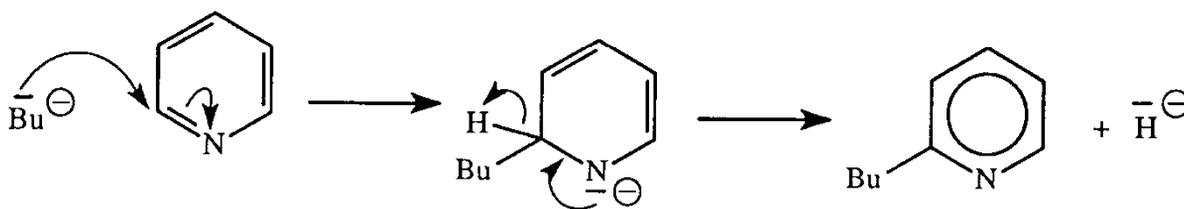
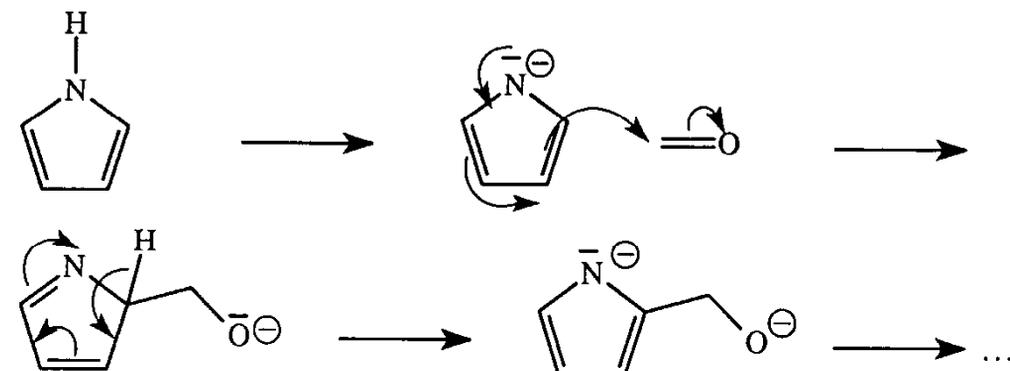
1.3.

1.3.1. La pyridine est la plus réactive à l'égard des nucléophiles : sa LUMO est plus basse en énergie que celle du pyrrole.

1.3.2. Le pyrrole est le plus réactif à l'égard des électrophiles : sa HOMO est plus haute en énergie que celle de la pyridine.

1.4.

1.4.1.



1.4.2. Dans le premier cas, c'est la HOMO du pyrrole qui réagit : elle a son plus gros coefficient en 2, donc la régiosélectivité est ainsi justifiée.

Il est particulièrement intéressant de voir qu'on comprend bien ainsi pourquoi le pyrrole n'a pas un comportement de type énamine.

Dans le deuxième cas c'est la LUMO de la pyridine qui réagit : Bu devrait donc entrer en para. La seule considération des orbitales frontières des réactifs ne suffit pas à expliquer le résultat.

1.5.

D_2 , D_3 , D_4 sont la x-butylpyridine avec, respectivement, $x = 2, 3, 4$.

Ordre de stabilité : $d_2 : 7,76 \beta$; $d_3 : 6,90 \beta$; $d_4 : 7,50 \beta$; donc $d_2 > d_4 > d_3$.

Sous contrôle cinétique (postulat de Hammond, car d_i haut en G^\ddagger) d_2 est formé le plus rapidement.

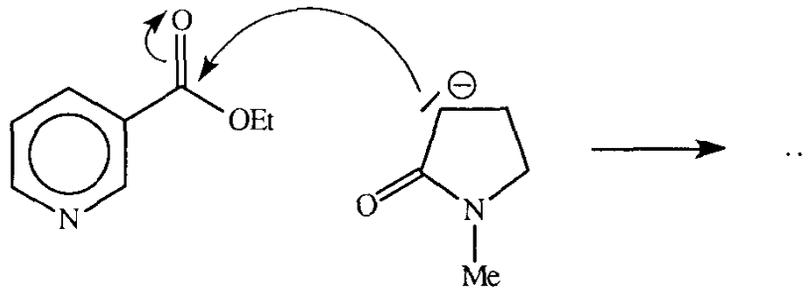
1.6. Les composés, de type NADH, sont de bons réducteurs : on récupère l'aromaticité. Par

ailleurs, la partie enzyme les rend chiraux.

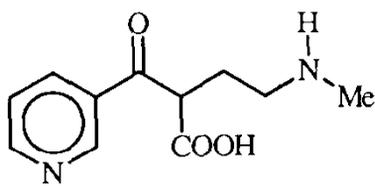
On peut donc en attendre des réductions asymétriques.

2.

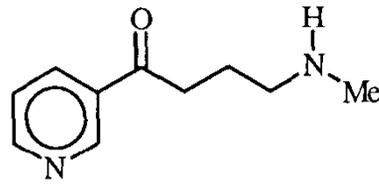
2.1.



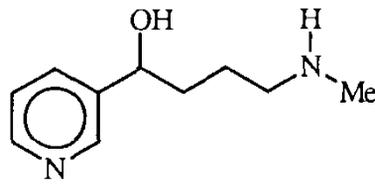
2.2.



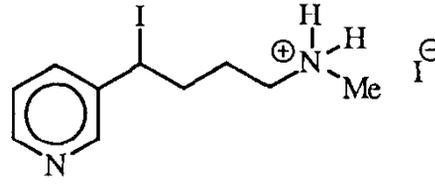
H



I



J



K

Les mécanismes sont tous classiques.

K est bien le sel d'ammonium puisqu'on doit le traiter en milieu basique pour libérer l'amine et obtenir la SN interne.

3.

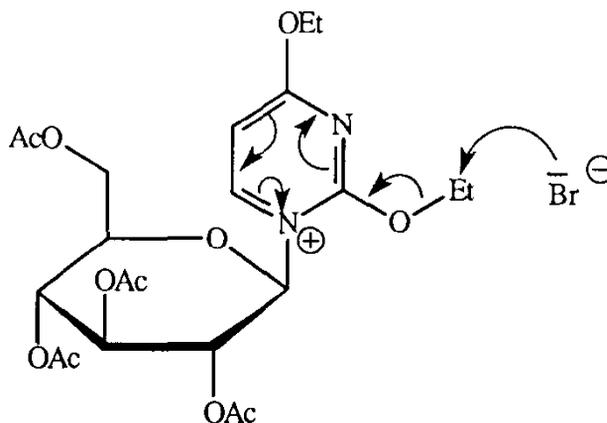
3.1. La liaison C-OH de l'atome de carbone anomère est la plus faible des liaisons C-OH, donc la plus susceptible de subir une substitution.

Puce à l'oreille : il y a rétention de configuration, donc, probablement, double SN. On peut soupçonner une assistance interne au départ de Br.

En aucun cas on ne peut avoir un mécanisme de type SN1.

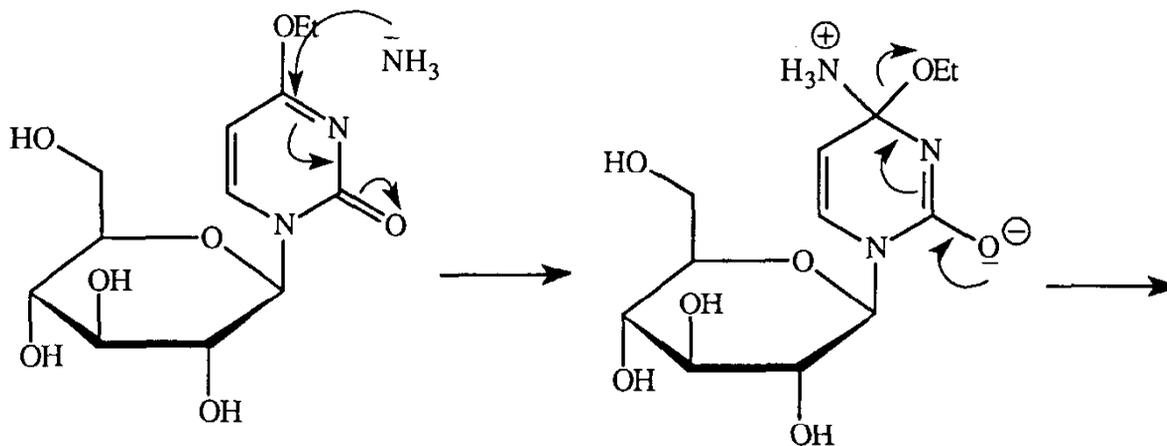
3.2.

D'abord SN2 sur le C anomérique (inversion de configuration), l'azote le moins encombré réagit. Ensuite :

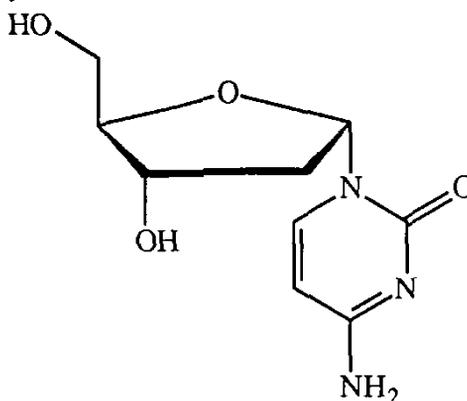


3.3. Saponification de tous les acétates par HO⁻, ou transformation en amide par NH₃ avec libération de l'alcool, puis SNA sur la pyrimidone.

Le second mécanisme s'écrit :

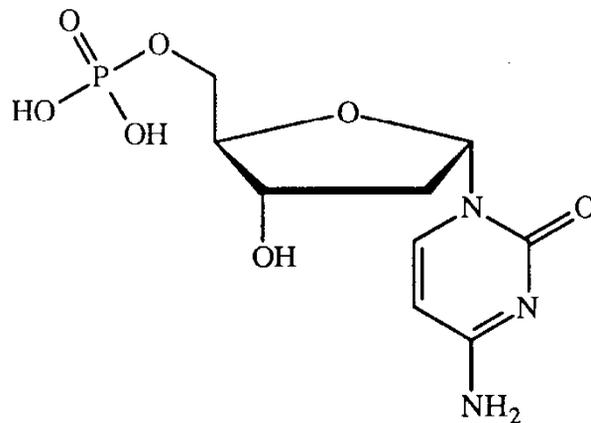


3.4. Si l'on part du 2-désoxyribofuranose, on obtient, si l'on suit exactement le schéma précédent :

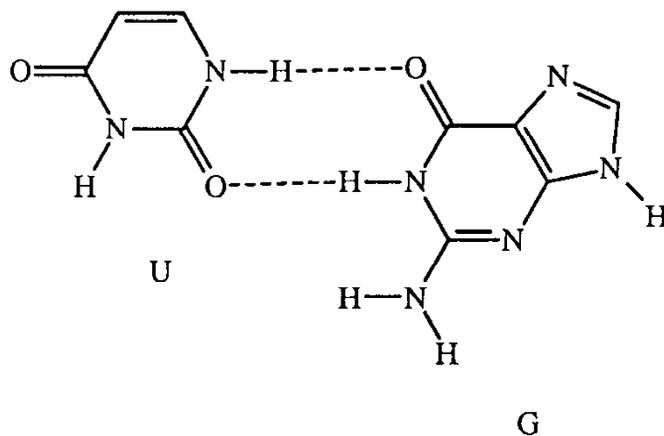
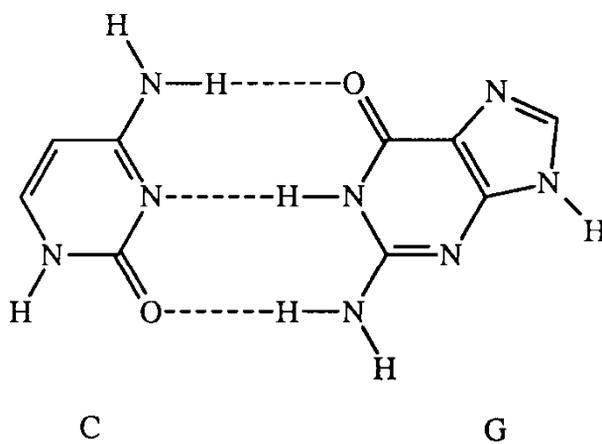


Toutefois, la réponse avec la pyrimidone en haut n'était pas sans fondement puisque, dans le cas du 2-désoxyribofuranose, la substitution initiale de OH par Br ne semble pas pouvoir être assistée.

Le nucléotide demandé est :



3.5.



Si l'on s'intéresse à la formation de paires de nucléotides, la deuxième paire est stéréochimiquement défavorisée à cause de la position des sucres.

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

Épreuve C : Composition de Chimie (applications) - Session : 1995

PREMIERE PARTIE : A PROPOS DE L'URANIUM

I/ ETUDE DU MINERAL

I.1.1. Les cations se situent habituellement dans des lacunes tétraédriques, octaédriques ou cubiques du réseau des anions.

I.1.2. Les limites de stabilité, correspondant au contact entre cations/anions et anions/anions, sont imposées par le rapport $\rho = R^+/R^-$ tel que : tétraédriques $< 0,414 <$ octaédriques $< 0,732 <$ cubiques

I.1.3. Ici, on a $\rho = 114/124 = 0,92 > 0,732$

On attend donc les ions U^{4+} dans des lacunes cubiques.

I.1.4. La structure correspondante est la structure fluorine avec:

I.1.5. un réseau cubique à faces centrées d'ions U^{4+} : $4.U^{4+}$ /maille
des oxydes O^{2-} dans toutes les lacunes tétraédriques : $8.O^{2-}$ /maille.

I.1.6. Dans une telle structure, le contact est établi entre cations et anions le long de la grande diagonale du cube, soit :

$$a.\sqrt{3} = 4.(R^+ + R^-) \quad \text{donc} \quad a = 549,6 \text{ pm}$$

On en déduit alors la masse volumique ρ :

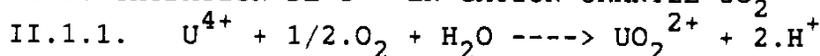
$$\rho = 4.(MM_U + 2.MM_O) / N.a^3 \quad \rho = 10,8 \text{ g.cm}^{-3}$$

I.2 Il y a un excès d'oxygène par rapport à l'uranium. C'est une non-stoechiométrie.

Le paramètre de maille a décroît quand x augmente : on attendrait donc plutôt des défauts de Schottky. Ce n'est pourtant pas le cas.

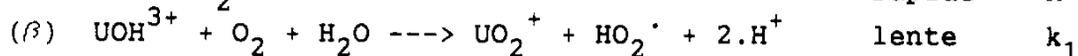
II/ OBTENTION DU DIURANATE D'AMMONIUM

II.1. OXYDATION DE U^{4+} EN CATION URANYLE UO_2^{2+}



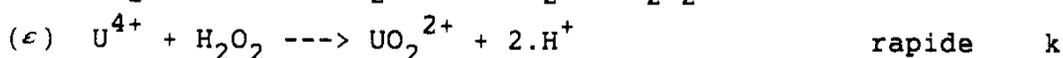
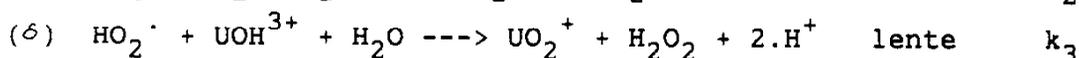
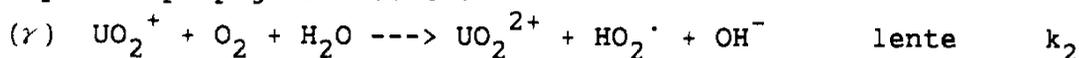
II.1.2.1. C'est un mécanisme en chaîne linéaire car un centre actif créé dans une étape d'amorçage disparaît en cours de réaction pour donner des produits de réaction. On peut écrire une équation bilan comme une combinaison linéaire des étapes de propagation. Chaque disparition d'un centre actif dans les étapes de propagation est compensé par la formation d'un seul autre centre actif.

L'amorçage est constitué des deux premières réactions :

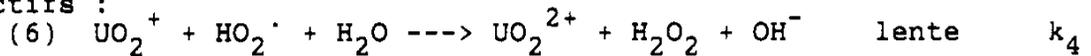


et crée le centre actif UO_2^+ .

Les étapes de propagation sont :



La réaction (6) est la seule terminaison faisant disparaître des centres actifs :



II.1.2.2. La vitesse de réaction peut être définie par :

$$V = d(\text{UO}_2^{2+})/dt = k_2 \cdot (\text{UO}_2^+) \cdot (\text{O}_2) + k_4 \cdot (\text{UO}_2^+) \cdot (\text{HO}_2^\cdot)$$

On applique l'A.E.Q.S. aux espèces intermédiaires: HO_2^\cdot (a) UO_2^+ (b) H_2O_2 (c)

On en déduit :

$$\text{par (a)+(b)} \quad (\text{HO}_2^\cdot)/(\text{O}_2) = k_1 \cdot (\text{UOH}^{3+})/k_4 \cdot (\text{UO}_2^+)$$

$$\text{par (a)-(c)} \quad (\text{UOH}^{3+})/(\text{UO}_2^+) = k_2 \cdot (\text{O}_2)/k_3 \cdot (\text{HO}_2^\cdot)$$

$$\text{donc} \quad (\text{UOH}^{3+})/(\text{UO}_2^+) = \sqrt{k_2 k_4 / k_1 k_3}$$

et finalement :

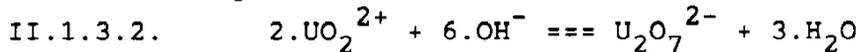
$$V = F \cdot (\text{U}^{4+}) \cdot (\text{O}_2) / (\text{H}^+) \quad \text{avec} \quad F = K \cdot k_1 \cdot (1 + \sqrt{k_2 k_3 / k_1 k_4})$$

II.1.2.3. Expérimentalement, on a donc intérêt à opérer en milieu basique, car (H^+) très faible, ce qui augmente considérablement la vitesse de la réaction.

II.1.2.4. On peut justifier l'effet catalytique des ions Cu^{2+} , car au total des deux réactions proposées, les ions cuivre(II) sont régénérés, et il y a alors augmentation du nombre de centres actifs (UO_2^+ et HO_2^\cdot).

II.1.2.5. Inversement, les ions Ag^+ font disparaître ces mêmes centres actifs, ce qui diminue la vitesse.

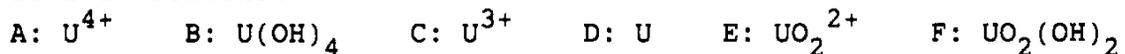
II.1.3.1. Pour $\text{U}_2\text{O}_7^{2-}$, on peut penser à une structure renfermant deux tétraèdres reliés par un O commun.



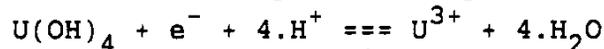
Un milieu basique déplacera l'équilibre vers la droite.

II.2. METHODE DE DOSAGE DES IONS URANYLE .

II.2.1. Domaines:

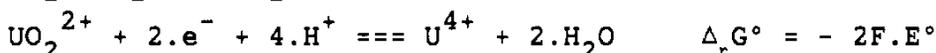


La droite frontière 2-2 correspond au couple :



dont $E = E^\circ + 0,06 \cdot \log\{ (\text{H}^+)^4 / (\text{U}^{3+}) \} = \alpha - 4,0,06 \cdot \text{pH}$ pente = - 0,24

Pour la droite 3-3, on a :



d'où $-2F \cdot E^\circ = -RT \cdot \text{Ln}(K_{s_f}) - 2F \cdot E^\circ - RT \cdot \text{Ln}(1/K_{s_b}) - RT \cdot \text{Ln}(K_e^2)$

$$E^\circ = 0,24 \text{ V} \quad \text{et} \quad E = 0,24 - 0,06 \cdot \text{pH}$$

II.2.2.1. On est en milieu très acide. Les Cr^{2+} réduisent UO_2^{2+} en U^{4+} . L'indicateur ($E^\circ \cong 0,28\text{V}$) ne vire que juste en dessous de la droite 3-1. C'est pourquoi on met un léger excès de Cr^{2+} pour être sûr de n'avoir que des U^{4+} (et bien sûr Cr^{2+} et Cr^{3+}). Ce couple fixe alors $E \cong -0,40\text{V}$, ce qui est en plein domaine de U^{4+} , et on ne risque pas de fabriquer U^{3+} .

On va alors doser les U^{4+} par MnO_4^- . Mais auparavant, il faut éliminer les Cr^{2+} en excès. Ceci est réalisé par l'oxygène de l'air (qui ne laisse pas de forme réduite gênante) car on est toujours en milieu très acide, si bien que l'oxydation de U^{4+} en UO_2^{2+} est bloquée cinétiquement. On peut donc aller jusqu'à $E \cong 0,28\text{V}$ (l'indicateur revire au rouge), ce qui oxyde Cr^{2+} en Cr^{3+} mais ne touche pas à U^{4+} . On peut alors doser U^{4+} par le permanganate en milieu très acide pour ne pas risquer d'obtenir MnO_2 .

II.2.2.2. On n'a pas réduit directement UO_2^{2+} par l'amalgame de zinc car on obtiendra alors $E \cong -0,6$ à $-0,7\text{V}$, donc un mélange de U^{4+} et de U^{3+} dans des proportions non définies, donc "indosable".

II.2.2.3. L'amalgame de zinc permet :

d'éviter un dégagement de dihydrogène (surtension sur Hg)
d'ajuster le "pouvoir réducteur" du zinc en jouant sur la concentration dans l'amalgame.

II.2.2.4. Le milieu très acide permet d'éviter l'oxydation de U^{4+} par l'oxygène de l'air.

II.3. ETUDE DES ETAPES DE PURIFICATION ET DE CONCENTRATION.

II.3.1.1. Il est naturel de définir le rendement de l'extraction par :

$$\rho = \text{nb de moles extraites} / \text{nb de moles initial}$$

En posant : n° : nb de mole initial n_r : nb de mole restant dans l'eau

$$\rho = \{n^\circ - n_r\} / n^\circ = \{n^\circ / V_{\text{aq}} - n_r / V_{\text{aq}}\} / n^\circ / V_{\text{aq}} = \{C^\circ - C_{\text{aq}}\} / C^\circ$$

La conservation s'écrit : $V_s \cdot C_s + V_{\text{aq}} \cdot C_{\text{aq}} = V_{\text{aq}} \cdot C^\circ$

et le coefficient de partage : $P = C_s / C_{\text{aq}}$

d'où $C_{\text{aq}} = C^\circ \cdot \{V_{\text{aq}} / P \cdot V_s + V_{\text{aq}}\}$ et $\rho = 1 - \{V_{\text{aq}} / (P \cdot V_s + V_{\text{aq}})\}$

II.3.1.2. Avec $V_s = V_{\text{aq}} / n$ on obtient après la première extraction :

$$C_{\text{aq}}(1) = C^\circ \cdot \{V_{\text{aq}} / P \cdot V_s + V_{\text{aq}}\} = C^\circ \cdot \{n / P + n\}$$

Une récurrence donne immédiatement :

$$C_{\text{aq}}(n) = C^\circ \cdot \{n / P + n\}^n \quad \text{donc} \quad \rho(n) = 1 - \{n / P + n\}^{-n}$$

Posons $\rho(n) = 1 - X$ $\text{Ln}(X) = n \cdot \text{Ln}(n / P + n) = -n \cdot \text{Ln}(1 + P/n)$

Pour $n \rightarrow \infty$, $\text{Ln}(1 + P/n) \cong (P/n) \cdot (1 + \varepsilon(P/n)) \Rightarrow \rho \rightarrow 1 - e^{-P}$

II.3.2.1. Par définition :

$$X' = (\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2)_s / \{(\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2)_{\text{aq}} + (\text{UO}_2^{2+})_{\text{aq}}\} = P' / \{1 + 1/K' \cdot (\text{NO}_3^-)^2\}$$

II.3.2.2. L'ion nitrate étant un très mauvais ligand, on doit s'attendre à $K' \ll 1$. On constate effectivement que $\beta_1 = 0,5$ deux questions plus loin, et donc a fortiori, quand on amène le second NO_3^- , les interactions, surtout électrostatiques, sont encore plus faibles.

Le complexe étant neutre et gros, son passage en solution dans le dodécane ne doit pas poser de problème. Cependant, les ions NO_3^- et O^{2-} du complexe sont susceptibles d'établir des liaisons hydrogène avec l'eau. On peut donc attendre $P' \cong 1$.

Compte-tenu des solubilités de l'ordre de $0,01 \text{ mol.L}^{-1}$ dans le dodécane et 1 mol.L^{-1} dans l'eau, on en déduit que la forme prédominante dans l'eau est UO_2^{2+} . Dans l'expression

$$X' = (\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2)_s / \{ (\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2)_{\text{aq}} + (\text{UO}_2^{2+})_{\text{aq}} \}$$

on peut donc négliger le premier terme du dénominateur et l'expression se simplifie en : $X' \cong P' \cdot K' \cdot (\text{NO}_3^-)^2$

II.3.2.3. X' est équivalent au coefficient de partage du II.3.1. Or :

$$P' \cong 1 \quad (\text{NO}_3^-) \cong 1 \quad K' \ll 1 \quad \text{donc} \quad X' \ll 1$$

La limite pour des extractions successives serait $\rho_\infty = 1 - e^{-\epsilon} \cong 0$!!!

Des extractions successives ne présentent donc pas d'intérêt, sauf si on augmente énormément le volume de solvant (car le calcul a été fait pour un volume total de solvant égal au volume de solution aqueuse). Mais une telle solution n'est alors pas simple technologiquement.

II.3.2.4. La série $\text{F}^-(K=4.10^4) \gg \text{Cl}^-(K=0,8) > \text{Br}^-(K=0,5)$ montre que la liaison dans le complexe est essentiellement électrostatique.

L'ion CO_3^{2-} est alors plus fortement retenu car plus chargé. Il y a de plus un effet de chélation. On retrouve cet effet avec NO_3^- qui se fixe aussi bien que les Br^- , bien que la charge réelle sur chaque oxygène n'est que $-1/3$.

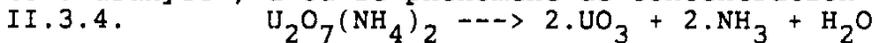
II.3.3. Méthode industrielle.

On doit avoir ici $X'' \cong P''K'' \cdot (\text{TBP})_s^2 \cdot (\text{NO}_3^-)_{\text{aq}}$

II.3.3.1. Il faut que le produit $K''P''$ soit assez fort pour que l'extraction puisse avoir lieu. Mais comme on réextrait la phase organique par de l'eau pour récupérer les sels d'uranyle, il ne faut pas que le produit $K''P''$ soit trop élevé, sinon il ne repasserait qu'une proportion trop faible d'uranium en solution aqueuse, ce qui ne donnerait que des solutions trop diluées.

II.3.3.2. Pour l'extraction, le nitrate d'uranyle est en solution dans l'acide nitrique concentré, donc la concentration en nitrates est élevée, donc X'' augmente, et le rendement de l'extraction est bon, d'autant que le complexe extrait renferme 2.TBP, et que l'on a utilisé un solvant organique concentré en TBP. Il y a purification car seul le complexe (neutre) est extrait, les impuretés ioniques restant en phase aqueuse.

La phase organique est alors mise en contact avec de l'eau pure, donc sans nitrates initialement. Le complexe repasse donc en solution aqueuse et se dissocie. On va donc récupérer une phase organique renfermant les mêmes proportions qu'au départ, mais la phase aqueuse renfermant moins de nitrate, on ne peut parvenir à l'équilibre qu'en dissolvant davantage de nitrate d'uranyle, d'où le phénomène de concentration.



III/ REDUCTION DU TRIOXYDE EN DIOXYDE

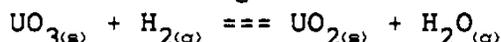
III.1. La dismutation s'écrit : $3.\text{UO}_2 \rightleftharpoons 2.\text{UO}_3 + \text{U}$

$$\Delta_r G^\circ = 2.\Delta_f G^\circ(\text{UO}_3) + \Delta_f G^\circ(\text{U}) - 3.\Delta_f G^\circ(\text{UO}_2) = 807 - 0,010.T \text{ en kJ.mol}^{-1}$$

$$A^\circ = -807 + 0,010.T < 0 \text{ quelle que soit la température.}$$

Or toutes les phases étant des solides purs, $A = A^\circ < 0$. Donc UO_3 et U ne peuvent pas coexister en équilibre, ce qui entraîne que la réduction de UO_3 mènera à UO_2 et non pas à l'uranium métallique.

III.2. La réduction de UO_3 par le dihydrogène s'écrit :



$$\Delta_r G^\circ = \Delta_f G^\circ(UO_2) + \Delta_f G^\circ(H_2O) - \Delta_f G^\circ(UO_3) = -101 - 0,079.T \text{ en kJ.mol}^{-1}$$

$\Delta_r G^\circ < 0$ quelle que soit la température. L'équilibre se déplace largement vers la droite. A l'équilibre, pour $T \cong 1000K$, on obtient $\Delta_r G^\circ = -180kJ$ or $\Delta_r G^\circ(T) = -RT.LnK$, ce qui donne pour $T = 1000K$

$$K = P(H_2O)/P(H_2) = 2,50.10^9$$

Le dihydrogène a été convenablement utilisé pour réduire UO_3 en UO_2 puisqu'il n'en reste pratiquement pas.

IV/ OBTENTION DE L'HEXAFLUORURE D'URANIUM

IV.1 ETUDE DE L'EQUILIBRE

IV.1.1. On peut réaliser une trempe des gaz à l'équilibre, en dissoudre un volume connu dans de l'eau en quantité suffisante et doser l'acide fluorhydrique dans la solution obtenue.

$$IV.1.2. K = P_{HF}^4 / P_{H_2O}^2 = X^4 / (1+X)^2 \quad K = 3,95.10^{-8}$$

IV.1.3. Il faut linéariser $Ln(K) = F(1/T)$: $Ln(K) = 4,22 - 1,0.10^4/T$ soit $\Delta_r H^\circ = R.\partial Ln(K)/\partial(1/T) = 83,2 \text{ kJ.mol}^{-1}$

En reprenant l'expression linéaire $\Delta_r G^\circ = -RT.Ln(K) = 4,22.R.T - 10^4.R$

$$\text{et } \Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T.\Delta_r S^\circ \quad \Delta_r S^\circ = 4,22.R = 35,11 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

IV.1.4. Le texte donne à $200^\circ C$ $P_{HF}/P_{H_2O} = 1,42.10^{-2}$ Il suffit de très peu de HF pour déplacer l'équilibre vers la gauche et ainsi s'assurer de la disparition complète de UO_2 . On ne peut éliminer la vapeur d'eau qu'à basse température car tout chauffage déplacerait l'équilibre dans le sens endothermique, c'est à dire vers la reformation de UO_2 . On ne peut pas non plus tirer sous vide pour éliminer l'eau car on déplace aussi vers la droite. D'où la nécessité d'"entraîner l'eau". Ceci ne peut se faire par l'air car l'oxygène risque de provoquer $UF_4 + O_2 \rightarrow UO_2 + 2.F_2$ Il est donc préférable d'opérer en milieu "réducteur".

IV.2. PASSAGE A UF_6 ET ENRICHISSEMENT

IV.2.1. La loi de Graham énonce que la vitesse de diffusion d'un gaz à travers une paroi poreuse est inversement proportionnelle à la racine carrée de sa masse molaire.

$$\text{Elle provient de la théorie cinétique des gaz : } 1/2.m\langle v \rangle^2 = kT$$

$$IV.2.2.1. \text{Initialement : } r_i = 1/139 = 7,19.10^{-3}$$

Dans le gaz enrichi, si X est la fraction molaire en $^{235}UF_6$:

$$MM_f = 29.d = 349,2 = X.349 + (1-X).352$$

$$X = 0,9467 \quad r_f = X / 1-X = 17,75$$

L'efficacité d'une diffusion est $F_1 = \sqrt{352/349} = 1,00429$

Le facteur de séparation que l'on doit obtenir est $F_f = r_f/r_i = 2468$

IV.2.2.2. Il faut donc n diffusions, avec n tel que $1,00429^n = 2468$ soit $n = 1825$ diffusions successives pour atteindre la concentration désirée.



SECONDE PARTIE : COMPLEXATION PAR LES PHOSPHINESI/ DEFINITION DU PARAMETRE STERIQUE θ

I.1. Pour NH_3 : $\bar{\Phi} = 106,5^\circ \implies 22\%$ de caractère S

Pour PH_3 : $\bar{\Phi} = 93,5^\circ \implies 5,8\%$ de caractère S

VSEPR : ils sont AX_3E , donc tétraédrique (109°) mais refermés par répulsion de la paire non-liante , plus refermé pour NH_3 car l'atome d'azote est plus petit que celui du phosphore , les interactions sont donc plus fortes .

HYBRIDATION : les mêmes résultats pouvaient être obtenus en raisonnant sur l'état d'hybridation .

I.2.1. PI_1 est d'autant plus élevé que les électrons sont arrachés à un niveau stable , ce qui correspond à un doublet non-liant pour lequel la contribution de l'orbitale S du phosphore est grande .

PI_1 très élevé , le doublet non-liant est dans une orbitale S presque pure, les liaisons PX sont construites avec des orbitales P presque pures , l'angle XPX est voisin de 90°

PI_1 très faible , le doublet non-liant est dans un hybride SP^3 , les liaisons PX sont construites avec des orbitales SP^3 presque pures , l'angle XPX est voisin de 109°

I.2.2. L'utilisation de H_3PO_4 en RMN peut se justifier par :

son prix modique et sa facilité de conservation

il n'y a pas de couplage avec d'autres noyaux

le phosphore est très déblindé par les quatre oxygènes

De $\text{X} = \text{H}$ à $\text{X} = \text{tbut}$, on constate une augmentation de l'angle XPX correspondant à une évolution de l'hybridation du phosphore , le doublet nonliant passant progressivement d'un caractère purement s à un caractère sp^3 . Parallèlement , la densité électronique autour du phosphore diminue , ce qui augmente le déblindage .

I.2.3. L'évolution précédente est encore accentuée par la complexation sur le centre métallique , ce qui justifie le signe de Δ .

I.3. $\beta \cong 109^\circ$ car le carbone est hybridé sp^3 . On a remplacé un H par un P , mais $\chi_{\text{H}} = \chi_{\text{P}}$, la nature des liaisons n'est pas altérée , l'hybridation non plus .

I.4. Le calcul précédent est très pessimiste et maximalise l'encombrement car on a pris la conformation que donne θ maximal . En utilisant une conformation où la liaison CH n'est pas éclipsée avec la liaison MP , on aurait obtenu une valeur de β bien inférieure .

II/ VALEUR DE θ ET STABILITE DE COMPLEXES

II.1. Le nickel (Z=28) a pour configuration électronique $4s^2 3d^8$.

NiL_4 : 4 doublets supplémentaires \implies 18 électrons et tétraédrique .

NiL_3 : 3 doublets supplémentaires \implies 16 électrons et plan trigonal .

II.2. Plus θ augmente , plus l'encombrement augmente et les interactions électroniques déstabilisent le complexe , donc K augmente .

II.3.
$$\text{NiL}_4 \rightleftharpoons \text{NiL}_3 + \text{L}$$
 concentrations à l'équilibre : $C^\circ(1-x)$ $C^\circ x$ $C^\circ x$ $K = \frac{(C^\circ x)^2}{\{C^\circ(1-x)\}}$
 Avec $C^\circ = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ et $K = 4,0 \cdot 10^{-2}$ on trouve : $x = 0,18$

II.4. La position du méthyle en ortho ou para entraîne les mêmes effets électroniques , on peut donc penser que la différence de stabilité est liée uniquement à l'effet d'encombrement du méthyle en ortho . Avec le méthyle en para , l'encombrement est très faible , donc K diminue et la dissociation est pratiquement nulle .

II.5. Au contraire , avec P(Ph)_3 et $\theta = 145^\circ$, K est très grand et la dissociation est quasiment totale . On ne peut mettre que 3 P(Ph)_3 autour du nickel .

II.6.1. Dans CO libre, le nombre de liaisons est 3 pour $\sigma = 2143 \text{ cm}^{-1}$. Dans Ni(CO)_4 , il y a une liaison π retour du nickel vers CO , ce qui peuple partiellement les OM. π^* du monoxyde , affaiblit la liaison , diminue la constante de force , et donc finalement diminue le nombre d'onde σ .

II.6.2. La comparaison de σ_3 avec σ_4 , ainsi que σ_6 avec σ_7 permet de confirmer que les effets électroniques sont les mêmes , que les substituants soient en position ortho ou para , puisqu'ils induisent les mêmes σ , donc exactement le même retour π , pourtant différent d'un substituant à un autre .

III/ ETUDE DES COMPLEXES DU NICKEL

III.1.1. NiBr_2 apporte des Ni^{2+} ($4s^0 3d^8$) , il est donc normalement encore possible d'apporter 5 doublets pour parvenir à 18 électrons . Mais aussi bien P(Ph)_3 que Br sont encombrants , d'où une coordinance 4 mieux appropriée , surtout pour un ion en $3d^8$ si la géométrie est plan carré .

III.1.2. Le nombre d'oxydation du nickel est +II .

III.1.3. D'après la théorie du champ cristallin :

<p>-- -- -- -- -- -- -- --</p>	<p>--- -- -- -- -- -- -- --</p>	<p>Br-----P Ni Br-----P</p>	<p>Complexe plan carré polaire , plus stable en solvant polaire (CH_2Cl_2) (α) cis</p>
<p>tétraédrique paramagnétique</p>	<p>plan carré diamagnétique</p>	<p>P-----Br Ni Br-----P</p>	<p>plan carré apolaire probablement plus stable que la pré- cédante en milieu apolaire (β) trans</p>

En plan carré, les huit électrons sont stabilisés, contre quatre seulement en tétraédrique pour quatre déstabilisés. C'est donc la structure plan carrée qui est la plus stable.

III.1.4. Effectivement, les cristaux sont diamagnétiques, ce qui correspond bien à la structure plan carré.

III.2.1. Dans CH_2Cl_2 , c'est donc la forme (α) qui est la plus stable. Si θ est faible, peu d'encombrement, le complexe supporte la proximité des deux ligands L, et donc K est faible. Quand θ augmente, l'angle LNiL tend à augmenter, ce qui va se faire en déformant le plan carré (angle 90°) qui se rapproche du tétraèdre (angle 109°). La constante d'équilibre est donc très en faveur du complexe paramagnétique donc K très grand. Quand θ augmente encore, on peut encore augmenter l'angle LNiL en repassant en plan carré, mais dans ce cas là avec la structure (β) (angle 180°) qui est bien diamagnétique, et donc la valeur de la constante K diminue.

III.2.2. Avec $\text{P}(\text{Et})_3$, $\theta \ll 140^\circ$, $K < 1$, complexe plan carré. Or le champ cristallin est important, donc la transition visible (de c vers d) se fait dans le violet, le bleu, le vert, le jaune, alors le complexe paraît rouge.

Avec $\text{P}(\text{Cy})_3$, $\theta = 170^\circ$, $K = 0$, c'est encore un plan carré, mais l'isomère trans. L'encombrement étant très important, le complexe ne peut se former qu'avec une liaison affaiblie entre le cation et ses ligands. Ceci a pour effet de diminuer le champ cristallin, et la transition se fait à la limite de l'infrarouge et la couleur du complexe se déplace vers le centre du spectre visible (ici vert).

III.2.3. Avec $\text{P}(\text{Ph})_3$, $\theta = 145^\circ$, K est très grand, il n'y a que du complexe tétraédrique. Le moment dipolaire est dû à la disposition des charges Ni^{2+} et Br^- (ou I^-). Les angles restent très voisins, mais avec I^- beaucoup plus gros, les distances augmentent, donc le moment dipolaire croît.

IV/ ETUDE DES COMPLEXES DU RHODIUM

IV.1. C'est Rh^+ qui est isoélectronique de Ni^{2+} , à une couche près bien sûr.

IV.2. L'augmentation du rayon ionique de Ni^{2+} à Pd^{2+} se justifie par l'addition d'une couche supplémentaire. De Pd^{2+} à Pt^{2+} , on a le même phénomène, mais compensé par la contraction lanthanidique.

IV.3.1. Avec $\text{L} = \text{P}(\text{oTol})_3$, $\theta = 194^\circ$ bien que le rayon ionique de Rh^+ soit légèrement supérieur à celui de Ni^{2+} , on obtiendra une constante K similaire à celle de la partie III très faible, d'où une structure plan carré, isomère trans.

IV.3.2. Avec $\text{Rh}(\text{CO})_2\text{L}_3^+$, le rhodium est encore au degré +I.

On a rajouté 10 électrons, donc complété la couche externe à 18 électrons. Avec cinq ligands la géométrie attendue est une bipyramide à base triangulaire.

Parmi les isomères possibles, on peut mettre les CO en position axiale ou équatoriale. Or les structures les plus stables sont obtenues quand on place en axial les substituants :

- les moins encombrants (ici CO car linéaire, donc θ très faible)
- les plus électronégatifs (encore CO car $\chi_{\text{C}_{\text{ap}}} > \chi_{\text{P}}$)

On aura donc les deux CO en axial et les trois L en équatorial (isomère trans).

V/ HYDROGENATION DES ALCENES

V.1.1. l'effet "trans" caractérise l'aptitude d'un ligand à labiliser un substituant situé en trans dans le complexe.

V.1.2. Un donneur d'électron D, en cédant des électrons sur le cation M, favorise le départ du ligand L qui lui est opposé si les liaisons DM et ML font intervenir les mêmes orbitales. D'où les théories :

- de la polarisation (Grinberg)
- de la compétition pour les liaisons π
- de la compétition pour la liaison σ axiale (Gray)

V.2. Il s'agit d'une réaction d'addition oxydante.

Le complexe (α) était à 16 électrons, il tend donc à compléter sa couche par arrivée d'un doublet supplémentaire. Avec six ligands, on aura donc une structure octaédrique.

Les deux H provenant d'une addition simultanée à partir de la molécule H_2 sont forcément en position cis.

Les deux L très encombrants ($\theta = 145^\circ$) se placent en position trans.

V.3. C'est H^- qui a le plus fort effet trans, d'où la possibilité de départ de S ou de Cl^- . C'est alors la liaison la plus fragile qui est rompue donc :

- Cl^- chargé, mieux retenu, pour une liaison très ionique
- Cl^- plus gros que O de ROH pour une liaison type acide-base de Lewis (HSAB)

V.4. La vitesse globale est égale à la vitesse de l'étape limitante, qui est élémentaire, donc $V_T = V_{\text{C}_1} = k_{\text{C}_1} \cdot (\gamma)$

Les étapes précédentes sont rapides, donc on leur applique l'approximation du prééquilibre : $K_a = (\beta) / (\alpha) \cdot P_{\text{H}_2}$ $K_b = (\gamma) / (\beta) \cdot (\text{alcène})$

d'où $V_T = k_{\text{C}_1} \cdot K_a \cdot K_b \cdot (\text{alcène}) \cdot (\alpha) \cdot P_{\text{H}_2}$

On a le même encombrement pour tous, sauf pour le dernier où $\theta = 194^\circ$ donc les complexes de forte coordination sont déstabilisés. K_a et/ou K_b sont faibles, ce qui fait chuter la vitesse.

Dans l'étape C_1 , c'est un H^- qui bascule sur l'alcène. Ceci se fera d'autant plus facilement que les ligands L cèderont leurs électrons au rhodium. En prenant $L = \text{P}(\text{Ph})_3$ comme référence ($V=1$), on trouve donc une

activation importante par effet mésomère donneur de $-\text{O}-\text{CH}_3$ ($V=2$)

activation plus faible par effet inductif donneur de $-\text{CH}_3$ ($V=1,8$)

désactivation par effet inductif attracteur de $-\text{F}$ ($V=0,1$)

activation d'autant plus importante que l'électronégativité de X diminue et que X^- est plus polarisable.

Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve A : Composition de Physique - Session : 1995

I. MÉCANIQUE

Préliminaires.

A.1.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

2. a.

$$\vec{\sigma}_K = \int_{(S)} \vec{KM} \wedge \vec{v}_M \cdot dm$$

b. K fixe :

$$\frac{d\vec{\sigma}_K}{dt} = \int \vec{KM} \wedge \vec{a}_M dm$$

K' mobile :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{K'}}{dt} = \int \frac{d(\vec{K}'M)}{dt} \wedge \vec{v}_M dm + \int \vec{K}'M \wedge \vec{a}_M dm$$

$$\downarrow$$

$$\vec{v}_M - \vec{v}_{K'}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_{K'}}{dt} = \vec{p}_{/R} \wedge \vec{v}_{K'} + \int \vec{K}'M \wedge \vec{a}_M dm$$

3. • Théorème du centre d'inertie : $\Sigma \vec{F} = M \cdot \vec{a}_G / (R)$ galiléen

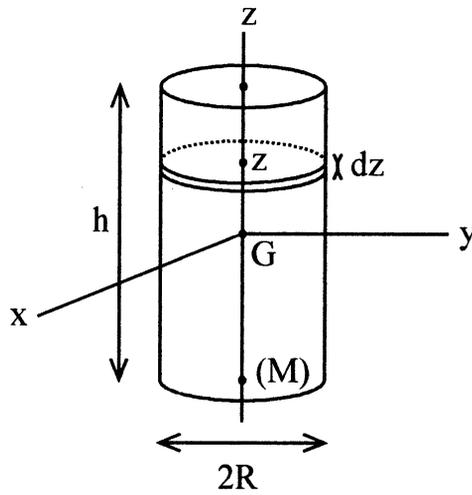
• Théorème du moment cinétique :

$$\Sigma \vec{M}_K = \int \vec{KM} \wedge \vec{a}_M dm \begin{cases} = \frac{d\vec{\sigma}_K}{dt} & \text{si K fixe} \\ = \frac{d\vec{\sigma}_{K'}}{dt} - \vec{p}_{/R} \wedge \vec{v}_{K'} & \text{si K' mobile} \end{cases}$$

B.1. • $J = J_{/Gz} = \int r^2 dm = \int r^2 \cdot 2\pi r h dz \cdot \rho = 2\pi\rho h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{2} \pi R^2 h \rho \cdot R$

$$J = \frac{1}{2} MR^2$$

• $J_1 = J_{/Gx} (= J_2) = J_{Gxy} + J_{Gxz}$



or :

$$J_{Gxz} = \frac{1}{2} J_{Gz} = \frac{1}{4} MR^2$$

et :

$$J_{Gxy} = \int z^2 dm = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot \pi R^2 \rho dz = \dots = \frac{1}{12} Mh^2$$

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{4} M (R^2 + h^2/3)$$

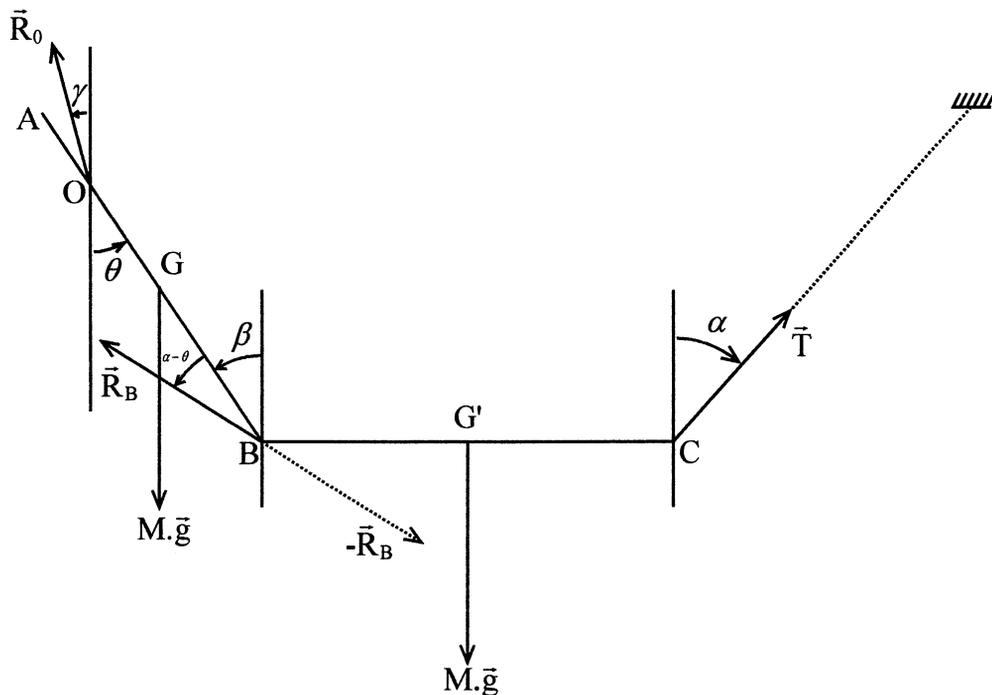
2. Théorème Huygens :

$$J_{\Delta} = J_1 + Ma^2 \rightarrow J_{\Delta} = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} + a^2 \right)$$

3. Si $R \ll h$:

$$J_1 = J_2 \approx \frac{1}{12} Mh^2 \quad ; \quad J_{\Delta} \approx \frac{1}{2} Mh^2 + Ma^2$$

C. Étude statique.



- (BC) subit : \vec{T} , $M\vec{g}$, \vec{R}_B symétrie $\Rightarrow \alpha = \beta$

d'où

$$\boxed{R_B = T = \frac{Mg}{2 \cos \alpha}} \quad (1)$$

- (AB) subit : $M\vec{g}$, $-\vec{R}_B$, \vec{R}_O

$$\Sigma \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} R_O \cos \gamma = Mg + R_B \cos \alpha & (2) \\ R_O \sin \gamma = R_B \sin \alpha & (3) \end{cases}$$

(1) et (2) \rightarrow

$$R_O \cos \gamma = Mg + \frac{Mg}{2} = \frac{3Mg}{2}$$

(1) et (3) \rightarrow

$$R_O \sin \gamma = \frac{Mg}{2} \tan \alpha$$

donc

$$\boxed{R_O = \frac{3Mg}{2 \cos \gamma}} \quad (4)$$

d'où :

$$\boxed{\tan \gamma = \frac{1}{3} \tan \alpha} \quad (5)$$

- $\Sigma \vec{M} = \vec{0} \rightarrow Mg \cdot \frac{h}{3} \sin \theta = R_B \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{3} \right) \sin (\alpha - \theta)$

$$Mg \cdot \frac{1}{3} \sin \theta = \frac{Mg}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{5}{6} (\sin \alpha \cos \theta - \sin \theta \cos \alpha)$$

$$\sin \theta = \frac{5}{4} (\tan \alpha \cdot \cos \theta - \sin \theta)$$

$$\tan \theta = \frac{5}{4} \tan \alpha - \frac{5}{4} \tan \theta \rightarrow \boxed{\tan \alpha = \frac{9}{5} \tan \theta} \quad (6)$$

Application Numérique :

$$\left. \begin{array}{l} \theta = 70^\circ \\ Mg = 50 \text{ N} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = 78,57^\circ}$$

;

$$\boxed{\gamma = 58,76^\circ}$$

;

$$\boxed{R_B = T = 126,14 \text{ N}}$$

$$\boxed{R_O = 144,61 \text{ N}}$$

D. Étude dynamique.

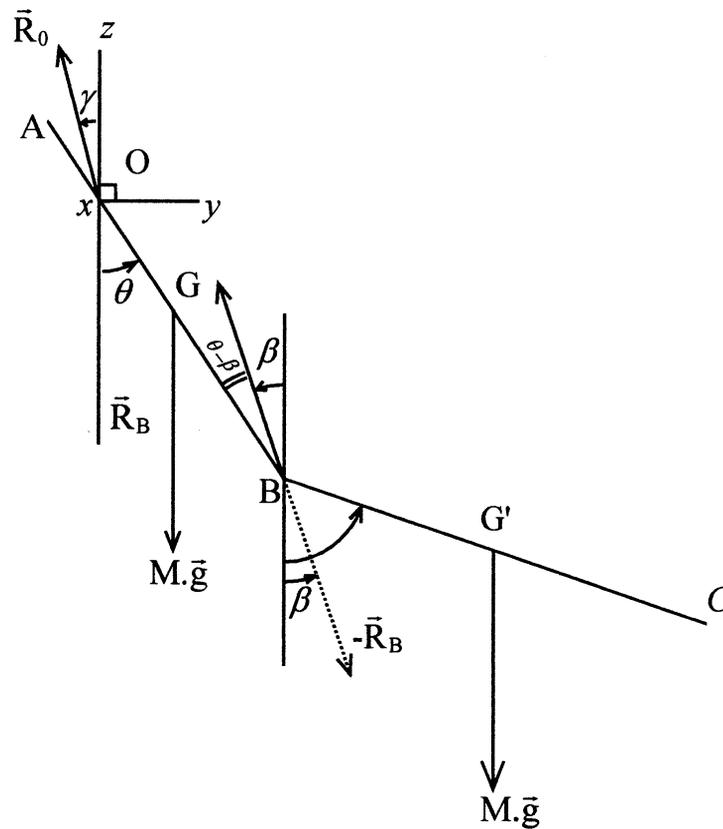
- (AB) ; Théorème du centre d'inertie :

$$\vec{R}_O + \vec{M}_g + (-\vec{R}_B) = M\vec{a}_G$$

$$\vec{OG} = -\frac{h}{3} \cos \theta \vec{u}_z + \frac{h}{3} \sin \theta \vec{u}_y$$

$$\vec{v}_G = \frac{h}{3} \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_z + \frac{h}{3} \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y$$

$$\vec{a}_G = \frac{h}{3} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \vec{u}_z + \frac{h}{3} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{u}_y$$



$$\rightarrow \begin{cases} R_O \cos \gamma - Mg - R_B \cos \beta = M \frac{h}{3} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ -R_O \sin \gamma + R_B \sin \beta = M \frac{h}{3} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \end{cases}$$

- (BC) ; Théorème du centre d'inertie :

$$M\vec{g} + \vec{R}_B = M\vec{a}_{G'}$$

$$\vec{OG}' = \vec{OB} + \vec{BG}' = -\frac{5h}{6} \cos \theta \vec{u}_z + \frac{5h}{6} \sin \theta \vec{u}_y - \frac{h}{2} \cos \varphi \vec{u}_z + \frac{h}{2} \sin \varphi \vec{u}_y$$

$$\vec{OG}' = -\frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \cos \theta + \cos \varphi \right) \vec{u}_z + \frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \sin \theta + \sin \varphi \right) \vec{u}_y$$

$$\vec{v}_{G'} = \frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\varphi} \sin \varphi \right) \vec{u}_z + \frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \varphi \right) \vec{u}_y$$

$$\vec{a}_{G'} = \frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \ddot{\theta} \sin \theta + \frac{5}{3} \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) \vec{u}_z$$

$$+ \frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{5}{3} \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) \vec{u}_y$$

$$\rightarrow \begin{cases} -Mg + R_B \cos \beta = M \frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \ddot{\theta} \sin \theta + \frac{5}{3} \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) \\ -R_B \sin \beta = M \frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \ddot{\theta} \cos \theta - \frac{5}{3} \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right) \end{cases}$$

2. • Théorème du moment cinétique pour (AB), dans R_{AB}^* , en G, en projection sur Gx :

$$J_1 \ddot{\theta} = \left(\vec{M}_{-\vec{R}_B/G} + \vec{M}_{\vec{R}_O/G} \right) \vec{u}_x \rightarrow \boxed{J_1 \ddot{\theta} = -R_B \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin(\theta - \beta) - R_O \frac{h}{3} \sin(\theta - \gamma)}$$

avec $J_1 = \frac{1}{12} M h^2$

- De même, pour (BC)...

$$\boxed{J_1 \cdot \ddot{\varphi} = -R_B \cdot \frac{h}{2} \sin(\varphi - \beta)}$$

3. A $t = 0^+$: $\theta = 70^\circ$; $\varphi = 90^\circ$; $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$

d'où le système :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & R_O \cos \gamma - Mg - R_B \cos \beta = M \frac{h}{3} (0,94 \ddot{\theta}) \\ \textcircled{2} \quad & -R_O \sin \gamma + R_B \sin \beta = M \frac{h}{3} (0,342 \ddot{\theta}) \\ \textcircled{3} \quad & -Mg + R_B \cos \beta = M \frac{h}{2} (1,566 \ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) \\ & -R_B \sin \beta = M \frac{h}{2} (0,57 \ddot{\theta}) \\ \textcircled{4} \quad & \frac{1}{12} Mh \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} R_B \sin(70 - \beta) - \frac{R_O}{3} \sin(70 - \gamma) \\ & = -\frac{R_B}{2} (0,94 \cos \beta - 0,342 \sin \beta) - \frac{R_O}{3} (0,94 \cos \gamma - 0,342 \sin \gamma) \\ \textcircled{5} \quad & \frac{1}{6} Mh \ddot{\varphi} = -R_B \cos \beta \end{aligned}$$

4. Résolution

• $\textcircled{5}$: $R_B \cos \beta = -\frac{1}{6} Mh \ddot{\varphi}$

$\textcircled{3}$: $R_B \cos \beta = Mg + M \frac{h}{2} (1,566 \ddot{\theta} + \ddot{\varphi})$

d'où : $g + \frac{h}{2} (1,566 \ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) = -\frac{h}{6} \ddot{\varphi}$

$\rightarrow \boxed{0,783 h \ddot{\theta} + 0,667 h \ddot{\varphi} = -g}$

• $\textcircled{4}$: $R_B \sin \beta = -M \frac{h}{2} 0,57 \ddot{\theta}$

donc $\textcircled{2}$: $R_O \sin \gamma = R_B \sin \beta - M \frac{h}{3} 0,342 \ddot{\theta} = -M \frac{h}{2} 0,57 \ddot{\theta} - M \frac{h}{3} 0,342 \ddot{\theta} = -0,4 Mh \ddot{\theta}$

$\textcircled{1}$: $R_O \cos \gamma = Mg + R_B \cos \beta + M \frac{h}{3} 0,94 \ddot{\theta} = Mg - \frac{1}{6} Mh \ddot{\varphi} + M \frac{h}{3} 0,94 \ddot{\theta}$

d'où ④ :

$$\frac{1}{12} Mh \ddot{\theta} = -0,47 \left(-\frac{1}{6} Mh \ddot{\phi} \right) + 0,171 \left(-M \frac{h}{2} 0,57 \ddot{\theta} \right) - 0,313 \left(Mg - \frac{1}{6} Mh \ddot{\phi} = M \frac{h}{3} 0,94 \ddot{\theta} \right) + 0,114 (-0,4 Mh \ddot{\theta})$$

$$\rightarrow \boxed{0,276 h \ddot{\theta} - 0,131 h \ddot{\phi} = -0,313 g}$$

d'où le système :

$$\begin{cases} h \ddot{\theta} + 0,852 h \ddot{\phi} = -1,277 g \\ h \ddot{\theta} - 0,475 h \ddot{\phi} = -1,134 g \end{cases}$$

$$\rightarrow 1,327 h \ddot{\phi} = -0,143 g \quad ; \quad \boxed{\ddot{\phi} = -1,08 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}}$$

et

$$\boxed{\ddot{\theta} = -11,85 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}}$$

- $R_B \cos \beta = -M \frac{h}{6} \ddot{\phi}$

$$R_B \sin \beta = -M \frac{h}{2} 0,57 \ddot{\theta} \rightarrow \tan \beta = \frac{6 \cdot 0,57 \ddot{\theta}}{2 \ddot{\phi}} = 18,76 \quad ; \quad \boxed{\beta = 86,9^\circ}$$

et $\boxed{R_B = 16,9 \text{ N}}$

- $R_O \cos \gamma = Mg + R_B \cos \beta + M \frac{h}{3} (0,94 \ddot{\theta}) = 32,18$

$$R_O \sin \gamma = R_B \sin \beta - M \frac{h}{3} (0,342 \ddot{\theta}) = 23,63 \rightarrow \tan \gamma = 0,734 \quad ; \quad \boxed{\gamma = 36,3^\circ}$$

et $\boxed{R_O = 39,9 \text{ N}}$

NB. : On vérifie, pour (AB) :

- $(\Sigma \vec{f})_n = M \frac{v_G^2}{R_C} = 0$ à $t = 0^+$

$$\rightarrow R_O \cos(\theta - \gamma) - R_B \cos(\theta - \beta) - Mg \cos \theta = 33,2 - 16,2 - 17,1 \approx 0$$

- $(\Sigma \vec{f})_t = Ma_t = M \frac{h}{3} \ddot{\theta}$

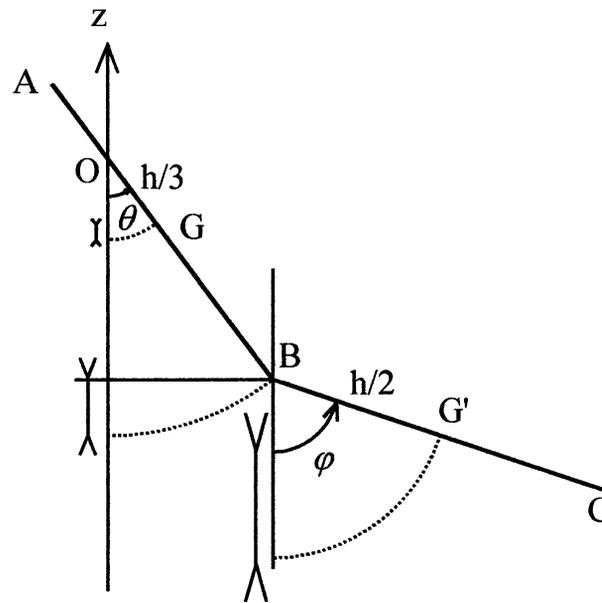
$$\rightarrow R_O \sin(\theta - \gamma) - Mg \sin \theta - R_B \sin(\theta - \beta) = 22,1 - 47 + 4,9 = -20$$

$$M \frac{h}{3} \ddot{\theta} = -19,8$$

E. Étude des petites oscillations.

1. • $E_p = Mg \frac{h}{3} (1 - \cos \theta) + Mg \frac{5h}{6} (1 - \cos \theta) + Mg \frac{h}{2} (1 - \cos \phi)$

$$\boxed{E_p = Mg h \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{6} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \phi \right)}$$



- $$E_{C_{AB}} = E_{C_1} = E_{C_1}^* + \frac{1}{2} M v_G^2$$

$$E_{C_1} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{h}{3} \dot{\theta} \right)^2$$

$$E_{C_1} = \left(\frac{1}{24} M h^2 + \frac{1}{18} M h^2 \right) \dot{\theta}^2 = \frac{7}{72} M h^2 \dot{\theta}^2$$

- $$E_{C_{BC}} = E_{C_2} = E_{C_2}^* + \frac{1}{2} M v_{G'}^2,$$

avec :

$$E_{C_2}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} M h^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

et :

$$\vec{O\vec{G}'} = \vec{O\vec{B}} + \vec{B\vec{G}'},$$

...cf. D.1. :

$$\vec{v}_{G'} = \frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\varphi} \sin \varphi \right) \vec{u}_z + \frac{h}{2} \left(\frac{5}{3} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \varphi \right) \vec{u}_y$$

$$\rightarrow v_{G'}^2 = \frac{h^2}{4} \left[\frac{25}{9} \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \frac{10}{3} \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \frac{25}{3} \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \frac{10}{3} \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi \right]$$

$$v_{G'}^2 = \frac{h^2}{4} \left[\frac{25}{9} \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \frac{10}{3} \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos (\theta - \varphi) \right]$$

et :

$$E_{C_2} = \frac{1}{24} M h^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8} M h^2 \left[\frac{25}{9} \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \frac{10}{3} \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos (\theta - \varphi) \right]$$

$$\Rightarrow E_C = E_{C_1} + E_{C_2} = \frac{4}{9} M h^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} M h^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{5}{12} M h^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos (\theta - \varphi)$$

2. Lagrangien :

$$L = E_C - E_P$$

équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

avec $q_i = \theta, \varphi$

$$\dot{q}_i = \dot{\theta}, \dot{\varphi}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial (E_C - E_P)}{\partial q_i}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{8}{9} Mh^2 \dot{\theta} + \frac{5}{12} Mh^2 \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) \right) = -\frac{5}{12} Mh^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi) - Mgh \frac{7}{6} \sin \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} Mh^2 \dot{\varphi} + \frac{5}{12} Mh^2 \dot{\theta} \cos(\theta - \varphi) \right) = \frac{5}{12} Mh^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi) - Mgh \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{9} h \ddot{\theta} + \frac{5}{12} h \left[\ddot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin(\theta - \varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\theta - \varphi) \right] = -\frac{5}{12} h \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi) - g \frac{7}{6} \sin \theta \\ \frac{1}{3} h \ddot{\varphi} + \frac{5}{12} h \left[\ddot{\theta} \cos(\theta - \varphi) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \varphi) + \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi) \right] = -\frac{5}{12} h \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi) - g \frac{1}{2} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{8}{9} h \ddot{\theta} + \frac{5}{12} h \ddot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) + \frac{5}{12} h \dot{\varphi}^2 \sin(\theta - \varphi) = -\frac{7}{6} g \sin \theta \\ \frac{1}{3} h \ddot{\varphi} + \frac{5}{12} h \ddot{\theta} \cos(\theta - \varphi) - \frac{5}{12} h \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \varphi) = -\frac{1}{2} g \sin \varphi \end{cases}$$

3. Hypothèse des petits mouvements :

$$\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$$

: infiniment petits du 1^{er} ordre

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 \sin(\theta - \varphi) ; \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \varphi) \text{ négligés}$$

$$\sin \theta \approx \theta ; \sin \varphi \approx \varphi$$

$$\cos(\theta - \varphi) \approx 1$$

d'où le système :

$$\begin{cases} \frac{8}{3} h \ddot{\theta} + \frac{5}{4} h \ddot{\varphi} = -\frac{7}{2} g \theta \\ 5 h \ddot{\theta} + 4 h \ddot{\varphi} = -6 g \varphi \end{cases}$$

4. Application Numérique :

$$h = 1 \text{ m}$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

→

$$32 \ddot{\theta} + 15 \ddot{\varphi} + 420 \theta = 0 \quad (1)$$

$$5 \ddot{\theta} + 4 \ddot{\varphi} + 60 \varphi = 0 \quad (2)$$

(1) ⇒

$$\ddot{\varphi} = 28 \theta - 2,133 \ddot{\theta}$$

(2) ⇒

$$5 \theta^{(4)} + 4 \varphi^{(4)} + 60 \ddot{\varphi} = 0$$

soit :

$$5 \theta^{(4)} + 4 (-28 \ddot{\theta} - 2,133 \theta^{(4)}) + 60 (-28 \theta - 2,133 \dot{\theta})$$

d'où :

$$\theta^{(4)} + 67,9 \ddot{\theta} - 475,5 \theta = 0$$

$$(X^2)^2 + 67,9 X^2 + 475,5 = 0$$

$$\Delta' = 26,02^2$$

$$x^2 = -33,95 \pm 26,02 \begin{cases} \nearrow -7,93 \Rightarrow x = \pm i \cdot 2,82 \\ \searrow -59,97 \Rightarrow x = \pm i \cdot 7,74 \end{cases}$$

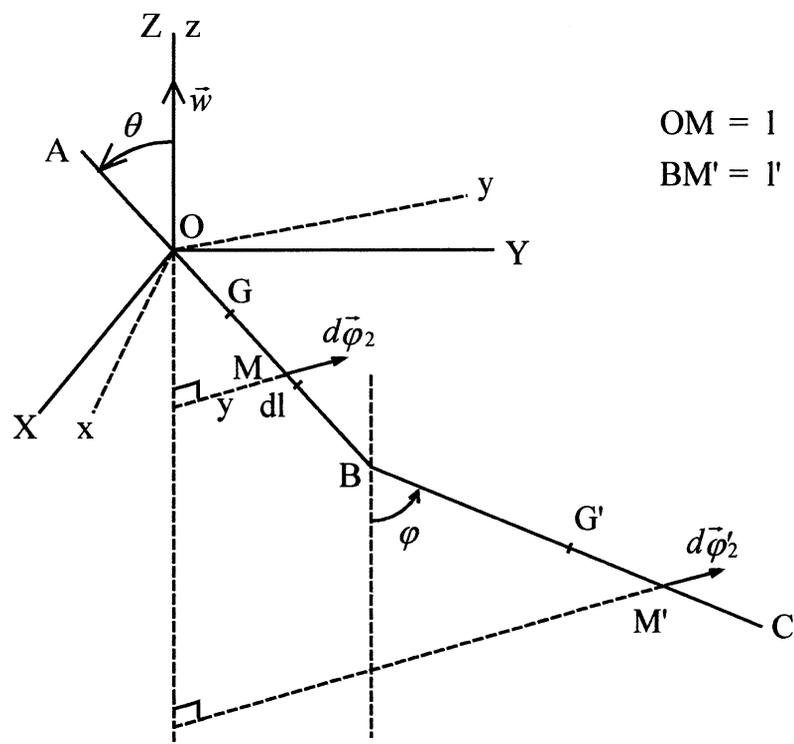
$$\rightarrow \theta = A \cos (2,82 t + \theta_1) + B \sin (7,74 t + \theta_2)$$

On déduit $\varphi(t)$ de l'équation 1, sans Ctes d'intégration supplémentaires.

On obtient :

$$\varphi = 1,42 A \cos (2,82 t + \theta_1) - 1,67 B \sin (7,74 t + \theta_2)$$

F. Équilibre relatif.



1. Forces :

- les deux poids $Mg\vec{e}_y$,
- réaction de l'axe en O,
- les forces d'inertie d'entraînement $\vec{\varphi}_e$ et $\vec{\varphi}'_e$,

telles que :

$$\vec{d\varphi}_e = (l \sin \theta) \omega^2 \frac{m}{h} dl \cdot \vec{u}_y$$

et :

$$\vec{d\varphi}'_e = \left(\frac{5h}{6} \sin \theta + l' \sin \varphi \right) \omega^2 \frac{m}{h} dl' \cdot \vec{u}_y$$

Les poids et les forces d'inertie dérivent d'une énergie potentielle.

2. •

$$E_{P1} = Mgh \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{6} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \varphi \right)$$

(cf. E.1.)

•

$$E_{P2} = E_{P_{\vec{\varphi}_e}} + E_{P_{\vec{\varphi}_e}}$$

$$\rightarrow d^2 E_{P_{\vec{\varphi}_e}} = -d\vec{\varphi}_e d\vec{r} = -\frac{M}{h} dl \omega^2 y \cdot dy$$

$$dE_{P_{\vec{\varphi}_e}} = \int_0^y d^2 E_{P_{\vec{\varphi}_e}} = -\frac{M}{h} dl \omega^2 \frac{y^2}{2}$$

$$y = l \sin \theta \quad \rightarrow \quad E_{P_{\vec{\varphi}_e}} = \int_{-h/6}^{5h/6} -\frac{M}{h} \omega^2 \frac{\sin^2 \theta}{2} l^2 dl$$

$$E_{P_{\vec{\varphi}_e}} = -\frac{M \omega^2 \sin^2 \theta}{2h} \left[\frac{l^3}{3} \right]_{-h/6}^{5h/6} = -\frac{7}{72} M \omega^2 h^2 \sin^2 \theta$$

$$\rightarrow d^2 E_{P_{\vec{\varphi}_e}} = -\frac{M}{h} dl' \omega^2 y dy \quad ; \quad dE_{P_{\vec{\varphi}_e}} = -\frac{M}{h} \omega^2 \frac{y^2}{2} dl'$$

$$y = \frac{5h}{6} \sin \theta + l' \sin \varphi \quad \rightarrow \quad E_{P_{\vec{\varphi}_e}} = -\frac{M \omega^2}{2h} \int_0^h \left(\frac{25h^2}{36} \sin^2 \theta + l'^2 \sin^2 \varphi + \frac{5h}{3} l' \sin \theta \sin \varphi \right) dl'$$

$$E_{P_{\vec{\varphi}_e}} = -\frac{M \omega^2}{2h} \left[\frac{25}{36} h^3 \sin^2 \theta + \frac{h^3}{3} \sin^2 \varphi + \frac{5}{6} h^3 \sin \theta \sin \varphi \right]$$

$$E_{P_{\vec{\varphi}_e}} = -M \omega^2 h^2 \left[\frac{25}{72} \sin^2 \theta + \frac{1}{6} \sin^2 \varphi + \frac{5}{12} \sin \theta \sin \varphi \right]$$

$$\rightarrow E_{P2} = -\frac{M \omega^2 h^2}{3} \left(\frac{4}{3} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \frac{5}{4} \sin \theta \sin \varphi \right)$$

3. Équilibre $\Rightarrow E_P$ extremum

$$E_P = Mgh \left[\frac{5}{3} - \frac{7}{6} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \varphi \right] - \frac{M \omega^2 h^2}{3} \left(\frac{4}{3} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \frac{5}{4} \sin \theta \sin \varphi \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_P}{\partial \theta} = Mgh \left[\frac{7}{6} \sin \theta \right] - M \frac{\omega^2 h^2}{3} \left(\frac{8}{3} \sin \theta \cos \theta + \frac{5}{4} \cos \theta \sin \varphi \right) = 0 \\ \frac{\partial E_P}{\partial \varphi} = Mgh \left[\frac{1}{2} \sin \varphi \right] - M \frac{\omega^2 h^2}{3} \left(\sin \varphi \cos \varphi + \frac{5}{4} \sin \theta \cos \varphi \right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Equ. } \begin{cases} \frac{7}{6} \sin \theta - a \cos \theta \left(\frac{8}{3} \sin \theta + \frac{5}{4} \sin \varphi \right) = 0 \\ \frac{1}{2} \sin \varphi - a \cos \varphi \left(\sin \varphi + \frac{5}{4} \sin \theta \right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\omega^2 h}{3g} \right) = a$$

Stabilité \Rightarrow
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_P}{\partial \theta^2} = K \left[\frac{7}{6} \cos \theta + a \sin \theta \left(\frac{8}{3} \sin \theta + \frac{5}{4} \sin \varphi \right) - \frac{8a}{3} \cos^2 \theta \right] > 0 \\ \frac{\partial^2 E_P}{\partial \varphi^2} = K \left[\frac{1}{2} \cos \varphi + a \sin \varphi \left(\sin \varphi + \frac{5}{4} \sin \theta \right) - a \cos^2 \varphi \right] > 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \frac{7}{6} \cos \theta - \frac{8a}{3} \cos 2\theta + \frac{5}{4} a \sin \theta \sin \varphi > 0 \\ \frac{1}{2} \cos \varphi - a \cos 2\varphi + \frac{5}{4} a \sin \theta \sin \varphi > 0 \end{cases}$$

4. θ, φ petits :

$$\begin{cases} \frac{7}{6} \theta - \frac{8a}{3} \theta - \frac{5a}{4} \varphi = 0 \\ \frac{1}{2} \varphi - a \varphi - \frac{5a}{4} \theta = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} (32a - 14) \theta + 15a \varphi = 0 \\ 5a \theta + (4a - 2) \varphi = 0 \end{cases}$$

\exists solutions si :
$$\begin{vmatrix} 32a - 14 & +15a \\ 5a & 4a - 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 53a^2 - 120a + 28 = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = 0,264 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

- $$\left. \begin{matrix} a_1 = 0,264 \\ \theta = 0,05 \text{ rad} \end{matrix} \right\} \rightarrow \varphi_1 = \frac{-5a\theta}{4a-2} = +0,07 \text{ rad}$$

- $$\left. \begin{matrix} a_2 = 2 \\ \theta = 0,05 \text{ rad} \end{matrix} \right\} \rightarrow \varphi_2 = -0,083 \text{ rad}$$

Stabilité :

$$\begin{cases} \frac{7}{6} - \frac{8a}{3} + \frac{5}{4} a \theta \varphi > 0 \\ \frac{1}{2} - a + \frac{5}{4} a \theta \varphi > 0 \end{cases}$$

- Pour a_1 :
$$\frac{7}{6} - \frac{8 \cdot 0,264}{3} + \frac{5}{4} \cdot 0,264 \cdot 0,05 \cdot 0,07 > 0$$

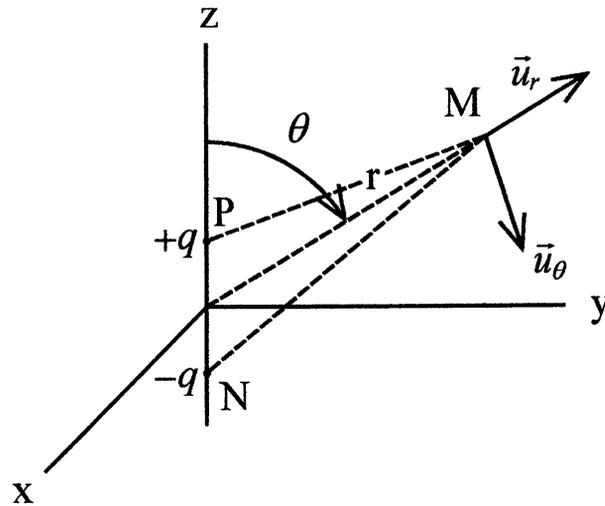
et :
$$\frac{1}{2} - 0,264 + \frac{5}{4} \cdot 0,264 \cdot 0,05 \cdot 0,07 > 0$$

- Pour a_2 :
$$\frac{7}{6} - 8 \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{4} \cdot 2 \cdot 0,05 \cdot (-0,083) < 0 \Rightarrow \text{instable}$$

$$\theta = 0,05 \text{ rad} ; \varphi_1 = 0,07 \text{ rad} \rightarrow \text{équilibre stable}$$

II. ÉLECTROMAGNÉTISME

A. Dipôle électrostatique.



1. a.

$$V_{(M)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{NM - PM}{PM \cdot NM} \approx \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\rightarrow V_M = \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

b.

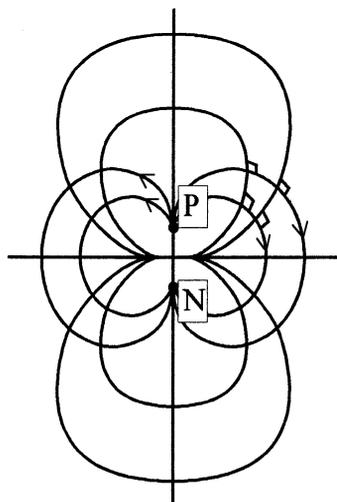
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2 p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases}$$

2. Lignes de champ :

$$\frac{dr}{E_R} = \frac{r d\theta}{E_\theta} \rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{d \sin \theta}{\sin \theta}$$

Équipotentielles :

$$\frac{\cos \theta}{r^2} = \text{Cte} \Rightarrow r = \text{Cte} \cdot \sin^2 \theta$$

} loin du dipôle

B. Dipôle oscillant.

1.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

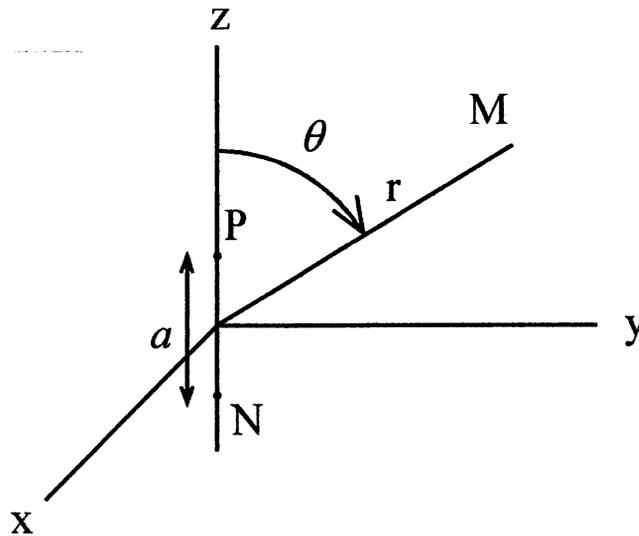
$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$i(t)$ uniforme entre N et P si $\lambda \gg a$

soit : $f \ll \frac{c}{a} = 30 \text{ GHz}$

($\rightarrow f < 0,3 \text{ GHz}$)

2.



$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i \left(t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c} \right) \cdot \vec{u}_z dz}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2}$$

\vec{r}' : position de $i dz$.

Comme $a \ll r$:

$$\vec{r} - \vec{r}' \approx \vec{r}$$

$$\rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{u}_z dz}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_z a}{r}$$

- $p = q a$; $i = \frac{dq}{dt}$ donc $i a = \dot{p}$

d'où :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} \cdot \vec{u}_z$$

3. Condition de jauge de Lorentz :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} (A \vec{u}_z) = \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} = \cos \theta$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \cos \theta \frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

or :

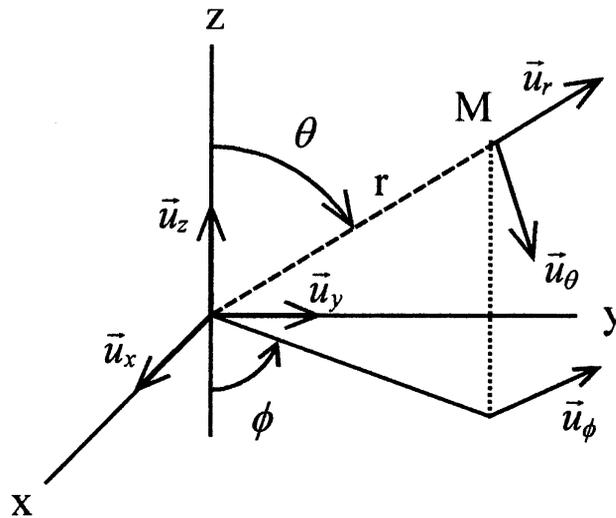
$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{-\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{r} \left(-\frac{1}{c} \right) \right)$$

et :

$$V(\vec{r}, t) = c^2 \cos \theta \int \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2} + \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{rc} \right] dt + \text{Cte} = 0 \quad (\rightarrow \text{on exclut tout régime permanent})$$

$$\rightarrow \boxed{V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \cos \theta \left(\frac{p(t-r/c)}{r^2} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{rc} \right)}$$

4.



$$\bullet \quad \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \begin{vmatrix} 0 & x/r \\ 0 & y/r \\ 1 & z/r \end{vmatrix} \wedge = -\frac{y}{r} \vec{u}_x + \frac{x}{r} \vec{u}_y = \sin \theta \cdot \vec{u}_\phi$$

$$\bullet \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y A \\ -\partial_x A \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow B_x = \partial_y A = \partial_r A \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \cdot \partial_r A$$

$$B_y = -\partial_x A = -\frac{x}{r} \cdot \partial_r A$$

$$\vec{B} = -\frac{\partial A}{\partial r} \left(\frac{-y}{r} \vec{u}_x + \frac{x}{r} \vec{u}_y \right) = -\frac{\partial A}{\partial r} \cdot \sin \theta \vec{u}_\phi$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \left[\frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2} + \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{rc} \right] \vec{u}_\phi}$$

•

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} & \text{avec } A_r = A \cos \theta \\ E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} & \text{avec } A_\theta = A \sin \theta \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cos \theta \left(\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2c} \right) \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sin \theta \left(\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r^2c} + \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{rc^2} \right) \end{aligned}}$$

En régime sinusoïdal :

$$p = q_0 a e^{j\omega t}$$

$$\dot{p} = j\omega q_0 a e^{j\omega t}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta q_0 a \left(\frac{j\omega}{r^2} - \frac{\omega^2}{rc} \right) e^{j\omega(t-r/c)} \cdot \vec{u}_\phi$$

$$\underline{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \cos \theta q_0 a \left(\frac{1}{r^3} + \frac{j\omega}{r^2c} \right) e^{j\omega(t-r/c)}$$

$$\underline{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta q_0 a \left(\frac{1}{r^3} + \frac{j\omega}{r^2c} - \frac{a^2}{rc^2} \right) e^{j\omega(t-r/c)}$$

5. A grande distance : $r \gg \lambda$

alors :

$$\frac{\omega}{r^2c} = \frac{1}{r^3} \cdot r \frac{\omega}{c} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{r}{\lambda} \right) \cdot 2\pi \gg \frac{1}{r^3}$$

de même :

$$\frac{\omega^2}{rc^2} = \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{r^2}{\lambda^2} \right) |2\pi|^2 \gg \frac{1}{r^3}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} q_0 a \sin \theta \left(\frac{-\omega^2}{rc} \right) e^{j\omega(t-r/c)} \cdot \vec{u}_\phi}$$

$$\underline{E}_r \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 a \cdot 2 \cos \theta \left(\frac{j\omega}{r^2c} \right) e^{j\omega(t-r/c)}$$

$$\underline{E}_\theta \approx \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} q_0 a \sin \theta \left(\frac{-\omega^2}{rc^2} \right) e^{j\omega(t-r/c)}$$

$$|\underline{E}_\theta| \gg |\underline{E}_r|$$

d'où :

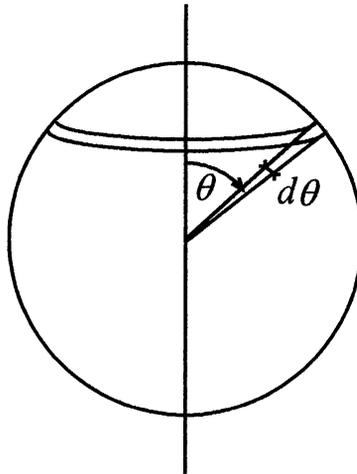
$$\underline{\vec{E}} \approx \underline{E}_\theta \cdot \underline{e}_\theta = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} q_0 a \sin \theta \left(\frac{-\omega^2}{rc^2} \right) e^{j\omega(t-r/c)} \cdot \underline{u}_\theta$$

Vecteur de Poynting (calculs en notation réelle) :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} E_\theta B_\phi \cdot \underline{u}_r$$

$$\vec{\pi} = \frac{q_0^2 a^2}{16 \pi^2 \epsilon_0} \omega^4 \sin^2 \theta \frac{1}{r^2 c^3} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \underline{u}_r$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{q_0^2 a^2}{32 \pi^2 \epsilon_0} \cdot \omega^4 \cdot \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{r^2 c^3} \underline{u}_r$$



$$\langle P \rangle = \oiint \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \oiint \|\langle \vec{\pi} \rangle\| \cdot dS$$

$$\langle P \rangle = \int_0^\pi \frac{q_0^2 a^2}{32 \pi^2 \epsilon_0} \omega^4 \sin^2 \theta \frac{1}{r^2 c^3} \cdot (2 \pi r \sin \theta r d\theta)$$

$$\langle P \rangle = \frac{q_0^2 a^2}{32 \pi^2 \epsilon_0} \omega^4 \frac{1}{c^3} \cdot 2 \pi \int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot d\theta$$

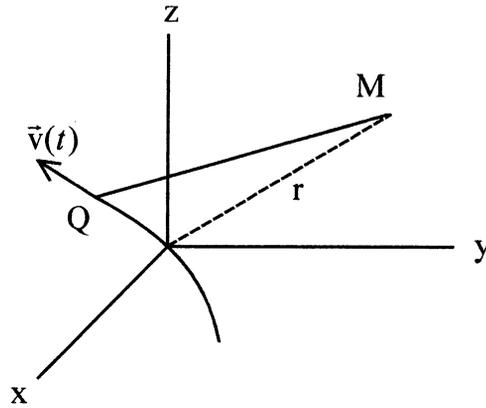
$$\downarrow$$

$$= 4/3$$

$$\omega = \frac{2 \pi c}{\lambda} \rightarrow \langle P \rangle = \frac{4}{3} \pi^3 \frac{q_0^2 a^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{c}{\lambda^4}$$

6. Les \bar{e} des molécules de la haute atmosphère, excités par les ondes EM issus du soleil, diffusent une puissance EM dans toutes les directions, proportionnelle à $1/\lambda^4 \rightarrow$ d'où prédominance de la couleur bleue.

C. Champ rayonné par une particule accélérée.



1.
$$\vec{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \vec{v}(Q, t - r/c)}{r} \quad (QM \approx r)$$

2.
$$\vec{\text{rot}} \vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial \left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot \frac{\partial \left(t - \frac{r}{c}\right)}{\partial z} & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right) = \begin{vmatrix} a_z \left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial y}\right) - a_y \left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial z}\right) & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Comme : $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} ; \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \dots$

$$\rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{v}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{1}{c} \begin{vmatrix} a_z \cdot \frac{y}{r} - a_y \cdot \frac{z}{r} \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} = +\frac{1}{c} \begin{vmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{v} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{1}{c} \cdot \vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right)}$$

•
$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_0 \text{rot} \left(\frac{\vec{v}(Q, t - r/c)}{r} \right)$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \text{rot } \vec{v} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \text{grad} \frac{1}{r} \wedge \vec{v} \right]$$

↓
terme en $1/r^2$ (négligé)

$$\rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \cdot \frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r^2} \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right)}$$

3.

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

↓
 $\vec{0}$ en Q

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 c^3} \cdot \text{rot} \left[\frac{\vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - r/c \right)}{r} \right] = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 c^3} \left[\frac{1}{r} \text{rot} \left(\vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) + \text{grad} \frac{1}{r} \wedge \left(\vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right]$$

↓
terme en $1/r^2$ (négligé)

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{r} \cdot \text{rot} = \left[\vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - r/c \right) \right]$$

or :

$$\text{rot} \left(\vec{v} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) = \frac{1}{c} \vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

donc :

$$\text{rot} \left(\vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) = \frac{1}{c} \vec{u}_r \wedge \frac{d}{d \left(t - \frac{r}{c} \right)} \left[\vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$$

donc :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c^2 \text{rot } \vec{B} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 c} \cdot \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{c} \vec{u}_r \wedge \frac{d}{dt} \left[\vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right\}$$

en approximant $\frac{d}{d \left(t - \frac{r}{c} \right)}$ et $\frac{d}{dt}$.

$$\rightarrow \boxed{\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi \epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \left[\vec{u}_r \wedge \vec{a} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]}$$

On observe :

$$\vec{B} \perp \vec{u}_r$$

$$\vec{E} \perp \vec{u}_r$$

et

$$\vec{E} = \frac{1}{c} (\vec{u}_r \wedge \vec{B})$$

onde sphérique progressive

III. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

A. Conducteur parfait.

1. L'onde électromagnétique.

a. Conducteur parfait \rightarrow

$$\gamma = \infty ; \vec{j} = \gamma \vec{E} \rightarrow$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}, \text{ et } \vec{B}_{\text{int}} = \vec{0}$$

b. \vec{E} tangentiel se conserve

donc :

$$\vec{E}_t = (\vec{E}_t)_{\text{int}} = \vec{0} = (\vec{E}_i)_x + (\vec{E}_r)_x = \vec{0}$$

: en $x = 0$

$$\rightarrow \vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \cdot \vec{u}_x$$

•

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{\vec{u}_z \wedge \dots \vec{u}_x}{c} = \frac{E_0}{c} \cdot e^{i(\omega t - kz)} \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_e \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{-\vec{u}_z \wedge \dots \vec{u}_x}{c} = \frac{E_0}{c} \cdot e^{i(\omega t + kz)} \cdot \vec{u}_y$$

c.

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 e^{i\omega t} \vec{a}_x \underbrace{(e^{-ikz} - e^{ikz})}_{-2i \sin kz} = 2 E_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \sin kz \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = 2 E_0 \sin \omega t \cdot \sin kz \cdot \vec{u}_x$$

•

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y \underbrace{(e^{-ikz} + e^{ikz})}_{2 \cos kz}$$

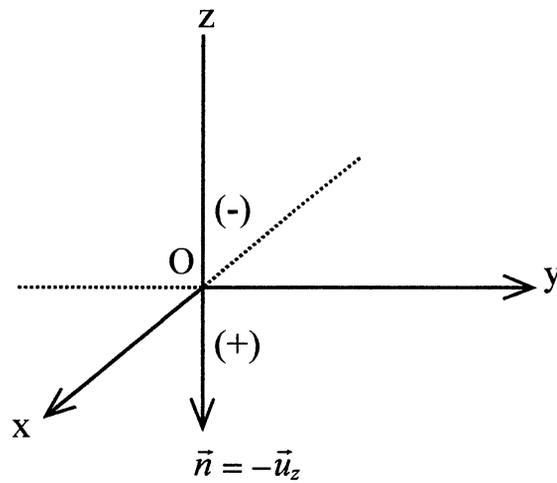
$$\rightarrow \vec{B} = 2 \frac{E_0}{c} \cdot \cos \omega t \cdot \cos kz \cdot \vec{u}_y$$

• Absence du terme de propagation, en $(\omega t \pm k \cdot \text{longueur}) \rightarrow$ onde stationnaire.

d. •

$$\underline{\sigma} = \left(\vec{E}_{(+)} - \vec{E}_{(-)} \right) \cdot \vec{n}_{(-) \rightarrow (+)} = 0$$

$$\rightarrow \sigma = 0$$



$$\vec{B}_{(+)} - \vec{B}_{(-)} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$

↓

$$\frac{2 E_0}{c} \cdot \underset{=1 \text{ en } z=0}{\cos kz} \cdot e^{i\omega t} \vec{u}_y - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_z)$$

$$\frac{2 E_0}{c} \cdot e^{i\omega t} \cdot \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = \mu_0 \vec{u}_z \wedge \left(\vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_z) \right) = -\mu_0 \cdot \vec{j}_s$$

$$\boxed{\vec{j}_s = 2 \frac{E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \cdot \vec{u}_x}$$

e. $w = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2 \mu_0} = 2 \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t \cdot \sin^2 kz + 2 \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cdot \cos^2 \omega t \cdot \cos^2 kz$

$$\langle w \rangle = \epsilon_0 E_0^2 (\sin^2 kz + \cos^2 kz)$$

$$\boxed{\langle w \rangle = \epsilon_0 \cdot E_0^2} \rightarrow \text{uniforme}$$

f. $\vec{\pi} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{4 E_0^2}{\mu_0 c} \cdot \underset{\frac{1}{2} \sin 2 kz}{\sin kz \cdot \cos kz} \cdot \underset{\frac{1}{2} \sin 2 \omega t}{\sin \omega t \cdot \cos \omega t} \cdot \vec{u}_z$

$$\vec{\pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cdot \sin 2 kz \cdot \sin 2 \omega t \cdot \vec{u}_z$$

$$\boxed{\langle \vec{\pi} \rangle /_{z \text{ ou } t} = \vec{0}} \rightarrow \text{absence de propagation}$$

2. Pression de radiation

a.

$$\vec{df} = \vec{idl} \wedge \vec{B} \quad \begin{matrix} \nearrow \vec{df} = \vec{j} \cdot d\vec{v} \wedge \vec{B} \\ \searrow \vec{df} = \vec{j}_s \cdot d\vec{S} \wedge \vec{B} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \vec{df} = \vec{j}_s \cdot d\vec{S} \wedge \frac{\vec{B}(z=0)}{2} = df \cdot \vec{u}_z$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \dots \vec{u}_x & \dots \vec{u}_y & \text{champ de surface} \end{matrix}$$

$\vec{df} \perp (xOy) \rightarrow$ **force pressante.**

$$\vec{df} = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t \cdot \frac{E_0}{c} \cos \omega t \cdot \vec{u}_z dS = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 \omega t \cdot dS \cdot \vec{u}_z$$

b. Pression :

$$p = \frac{\|\vec{df}\|}{dS} = 2 \epsilon_0 E_0^2 \cdot \cos^2 \omega t$$

$$\langle P \rangle = \epsilon_0 E_0^2$$

c. Étude du flux photonique

•

$$p = \frac{hv}{c} = \frac{\text{énergie}}{c} \quad \vec{p} = \frac{hv}{c} \cdot \vec{u}_z$$

• Pendant dt, les photons heurtant dS sont dans le cylindre de volume $dv = cdt \cdot dS$

Leur énergie est :

$$dW = w_1 \cdot dv = \frac{w}{2} \cdot dv \quad (\text{avec } w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0})$$

↓

densité volumique d'énergie de l'onde **incidente**

•

$$\Delta \vec{p}_{(\text{photon})} = \vec{p}_{\text{réfléchi}} - \vec{p}_{\text{incident}} = -2 p_{\text{incident}} \cdot \vec{u}_z$$

$$\Delta \vec{p}_{\text{paroi}} = +2 \vec{p}_{\text{incident}} \cdot \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{dF} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{dt} \cdot 2 \left(\frac{dW}{c} \vec{u}_z \right) = \frac{1}{dt} \left(2 \frac{w}{c} \vec{u}_z dv \right) \quad \text{avec } dvc = dt \cdot dS$$

$$\vec{dF} = w dS \vec{u}_z$$

•

$$P = w \quad \text{et} \quad \langle P \rangle = \langle w \rangle = \epsilon_0 E_0^2$$

d. Application

•

$$F_{\text{gravit.}} = G \frac{M_S m}{r^2} = 5,93 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (F_{\text{solaire}})_m &= \langle P \rangle \cdot S_m = \epsilon_0 E_0^2 \cdot S_m \\ &= \frac{S}{4\pi r^2} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} = \left| \left| \langle \vec{\pi}_1 \rangle \right| \right| = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 E_0^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad E_0 = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0 c}} = 1062 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

et

$$S_m = \frac{F_{\text{grav}}}{\epsilon_0 E_0^2} \approx 0,19 \text{ km}^2$$

B. Conducteur non parfait.

1. a.

$$\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$$

b.

$$\vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E} t + \vec{v}_0 \quad ; \quad \langle \vec{v} \rangle = -e \frac{\vec{E}}{m} \langle t \rangle + \vec{0} = -\frac{e}{m} \vec{E} \tau$$

c.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -N e \cdot \langle \vec{v} \rangle = \frac{N e^2}{m} \tau \vec{E} \quad \rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{N e^2}{m} \tau}$$

$$\text{régime permanent :} \quad \vec{\epsilon} \vec{f} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{f}_{\text{frott}} - e \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{d'où} \quad \vec{f} = e \vec{E} = -m \frac{\langle \vec{v} \rangle}{\tau}$$

$$\begin{array}{l} \text{confusion de } \langle \vec{f} \rangle \text{ et } \vec{f} \\ \text{ainsi que de } \langle \vec{v} \rangle \text{ et } \vec{v} \end{array} \quad \left| \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{f} \text{ proportionnel à } -\vec{v}} \quad \text{(comme les valeurs moyennes)}$$

$$d. \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m \frac{\vec{v}}{\tau} : \text{ concerne un } \bar{e} \text{ «moyen»}$$

$$\text{avec} \quad \vec{v} = \frac{\vec{j}}{-N e} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{N e^2}{m} \vec{E} - \frac{1}{\tau} \vec{j} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{N e^2 \tau}{m} \vec{E} - \vec{j} \right)$$

↓
γ

d'où

$$\boxed{\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{1}{\tau} \vec{j} = \frac{\gamma}{\tau} \vec{E}}$$

→

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} + \vec{A} e^{-t/\tau}$$

$$\vec{j}(0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E} (1 - e^{-t/\tau})}$$

régime permanent $\Rightarrow t > 3\tau$ *Application Numérique* : $t > 15 \cdot 10^{-14}$ s pour Cu \rightarrow quasi instantané

1. a. Structure de l'onde

- Onde monochromatique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

- Propagation selon Oz : $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_z$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \rho = 0 \rightarrow \text{div } \vec{E} = 0 &\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \bullet \text{div } \vec{B} = 0 &\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned} \right\} \underline{\vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ sont transversaux}}$$

b. $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} \rightarrow \boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{E}}$

- $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t} \rightarrow -\omega^2 \vec{r} + \frac{i\omega}{\tau} \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}$

$$\vec{r} = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}}{\omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{i\omega \cdot \frac{e}{m} \vec{E}}{\omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} = \frac{\vec{j}}{-N e} = \frac{\gamma \vec{E}}{-N e} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\gamma = \frac{-i\omega \frac{N e^2}{m}}{\omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}}$$

- Dans le métal : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + i \omega \epsilon_0 \vec{E} \right)$

identique au vide avec $\epsilon_0 \rightarrow \underline{\epsilon}$ tel que $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \underline{\epsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i \omega \mu_0 \underline{\epsilon} \vec{E}$

d'où $\underline{\epsilon} = \epsilon_0 + \frac{\gamma}{i\omega}$

et $\boxed{\underline{\epsilon}_r = 1 + \frac{\gamma}{i\omega \epsilon_0} = 1 - \frac{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}}{\omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}}$

c. Équation de dispersion

$$\text{rot } (\text{rot } \vec{E}) = -\text{rot } (\partial_t \vec{B}) \rightarrow \underbrace{\text{grad div } \vec{E}}_0 - \underbrace{\Delta \vec{E}}_{k^2 \vec{E} = \omega^2 \cdot \mu_0 \underline{\epsilon} \vec{E}} = -\partial_t (i \omega \mu_0 \underline{\epsilon} \vec{E})$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 - \omega_0 \underline{\epsilon} \omega^2 = 0}$$

$$k^2 = \mu_0 \omega^2 \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\left(\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau} \right) \omega_p^2}{\omega^4 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \right)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\omega^4 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} + \frac{-i \frac{\omega_p^2}{\tau} \omega}{\omega^4 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \right)$$

$$\bullet \quad k_{(\text{complexe})} = k' + i k'' \quad \rightarrow \quad k^2 = (k'^2 - k''^2) + 2 i k' k''$$

$$k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + 1/\tau^2} \right)$$

$$2k' k'' = \frac{-\omega^2}{c^2} \left(\frac{\omega \omega_p^2 / \tau}{\omega^4 + \omega^2 / \tau^2} \right)$$

\Rightarrow propagation + absorption (due à k'').

$$\bullet \quad n = \frac{c}{v_4} = c k / \omega$$

$$n = 1 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} \right)^{1/2} = n' + i n''$$

$$d. \text{ Application Numérique : } \omega_p^2 = \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = 1,78 \cdot 10^{16} \text{ rad. s}^{-1}$$

$$v_p = 2,84 \cdot 10^{15} \text{ Hz } (\rightarrow \lambda_p = 0,14 \mu\text{m})$$

$$r_{q1} = \lambda_R = 0,8 \mu\text{m} \rightarrow v_R = 3,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\lambda_V = 0,4 \mu\text{m} \rightarrow v_V = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$r_{q2} - \frac{1}{\tau} \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ Hz} \quad \text{pour Cu}$$

$$\left(\begin{array}{l} m \\ e \\ \lambda_V \\ \lambda_R \end{array} \right) \quad \text{non donnés} \\ \text{(test)}$$

$$v_{\text{visible}} \gg \frac{1}{\tau} \rightarrow \frac{\omega}{\tau} \ll \omega \quad \text{donc } n \approx \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2}$$

\rightarrow métal transparent si n réel $\rightarrow \omega > \omega_p \rightarrow \lambda < \lambda_p$
(UV)

\rightarrow métal opaque si $\omega < \omega_p$
visible

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

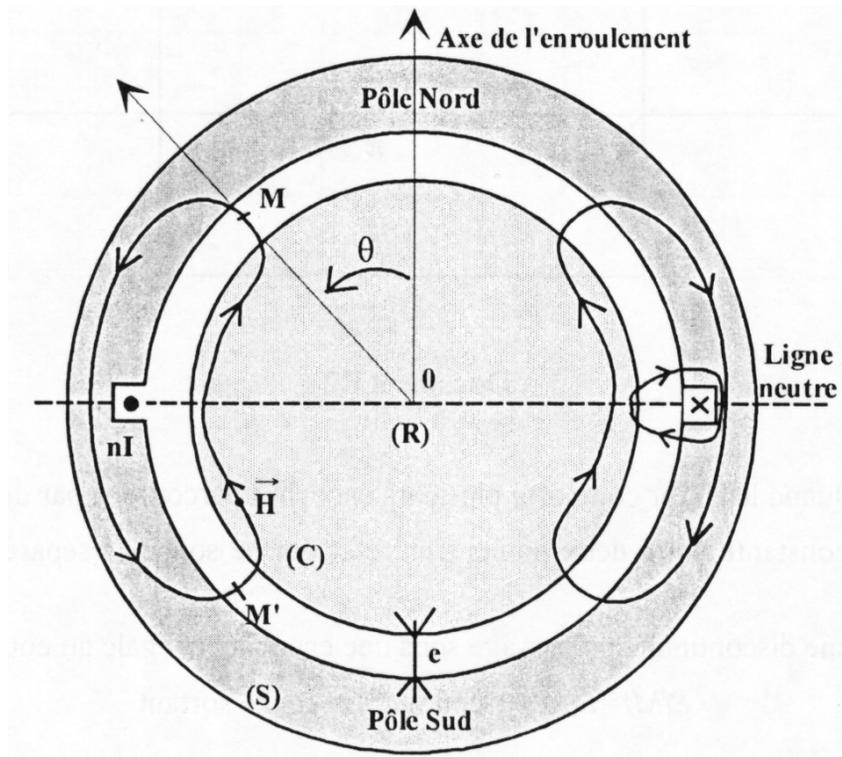
Épreuve B : Composition d'Électricité, d'Électronique,
d'Électrotechnique et d'Automatique - Session : 1995

Ière Partie

Paramètres de la machine

I-1. Force magnétomotrice d'entrefer

I-1.1



Document R1

- *Les lignes de champ magnétique sont fermées, elles entourent les conducteurs,
- *ces lignes sont radiales dans l'entrefer,
- *elles présentent deux axes de symétrie :
la ligne neutre et l'axe de l'enroulement.

I-1.2

I-1.2.1

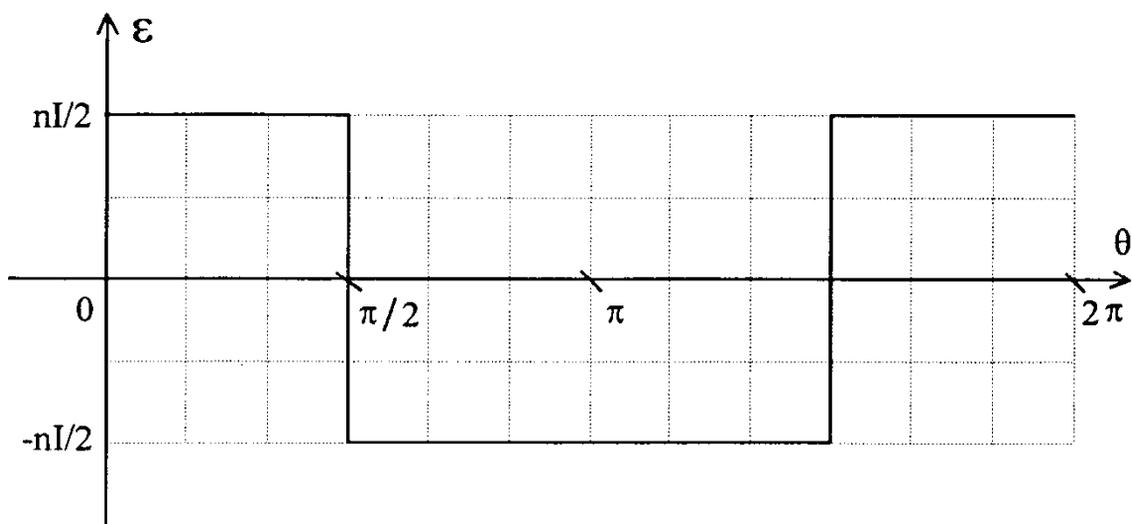
En appliquant le théorème d'Ampère à une ligne de champ passant par M et le point M', son symétrique par rapport à la ligne neutre, il vient :

$$\oint_{(c)} \vec{H} d\vec{l} = \int_{fer} \vec{H} d\vec{l} + \int_{RMS} \vec{H} d\vec{l} + \int_{SM'R} \vec{H} d\vec{l} = nI$$

soit encore : $\mathcal{E}(M) - \mathcal{E}(M') = nI$; par raison de symétrie : $\mathcal{E}(M') = -\mathcal{E}(M)$

d'où $\mathcal{E}(M) = nI/2 = He$; soit : $H = nI/2e$

On déduit le graphe de la fmm en fonction de la position angulaire :



Document R2

I-1.2.2

Quand le stator comporte plusieurs encoches parcourues par des courants

\mathcal{E} reste constante entre deux points d'entrefer qui ne sont pas séparés par un courant d'encoche,

\mathcal{E} subit une discontinuité au passage sous une encoche, et égale au courant d'encoche :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M') + \text{courant d'encoche sortant}$$

I-1.2.3

a) décomposition en série de Fourier de $\mathcal{E}(\theta)$

$$\mathcal{E}(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\varepsilon}_k \cos(k\theta) \quad , \quad k \text{ impair}$$

$$\hat{\varepsilon}_k = \frac{nI}{2\pi} 4 \int_0^{\pi/2} [\cos(k\theta)] \cdot d\theta$$

$$\hat{\varepsilon}_k = \frac{2nI}{k\pi} \cdot \sin(k\pi/2) \quad ; \quad \text{avec } \hat{\varepsilon}_k = E_k \sqrt{2}$$

en posant $k=2p+1$, il vient :

$$\varepsilon(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2nI}{(2p+1)\pi} \cos(2p+1)\theta$$

b) taux de distorsion
par définition :

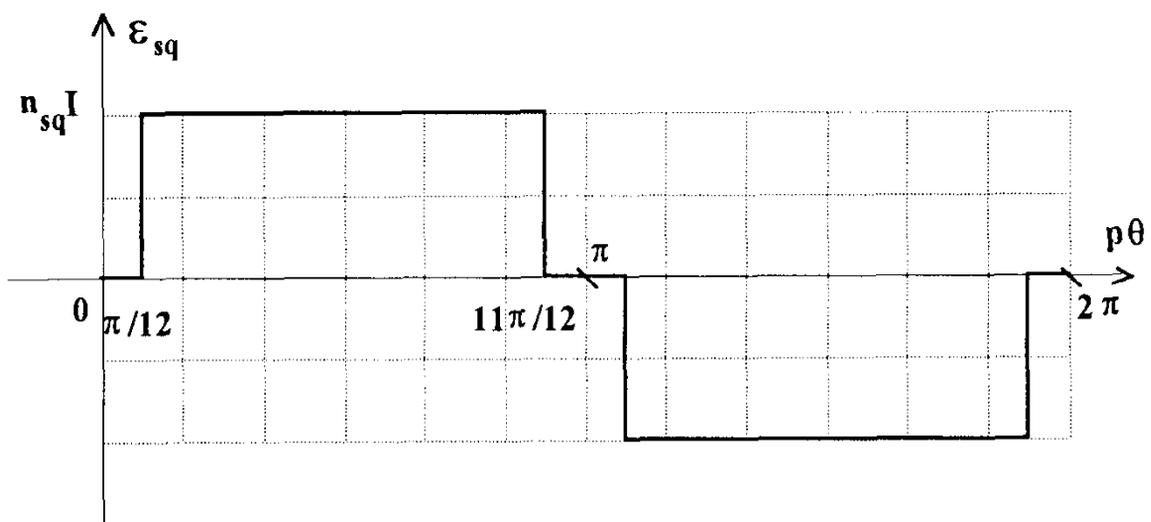
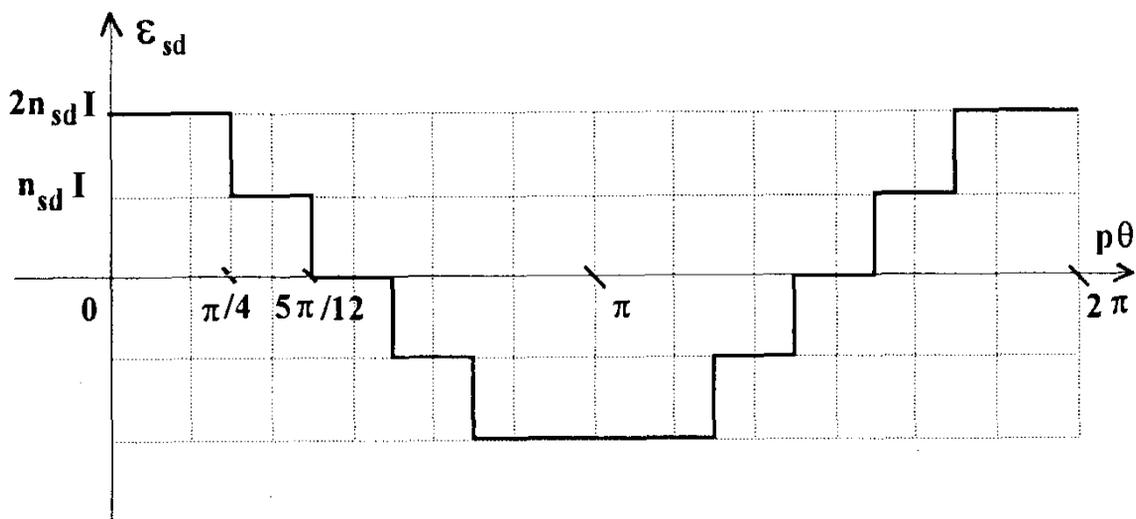
$$\delta\% = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} E_{2p+1}^2}}{E_1}$$

Par application de la formule de Parseval relative au calcul de la valeur efficace d'une grandeur périodique, on peut écrire :

$$\delta\% = \frac{\sqrt{E^2 - E_1^2}}{E_1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} = 48,3\%$$

I-2. Forces magnétomotrices statoriques

I-2.1 Tracé dans R3



I-2.2**I-2.2.1.****a) Calcul du flux propre dans la phase principale, expression de L_{sd}**

La phase principale est formée de quatre bobines identiques constituée chacune de deux sections concentriques de surfaces respectives $5S_e$ et $3S_e$. L'induction servant au calcul du flux a pour expression $(\mu_o \varepsilon_{sd} / e)$.

On déduit l'expression du flux totalisé :

$$4 \left[2n_{sd}(3S_e) \left(2 \frac{n_{sd}\mu_o I}{e} \right) + n_{sd}(2S_e) \left(\frac{n_{sd}\mu_o I}{e} \right) \right]$$

$$\text{soit : } \phi_{sd} = 56 \frac{n_{sd}^2 \mu_o I S_e}{e} = L_{sd} I, \text{ d'où : } L_{sd} = 56 \frac{n_{sd}^2 \mu_o S_e}{e}$$

b) Calcul du flux propre dans la phase auxiliaire, expression de L_{sq}

La phase est formée de quatre bobines identiques d'une section chacune et de surface $5S_e$. L'induction servant au calcul du flux a pour expression : $\mu_o \varepsilon_{sq} / e$.

On déduit le flux totalisé :

$$4 \left[n_{sq}(5S_e) \left(\frac{n_{sq}\mu_o I}{e} \right) \right]$$

$$\text{soit : } \phi_{sq} = 20 \frac{n_{sq}^2 \mu_o I S_e}{e} = L_{sq} I, \text{ d'où : } L_{sq} = 20 \frac{n_{sq}^2 \mu_o S_e}{e}$$

I-2.2.2.

$$\frac{L_{sd}}{L_{sq}} = \frac{56 n_{sd}^2}{20 n_{sq}^2}, \text{ or : } n_{sq} = 2 n_{sd}, \text{ d'où : } L_{sd} / L_{sq} = 0,7$$

Dans le cas des inductances réelles, on doit tenir compte des fmm dans le milieu ferromagnétique de sorte les fmm d'entrefer sont plus faibles que celles qui ont été déterminées. Pour un même courant I le flux d'induction est donc plus faible; on déduit ainsi que les inductances réelles sont plus faibles que les inductances théoriques.

I-2.3**I-2.3.1**

$$\text{a) } \varepsilon_{sd}(p\theta) = \hat{\varepsilon}_{sd} \cos(p\theta)$$

$$\hat{\varepsilon}_{sd} = \frac{1}{\pi} 4 \left[\int_0^{\pi/4} 2n_{sd} I \cos(\alpha) d\alpha + \int_{\pi/4}^{5\pi/12} n_{sd} I \cos(\alpha) d\alpha \right]$$

$$\hat{\varepsilon}_{sd} = 121,4. I$$

$$\text{b) } \varepsilon_{sq} = \hat{\varepsilon}_{sq} \sin(p\theta)$$

$$\hat{\varepsilon}_{sq} = \frac{1}{\pi} 4 \int_{\pi/12}^{\pi/2} n_{sq} I \sin(\alpha) d\alpha$$

$$\hat{\varepsilon}_{sq} = 140,2. I$$

on déduit : $a=0,866$

I-2.3.2

Par définition, le coefficient de mutuelle inductance M_D est le rapport du flux d'induction créé par le courant I de la phase principale dans une phase rotorique, lorsque les axes sont confondus, au courant I .

Ne retenant que l'effet du fondamental de ε_{sd} , ce flux $\phi_{sd \rightarrow r}$ est proportionnel à $\hat{\varepsilon}_{sd}$;

$$\phi_{sd \rightarrow r} = k_r \hat{\varepsilon}_{sd} = M_D \cdot I$$

k_r est une constante caractéristique de la cage rotorique.

de même .

$$\phi_{sq \rightarrow r} = k_r \hat{\varepsilon}_{sq} = M_Q \cdot I$$

I-2.3.3

on déduit : $M_D / M_Q = \hat{\varepsilon}_{sd} / \hat{\varepsilon}_{sq} = \alpha$

I-3.

expression de la résistance d'un conducteur : $R = \frac{\rho l}{S}$ avec $S = \frac{\pi D^2}{4}$, sachant que λ est la longueur moyenne d'une spire, il vient :

$$R_{sd} = 4\rho \frac{2n_{sd}\lambda}{\pi D_{sd}^2} \quad \text{et} \quad R_{sq} = 4\rho \frac{n_{sq}\lambda}{\pi D_{sq}^2}$$

$$\text{soit : } \frac{R_{sq}}{R_{sd}} = \frac{D_{sd}^2}{D_{sq}^2} = \frac{0,75^2}{0,53^2} = 2$$

I-4.
I-4.1

I-4.1.1 Equations des tensions :

$$E = R_s i_s + L_s \frac{di_s}{dt} + M \frac{di_r}{dt}$$

$$0 = R_r i_r + L_r \frac{di_r}{dt} + M \frac{di_s}{dt}$$

I-4.1.2 Application de la Transformation de Laplace aux équations précédentes :

$$\frac{E}{p} = (R_s + L_s p) I_s(p) + M p I_r(p)$$

$$0 = (R_r + L_r p) I_r(p) + M p I_s(p)$$

par élimination de I_r il vient :

$$I_s(p) = \frac{E(R_r + L_r p)}{p \left[R_s R_r + (L_s R_r + L_r R_s) p + (L_s L_r - M^2) p^2 \right]}$$

I-4.2
I-4.2.1

$$I_s(p) = \frac{E(1 + A p)}{R_s p \left[1 + (B + C) p + B C p^2 \right]}$$

I-4.2.2

$I_s(p)$ est décomposable en éléments simples après avoir factorisé le dénominateur :

$$I_s(p) = \frac{E}{R_s p} \frac{(1+Ap)}{(1+Bp)(1+Cp)} = \frac{E}{R_s} \left[\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(1+Bp)} + \frac{\gamma}{(1+Cp)} \right]$$

avec : $\alpha = 1$; $\beta = \frac{B(A-B)}{B-C}$; $\gamma = \frac{C(A-C)}{(C-B)}$

on déduit : $i_s(t) = \frac{E}{R_s} \left[1 + \frac{\beta}{B} e^{-t/B} + \frac{\gamma}{C} e^{-t/C} \right]$

avec :

$$Y_0 = \frac{E}{R_s} ; Y_1 = \left(\frac{B-A}{B-C} \right) \frac{E}{R_s} ; Y_2 = \left(\frac{C-A}{C-B} \right) \frac{E}{R_s}$$

I-4.2.3

signes de Y_1 et Y_2 : on calcule la somme et le produit :

$$Y_1 + Y_2 = \frac{E}{R_s} > 0 ; Y_1 Y_2 = \left(\frac{E}{R_s} \right)^2 \frac{1}{(B-C)^2} [-BC - A^2 + A(B+C)]$$

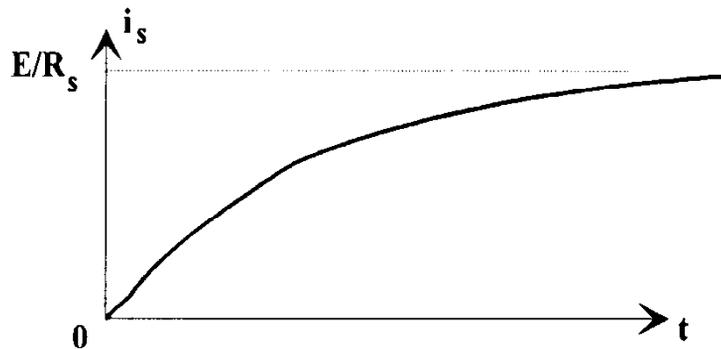
soit encore pour le produit :

$$Y_1 Y_2 = \left(\frac{E}{R_s} \right)^2 \frac{1}{(B-C)^2} [T_s T_r k^2]$$

La somme et le produit sont positifs, donc Y_1 et Y_2 sont positifs .

I-4.3**I-4.3.1**

$i_s(t)$ est une fonction croissante (dérivée positive) de 0 à E/R_s , d'où l'allure du chronogramme :

**I-4.3.2**

$$y_a(t) = Y_0 - i_s(t) = Y_1 e^{-t/B} + Y_2 e^{-t/C} > 0$$

soit encore : $y_a(t) = Y_1 e^{-t/B} \left[1 + \frac{Y_2}{Y_1} e^{-t \left[\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right]} \right]$

avec : $\frac{1}{C} - \frac{1}{B} > 0$

en prenant le logarithme népérien , on obtient :

$$\text{Ln}(y_a) = \text{Ln}(Y_1) - \frac{t}{B} + \text{Ln} \left[1 + \frac{Y_2}{Y_1} e^{-t \left[\frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right]} \right]$$

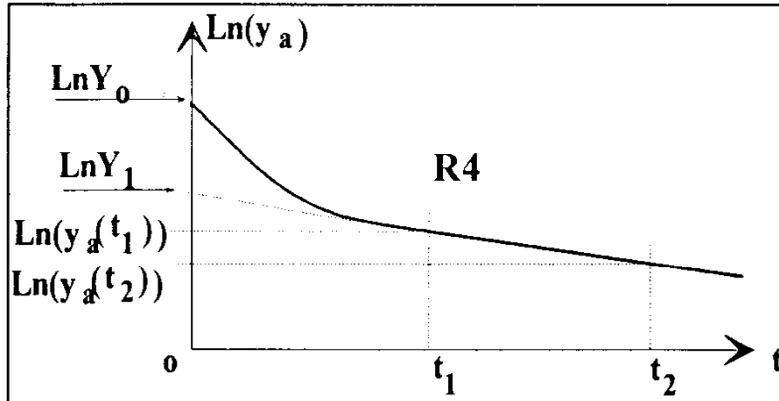
Le terme entre crochets [] tend vers 1 quand t tend vers l'infini , l'équation de l'asymptote est donc :

$$\text{Ln}(y_a) = \text{Ln}(Y_1) - \frac{t}{B}$$

L'intersection de l'asymptote avec l'axe des ordonnées donne $\text{Ln}(Y_1)$

Sur l'asymptote on repère deux points d'abscisses respectives t_1 et t_2 , on en tire :

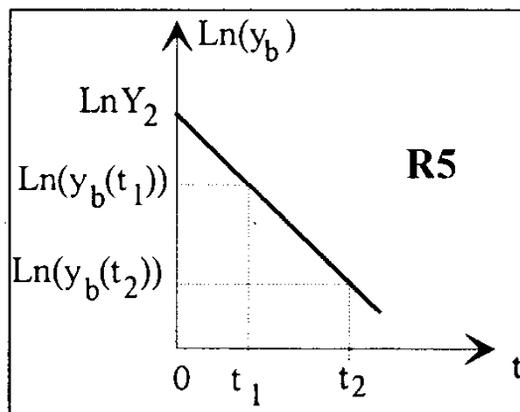
$$B = \frac{t_2 - t_1}{\text{Ln}(y_a(t_1)) - \text{Ln}(y_a(t_2))}$$



I-4.3.3

$y_b(t) = Y_2 e^{-t/C}$, soit : $\text{Ln}(y_b(t)) = \text{Ln}Y_2 - \frac{t}{C}$, c'est l'équation d'une droite de pente négative égale à $-1/C$, l'intersection avec l'axe des ordonnées donne $\text{Ln}Y_2$ et :

$$C = \frac{t_2 - t_1}{\text{Ln}(y_b(t_1)) - \text{Ln}(y_b(t_2))}$$



I-4.3.4

$$t_1 = 50\text{ms} \Rightarrow \text{Ln}(y_a(t_1)) = -0,03$$

a) calcul de Y_1 et B :

$$t_2 = 200\text{ms} \Rightarrow \text{Ln}(y_a(t_2)) = -1,52$$

$$\text{on en tire : } B = 101\text{ms} \text{ et } Y_1 = 1,58 \text{ A}$$

b) calcul de Y_2 et C : on calcule d'abord y_b et $\text{Ln}y_b$,

$t(ms)$	0	2,5	5	7,5	10	12,5
y_b	1,42	0,84	0,5	0,29	0,17	0,10
Lny_b	0,35	-0,17	-0,69	-1,24	-1,77	-2,30

on trouve donc : $Y_2=1,42A$ et $C= 4,72ms$

I-4.3.5

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{B-A}{A-C} \text{ soit : } A = \frac{Y_2 B + Y_1 C}{Y_1 + Y_2} = T_r = 50,3ms$$

$$T_{sd} = B + C - A = 55,4ms$$

$$1 - k_D^2 = \frac{BC}{T_{sd} T_r}, \quad k_D = \sqrt{1 - \frac{BC}{T_{sd} T_r}} = 0,91$$

$$L_{sd} = R_{sd} T_{sd} = 316mH$$

I-4.3.6

1-4.3.6.1 équation rotorique : $0 = R_r i_r + L_r \frac{di_r}{dt} + M \frac{di_s}{dt}$

intégration sur l'intervalle T_c : $0 = R_r \int_0^{T_c} i_r dt + L_r \int_0^{i_r(T_c)} di_r + M \int_{E/R_s}^0 di_s$

Le premier terme est nul car on fait tendre T_c vers 0 et i_r a une valeur finie . On obtient dans ces conditions :

$$L_r i_r(0+) - M i_s(0) = 0$$

$$\text{avec } i_s(0) = E / R_s$$

d'où :

$$R_s i_r(0+) / E = M / L_r$$

I-4.3.6.2

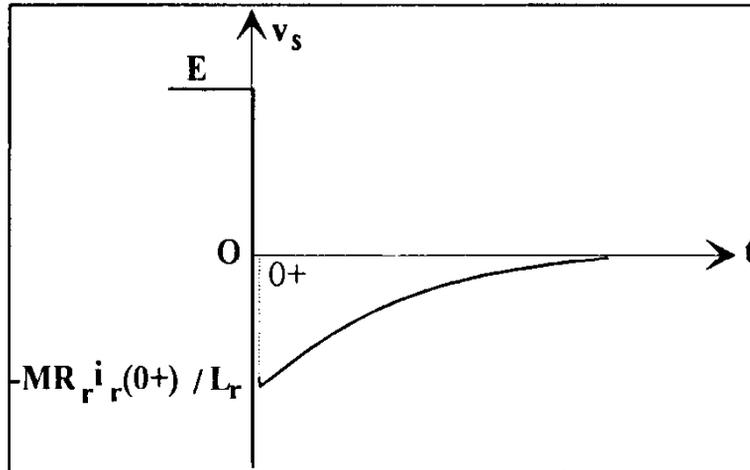
A partir de $t=0+$, i_r est solution de l'équation différentielle :

$$0 = R_r i_r + L_r \frac{di_r}{dt}$$

elle admet pour solution :

$$i_r(t) = i_r(0+) e^{-t/\tau_r} \text{ avec : } \tau_r = L_r / R_r$$

$$\text{comme : } v_s(t) = M \frac{di_r}{dt} \text{ il vient : } v_s(t) = -\frac{MR_r}{L_r} i_r(0+) e^{-t/\tau_r}$$

I-4.3.6.3


La partie exponentielle du graphe permet de calculer la constante de temps rotorique .

I-5. Evaluation des paramètres mécaniques

I-5.1 Couple électromagnétique de la machine à courant continu $C_e =$ couple de charge = $f\Omega + C_s = K_c I_c$

La pente de la droite est calculable par les deux points de mesure :

$$f = K_c \frac{I_{c2} - I_{c1}}{\Omega_2 - \Omega_1} = 493.10^{-6} \text{ Nms / rad}$$

et le couple de frottement sec s'obtient par l'équation :

$$C_s = K_c I_{c1} - f\Omega_1 \text{ , soit : } C_s = 0,226 \text{ Nm}$$

I-5.2

I-5.2.1 Equation différentielle du mouvement de ralentissement :

$$0 = J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega + C_s$$

$$\text{Solution : } \Omega = -\frac{C_s}{f} + \left[\Omega_0 + \frac{C_s}{f} \right] e^{-t f / J}$$

$$\text{on déduit : } y(t) = \left(\Omega_0 + \frac{C_s}{f} \right) \left[1 - e^{-t f / J} \right]$$

$$\text{on en tire : } \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{1 + e^{-t_1 f / J}}$$

$$\text{d'où : } J = \frac{t_1 f}{\text{Ln} \left(\frac{y_1}{y_2 - y_1} \right)} \text{ ; soit : } J = 5,8.10^{-3} \text{ kgm}^2$$

La précision de cette méthode dépend de l'estimation de f et aussi de la précision sur le rapport $y_1 / (y_2 - y_1)$; pour une variation de Ω "très tendue" proche d'une droite, la précision est très mauvaise car le rapport $y_1 / (y_2 - y_1)$ tend vers 1 et le logarithme tend vers 0, or ce dernier figure au dénominateur de l'expression de J .

I-5.2.2

Une autre méthode consiste à utiliser la valeur de la puissance mécanique p_m évaluée dans l'expérimentation I-5.a) pour une vitesse Ω :

$(C_s + f\Omega)\Omega =$ puissance électrique fournie à la machine à courant continu - pertes Joule d'induit . On déduit $(C_s + f\Omega)$

Lors du ralentissement, au point de vitesse Ω' :

$$-J \frac{d\Omega}{dt} = C_s + f\Omega$$

on trace la tangente au chronogramme de vitesse et on estime alors la pente, on obtient ainsi :

$$J = (C_s + f\Omega) / \left(-\frac{d\Omega}{dt} \right)_{\Omega=\Omega'}$$

2ème Partie

II-1. Etude des flux d'induction

II-1.1 Le flux d'induction dans l'enroulement d'une phase est la somme algébrique des flux (linéarité, non saturation) créés par les divers courants, quand deux courants sont en quadrature d'espace le coefficient de mutuelle est nul, sinon pour un angle quelconque le coefficient de mutuelle est proportionnel au cosinus de l'angle des axes; de sorte que :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{sd} \\ \varphi_{sq} \\ \varphi_{r1} \\ \varphi_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{sd} & 0 & M_D \cos(\alpha) & -M_D \sin(\alpha) \\ 0 & L_{sq} & M_Q \sin(\alpha) & M_Q \cos(\alpha) \\ M_D \cos(\alpha) & M_Q \sin(\alpha) & L_r & 0 \\ -M_D \sin(\alpha) & M_Q \cos(\alpha) & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{r1} \\ i_{r2} \end{bmatrix}$$

II-1.2

II-1.2.1 La matrice de transformation inverse est égale à la transposée de [T], soit :

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

II-1.2.2

Pour les flux statoriques :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{sd} \\ \varphi_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{sd} & 0 \\ 0 & L_{sq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_D \cos(\alpha) & -M_D \sin(\alpha) \\ M_Q \sin(\alpha) & M_Q \cos(\alpha) \end{bmatrix} [T]^{-1} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{sd} \\ \varphi_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{sd} & 0 \\ 0 & L_{sq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_D & 0 \\ 0 & M_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix}$$

Pour les flux rotoriques :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{rd} \\ \varphi_{rq} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} M_D \cos(\alpha) & M_Q \sin(\alpha) \\ -M_D \sin(\alpha) & M_Q \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + [T] \begin{bmatrix} L_r & 0 \\ 0 & L_r \end{bmatrix} [T]^{-1} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{rd} \\ \varphi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_D & 0 \\ 0 & M_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_r & 0 \\ 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix}$$

Finalement, on trouve que :

$$[L_{d,q}] = \begin{bmatrix} L_{sd} & 0 & M_D & 0 \\ 0 & L_{sq} & 0 & M_Q \\ M_D & 0 & L_r & 0 \\ 0 & M_Q & 0 & L_r \end{bmatrix}$$

La matrice inductance ne contient plus que des termes indépendants de la position α .

II-2. Etude des tensions.

II-2.1 Chaque enroulement est décrit par la loi des mailles contenant le terme de chute de tension et le terme de fém induite, de sorte que :

$$v = Ri - e \quad \text{et} \quad e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

soit pour les quatre phases:

$$v_{sd} = R_{sd}i_{sd} + \frac{d\varphi_{sd}}{dt}$$

$$v_{sq} = R_{sq}i_{sq} + \frac{d\varphi_{sq}}{dt}$$

$$v_{r1} = R_r i_{r1} + \frac{d\varphi_{r1}}{dt}$$

$$v_{r2} = R_{r2}i_{r2} + \frac{d\varphi_{r2}}{dt}$$

II-2.2

On explicite les deux dernières équations :

$$\begin{bmatrix} v_{rd} \\ v_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} + [T] \frac{d}{dt} \left[[T]^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_{rd} \\ \varphi_{rq} \end{bmatrix} \right]$$

En développant le dernier terme, il vient :

$$\begin{bmatrix} v_{rd} \\ v_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_r & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi_{rd} \\ \varphi_{rq} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{rd} \\ \varphi_{rq} \end{bmatrix}$$

On obtient alors la relation proposée avec :

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{sd} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{sq} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En remplaçant les flux par leurs expressions en fonction des courants on obtient alors :

$$[B] = [L_{d,q}]$$

$$[A] = \begin{bmatrix} R_{sd} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{sq} & 0 & 0 \\ 0 & \omega M_Q & R_r & \omega L_r \\ -\omega M_D & 0 & -\omega L_r & R_r \end{bmatrix}$$

II-3. Expression du couple électromagnétique

$$p_E = [i_{d,q}]^t [R] [i_{d,q}] \quad \text{pertes Joule}$$

$$+ \left[\frac{d}{dt} \varphi_{d,q} \right]^t [i_{d,q}] \quad \text{variation de l'énergie électromagnétique dans les}$$

bobines fixes à réluctance constante

$$+ \omega [\varphi_{d,q}]^t [K]^t [i_{d,q}] \quad \text{puissance électromécanique traduisant la}$$

conversion d'énergie électrique en énergie mécanique

On déduit à partir du troisième terme que :

$$\omega [i_{rd} \varphi_{rq} - i_{rq} \varphi_{rd}] = C_e \Omega = C_e \frac{\omega}{p}$$

d'où :

$$C_e = p [i_{rd} \varphi_{rq} - i_{rq} \varphi_{rd}]$$

or :

$$\varphi_{rd} = L_r i_{rd} + M_D i_{sd}$$

$$\varphi_{rq} = M_Q i_{sq} + L_r i_{rq}$$

d'où finalement le résultat :

$$C_e = p [M_Q i_{rd} i_{sq} - M_D i_{rq} i_{sd}]$$

II-4. Application à la détermination expérimentale de la constante de temps rotorique.

II-4.1

a) Dans l'équation : $[v_{d,q}] = [A][i_{d,q}] + [B] \frac{d}{dt} [i_{d,q}]$,

on écrit que : $i_{sd} = 0, i_{sq} = 0, v_{rd} = 0, v_{rq} = 0$ et on déduit les équations rotoriques adaptées aux nouvelles conditions :

$$0 = R_r i_{rd} + L_r \omega i_{rq} + L_r \frac{di_{rd}}{dt}$$

$$0 = -L_r \omega i_{rd} + R_r i_{rq} + L_r \frac{di_{rq}}{dt}$$

b) i_{rd} et i_{rq} ne sont pas nuls à $t=0+$ à cause de la continuité de l'énergie électromagnétique.

Résolution du système différentiel par utilisation de la transformation de Laplace :

$$0 = R_r I_{rd} + L_r \omega I_{rq} + L_r p I_{rd} - L_r i_{rd}(0+)$$

$$0 = -L_r \omega I_{rd} + R_r I_{rq} + L_r p I_{rq} - L_r i_{rq}(0+)$$

On déduit par résolution du système linéaire algébrique :

$$I_{rd} = \frac{L_r [(R_r + L_r p) i_{rd}(0+) - L_r \omega i_{rq}(0+)]}{(R_r + L_r p)^2 + (L_r \omega)^2}$$

$$I_{rd} = \frac{L_r [(R_r + L_r p) i_{rq}(0+) + L_r \omega i_{rd}(0+)]}{(R_r + L_r p)^2 + (L_r \omega)^2}$$

Les pôles sont complexes conjugués, ils valent : $-\frac{R_r}{L_r} \pm j\omega$

On déduit les solutions :

$$i_{rd} = A_{rd} \cdot e^{-R_r t / L_r} \cdot \cos(\omega t + \psi_{rd})$$

$$i_{rq} = A_{rq} \cdot e^{-R_r t / L_r} \cdot \cos(\omega t + \psi_{rq})$$

avec : A_{rd} , A_{rq} , ψ_{rd} , ψ_{rq} les constantes d'intégration .

II-4.2

Comme : $v_{sd}(t) = M_D \frac{di_{rd}}{dt}$ et $v_{sq}(t) = M_Q \frac{di_{rq}}{dt}$

il vient :

$$v_{sd}(t) = B_{rd} \cdot e^{-R_r t / L_r} \cdot \cos(\omega t + \theta_{rd})$$

$$v_{sq}(t) = B_{rq} \cdot e^{-R_r t / L_r} \cdot \cos(\omega t + \theta_{rq})$$

L'allure des chronogrammes est celle de la sinusoïde amortie exponentiellement .
Soit deux maxima distants de n pseudo-périodes T , avec $T=2\pi/\omega$:

$$\frac{\hat{V}_{n+1}}{\hat{V}_1} = \frac{e^{-(t_1+nT)/T_r}}{e^{-t_1/T_r}} = e^{-nT/T_r}$$

en prenant le logarithme de l'expression, on obtient : $T_r = \frac{nT}{\text{Ln}(\hat{V}_1/\hat{V}_{n+1})}$

II-5. Application au freinage par injection de courant continu au stator .

II-5.1

Le rotor tourne à vitesse constante Ω dans un champ magnétostatique à répartition spatiale sinusoïdale, par conséquent les courants induits sont sinusoïdaux de pulsation ω égale à $p\Omega$

Soit par exemple :

$$i_{r1} = \hat{I}_r \cos(\omega t + \psi) \text{ et } i_{r2} = -\hat{I}_r \sin(\omega t + \psi)$$

et appliquons la transformation $[T]$, on déduit :

$$i_{rd} = \hat{I}_r \cos(\psi) \text{ et } i_{rq} = -\hat{I}_r \sin(\psi)$$

Les courants rotoriques d'axes d,q sont bien constants en régime permanent.

II-5.2

Remplaçons dans les équations rotoriques les courants statoriques par le courant continu I :

$$0 = M_Q \omega I + R_r i_{rd} + L_r \omega i_{rq} + L_r \frac{di_{rd}}{dt}$$

$$0 = -M_D \omega I - L_r \omega i_{rd} + R_r i_{rq} + L_r \frac{di_{rq}}{dt}$$

$$\text{sachant que : } \frac{di_{rd}}{dt} = 0, \quad \frac{di_{rq}}{dt} = 0 \quad \text{il vient :}$$

$$R_r i_{rd} + L_r \omega i_{rq} = -M_Q \omega I, \quad -L_r \omega i_{rd} + R_r i_{rq} = M_D \omega I$$

La résolution de ce système d'équations conduit aux expressions recherchées :

$$i_{rd} = \frac{-\omega [M_Q R_r + M_D L_r \omega] I}{R_r^2 + (L_r \omega)^2}, \quad i_{rq} = \frac{\omega [M_D R_r - M_Q L_r \omega] I}{R_r^2 + (L_r \omega)^2}$$

II-5.3

L'équation du couple électromagnétique est adaptée aux hypothèses et résultats précédents :

$$\text{soit : } C_e = pI [M_Q i_{rd} - M_D i_{rq}] \text{ d'où : } C_e = -pI^2 \left[M_Q^2 + M_D^2 \right] \frac{R_r \omega}{R_r^2 + (L_r \omega)^2}$$

Le signe moins confère au couple le qualificatif de *résistant*; son maximum se produit pour

$$: R_r = L_r \omega, \text{ soit donc : } \Omega = \frac{R_r}{pL_r} = \frac{1}{pT_r}$$

3ème Partie

Régime permanent sinusoïdal

III-1.

III-1.1 On compare l'équation des tensions statoriques écrite à l'aide de la matrice de description de la machine en régime sinusoïdal à l'équation déduite du modèle de la figure 4. On tire de la comparaison :

$$\begin{aligned} \underline{E}_D &= jL_{sd}(1-\sigma_D)\omega_s[\underline{I}_{sd} + \underline{I}'_{rd}] \text{ et :} \\ \underline{E}_Q &= jL_{sq}(1-\sigma_Q)\omega_s[\underline{I}_{sq} + \underline{I}'_{rq}] \text{ soit donc le rapport :} \\ \frac{\underline{E}_D}{\underline{E}_Q} &= \frac{L_{sd}(1-\sigma_D)}{L_{sq}(1-\sigma_Q)} \frac{[\underline{I}_{sd} + \underline{I}'_{rd}]}{[\underline{I}_{sq} + \underline{I}'_{rq}]} \text{ or :} \\ (1-\sigma_D) &= \frac{M_D^2}{L_{sd}L_r} \text{ et } (1-\sigma_Q) = \frac{M_Q^2}{L_{sq}L_r} \\ \text{soit finalement : } \frac{\underline{E}_D}{\underline{E}_Q} &= \frac{M_D^2}{M_Q^2} \frac{[\underline{I}_{sd} + \underline{I}'_{rd}]}{[\underline{I}_{sq} + \underline{I}'_{rq}]} = a^2 \frac{[\underline{I}_{sd} + \underline{I}'_{rd}]}{[\underline{I}_{sq} + \underline{I}'_{rq}]} \end{aligned}$$

III.1.2 de l'équation matricielle des tensions, on explicite les équations rotoriques :

$$\begin{aligned} 0 &= jaT_r\omega_s\underline{I}_{sd} + \omega T_r\underline{I}_{sq} + (1+jT_r\omega_s)a\underline{I}'_{rd} + \omega T_r\underline{I}'_{rq} \\ 0 &= -a\omega T_r\underline{I}_{sd} + jT_r\omega_s\underline{I}_{sq} - a\omega T_r\underline{I}'_{rd} + (1+jT_r\omega_s)\underline{I}'_{rq} \end{aligned}$$

On fait apparaître les sommes suivantes de courants :

$(\underline{I}_{sq} + \underline{I}'_{rq})$ et $(\underline{I}_{sd} + \underline{I}'_{rd})$ dans les deux expressions précédentes :

$$-a\underline{I}'_{rd} = jaT_r\omega_s(\underline{I}_{sd} + \underline{I}'_{rd}) + \omega T_r(\underline{I}_{sq} + \underline{I}'_{rq})$$

$$-\underline{I}'_{rq} = -a\omega T_r(\underline{I}_{sd} + \underline{I}'_{rd}) + jT_r\omega_s(\underline{I}_{sq} + \underline{I}'_{rq})$$

d'où on tire :

$$(\underline{I}_{sq} + \underline{I}'_{rq}) = \frac{a\omega\underline{I}'_{rd} + j\omega_s\underline{I}'_{rq}}{(\omega_s^2 - \omega^2)T_r} \text{ et } (\underline{I}_{sd} + \underline{I}'_{rd}) = \frac{ja\omega_s\underline{I}'_{rd} - \omega\underline{I}'_{rq}}{a(\omega_s^2 - \omega^2)T_r}$$

Le rapport des fém devient :

$$\frac{\underline{E}_D}{\underline{E}_Q} = a \cdot \frac{ja\omega_s\underline{I}'_{rd} - \omega\underline{I}'_{rq}}{a\omega\underline{I}'_{rd} + j\omega_s\underline{I}'_{rq}} \text{ et en introduisant } g : \omega = \omega_s(1-g) \text{ il vient :}$$

$$\frac{\underline{E}_D}{\underline{E}_Q} = a \cdot \frac{ja\underline{I}'_{rd} - (1-g)\underline{I}'_{rq}}{a(1-g)\underline{I}'_{rd} + j\underline{I}'_{rq}}$$

III-1.3 Pour g bien inférieur à 1, on trouve que : $\underline{E} \cong ja\underline{E}$

III-1.4

III-1.4.1

a) *Argument de \underline{I}*

La puissance active absorbée par la phase principale est *négative*, la puissance réactive absorbée est positive, par conséquent le déphasage entre v_{sd} et i_{sd} est compris entre 90° et 180° et Argument de \underline{I}_{sd} entre -90° et -180° :

$$\text{Comme } P_{sd} = V_{sd} I_{sd} \cos(\text{Arg}(\underline{I}_{sd})), \text{ on trouve : } \cos(\text{Arg}(\underline{I}_{sd})) = \frac{P_{sd}}{V_{sd} I_{sd}} = -0,372$$

$$\text{Soit : } \boxed{\text{Arg}(\underline{I}_{sd}) = -112^\circ}$$

b) La puissance réactive fournie par le réseau à la phase auxiliaire et au condensateur s'exprime par : $Q = U \cdot I_{sq} \sin(\bar{I}_{sq}, -\bar{U})$, quant à la puissance active, celle-ci s'écrit : $P = U \cdot I_{sq} \cos(\bar{I}_{sq}, -\bar{U}) = P_{sq} = 206W$. Q se calcule par bilan des puissances réactives

$$Q = -\frac{I_{sq}^2}{C\omega} + Q_{sq} \text{ avec } Q_{sq} = \sqrt{(V_{sq} I_{sq})^2 - P_{sq}^2}; \text{ on trouve donc numériquement } Q = -177 \text{ var};$$

on déduit donc des signes des deux puissances P et Q que i_{sq} est en avance de phase d'un angle inférieur à 90° sur la tension $-u$.

c) Des valeurs numériques de P , Q , I_{sq} , V_{sq} , on tire : $\sin(\bar{I}_{sq}, -\bar{V}_{sd}) = -0,655$;

$$\cos(\bar{I}_{sq}, -\bar{V}_{sd}) = 0,763, \text{ d'où le résultat : } (\bar{I}_{sq}, -\bar{V}_{sd}) = -40,5^\circ$$

$$\text{soit encore : } (\bar{I}_{sq}, \bar{V}_{sd}) = 139,5^\circ \text{ et : } \boxed{\text{Arg} \underline{I}_{sq} = -139,5^\circ}$$

Pour l'argument de \underline{V}_{sq} , on considère la relation des angles :

$$(\bar{V}_{sd}, \bar{V}_{sq}) = (\bar{V}_{sd}, \bar{I}_{sq}) + (\bar{I}_{sq}, \bar{V}_{sq})$$

L'angle $(\bar{I}_{sq}, \bar{V}_{sq})$ est déduit des valeurs numériques des puissances P_{sq} et Q_{sq}

$$\text{soit : } (\bar{I}_{sq}, \bar{V}_{sq}) = 58,6^\circ, \text{ par conséquent : } (\bar{V}_{sd}, \bar{V}_{sq}) = -139,5^\circ + 58,6^\circ \cong -81^\circ$$

$$\text{d'où finalement : } \boxed{\text{Arg} \underline{V}_{sq} = -81^\circ}$$

III-1.4.2

a) *Calcul de E_D et $(\bar{I}_{sd}, \bar{E}_D)$*

Ces deux valeurs numériques se déduisent de celles des puissances active et réactive d'expressions respectives : $P_D = E_D I_{sd} \cos(\bar{I}_{sd}, \bar{E}_D)$; $Q_D = E_D I_{sd} \sin(\bar{I}_{sd}, \bar{E}_D)$ obtenus par bilan des puissances (méthode de Boucherot).

$$P_D = P_{sd} - R_{sd} I_{sd}^2 = -93W$$

$$Q_D = Q_{sd} - \sigma_D L_{sd} I_{sd}^2 \text{ avec : } Q_{sd} = V_{sd} I_{sd} \sin(\bar{I}_{sd}, \bar{V}_{sd})$$

$$\text{soit : } Q_D = 165,4 \text{ var}$$

On en déduit :
$$\boxed{E_D = \frac{\sqrt{P_D^2 + Q_D^2}}{I_{sd}} = 131V}$$
 et $(\vec{I}_{sd}, \vec{E}_D) = 119^\circ$

b) Calcul de E_Q et $(\vec{I}_{sq}, \vec{E}_Q)$

La méthode est la même qu'en a),

on introduit : $P_Q = E_Q I_{sq} \cos(\vec{I}_{sq}, \vec{E}_Q)$ et $Q_Q = E_Q I_{sq} \sin(\vec{I}_{sq}, \vec{E}_Q)$

$$P_Q = P_{sq} - R_{sq} I_{sq}^2 ; Q_Q = Q_{sq} - \sigma_Q L_{sq} \omega_s I_{sq}^2$$

$$P_Q = 206 - 37,8 = 168,2W ; Q_Q = 338 - 102,6 = 235,4var$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{E_Q = \frac{\sqrt{P_Q^2 + Q_Q^2}}{I_{sq}} = 161V}$$

et $\cos(\vec{I}_{sq}, \vec{E}_Q) = 0,58$, $\sin(\vec{I}_{sq}, \vec{E}_Q) = 0,82$, soit : $(\vec{I}_{sq}, \vec{E}_Q) = 54,5^\circ$

c) Calcul du déphasage entre les deux forces électromotrices

$$(\vec{E}_D, \vec{E}_Q) = (\vec{E}_D, \vec{I}_{sd}) + (\vec{I}_{sd}, \vec{V}_{sd}) + (\vec{V}_{sd}, \vec{I}_{sq}) + (\vec{I}_{sq}, \vec{E}_Q)$$

$$(\vec{E}_D, \vec{E}_Q) = -119^\circ + 112^\circ - 139,5^\circ + 54,5^\circ = -92^\circ$$

$$\boxed{(\vec{E}_D, \vec{E}_Q) = -92^\circ}$$

d)

On observe bien au vu du résultat numérique que la fém d'axe q est pratiquement en quadrature arrière sur la fém d'axe d .

Le rapport des valeurs efficaces

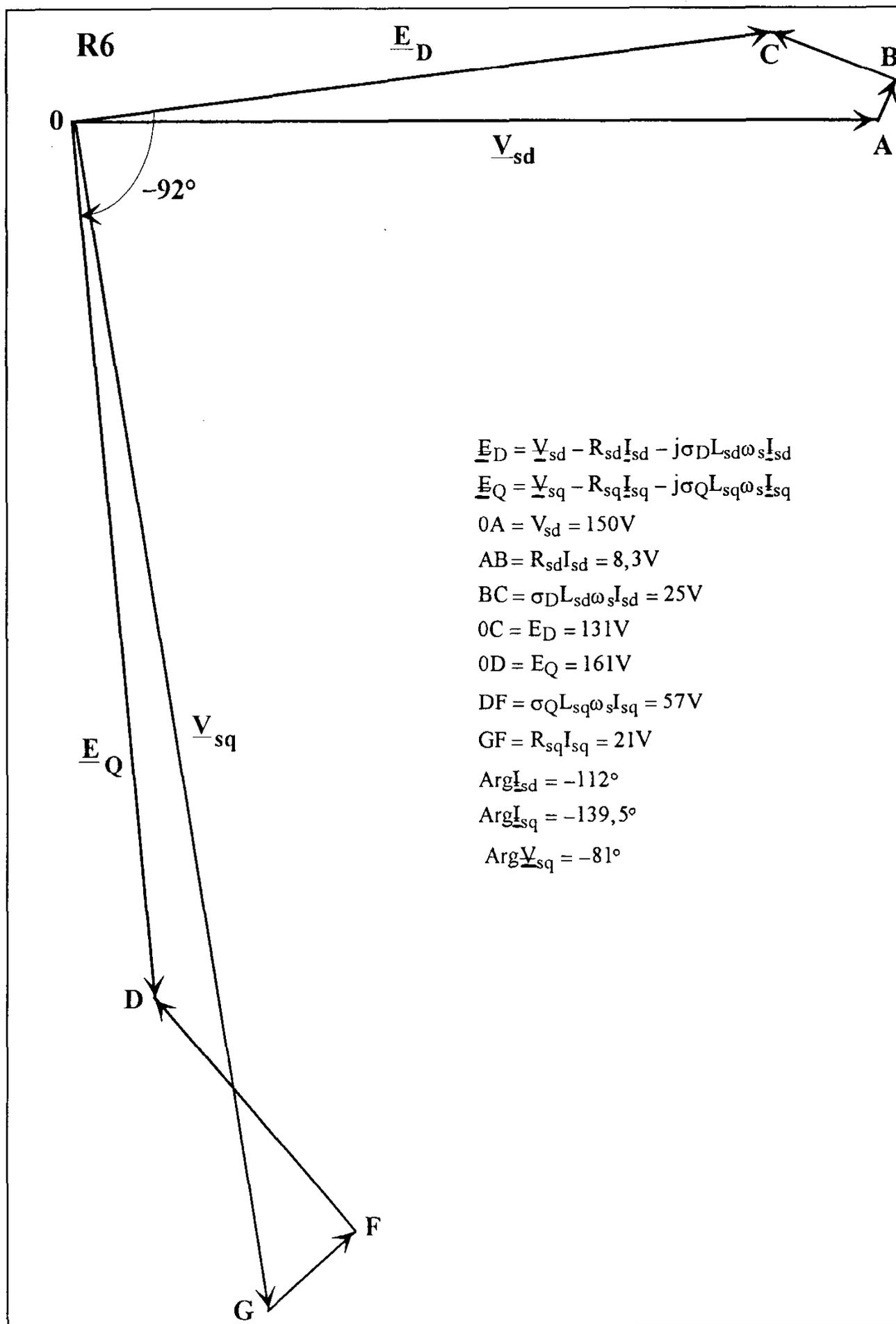
$$\frac{E_D}{E_Q} = \frac{131}{161} = 0,813 \text{ diffère d'un peu plus de } 6\% \text{ de la valeur théorique } a = 0,866.$$

e) Construction du diagramme des tensions :

$$\vec{E}_D = \vec{V}_{sd} - R_{sd} \vec{I}_{sd} - \sigma_D L_{sd} \omega_s \vec{I}_{sd}$$

$$\vec{E}_Q = \vec{V}_{sq} - R_{sq} \vec{I}_{sq} - \sigma_Q L_{sq} \omega_s \vec{I}_{sq}$$

Les valeurs efficaces et les arguments de toutes les tensions étant connus, on obtient finalement le diagramme tracé sur la feuille (R6),



III-2. Expression complexe du couple

Partant de l'expression :

$$C_e = k_{DQ}(i'_{rd} i_{sq} - i'_{rq} i_{sd})$$

il s'agit en premier lieu d'écrire un produit de grandeurs sinusoïdales de même fréquence en fonction des amplitudes complexes.

$$\begin{aligned} i'_{rd} i_{sq} &= 2I'_{rd} I_{sq} \cos(\omega_s t - \psi_{rd}) \cos(\omega_s t - \psi_{sq}) \\ &= I'_{rd} I_{sq} [\cos(\psi_{sq} - \psi_{rd}) + \cos(2\omega_s t - \psi_{rd} - \psi_{sq})] \\ &= \text{Partie réelle} \left[\underline{I}'_{rd} \underline{I}^*_{sq} + \underline{I}'_{rd} \underline{I}_{sq} e^{2j\omega_s t} \right] \end{aligned}$$

d'où

$$C_e = k_{DQ} \cdot \text{Partie réelle} \left[(\underline{I}'_{rd} \underline{I}^*_{sq} - \underline{I}'_{rq} \underline{I}^*_{sd}) + (\underline{I}'_{rd} \underline{I}_{sq} - \underline{I}'_{rq} \underline{I}_{sd}) e^{2j\omega_s t} \right]$$

↓
couple fluctuant de pulsation $2\omega_s$

Le couple électromagnétique est indépendant du temps si le couple fluctuant est nul, soit :

$$\underline{I}'_{rd} \underline{I}_{sq} - \underline{I}'_{rq} \underline{I}_{sd} = 0$$

III-3

III-3.1

On suppose le réglage suivant :

$$\underline{I}_{sq} = -ja \underline{I}_{sd}$$

et les équations rotoriques sont alors écrites en tenant compte de cette hypothèse de réglage :

$$\begin{aligned} (1 + jT_r \omega_s) a \underline{I}'_{rd} + \omega T_r \underline{I}'_{rq} &= -ja T_r (\omega_s - \omega) \underline{I}_{sd} \\ -a \omega T_r \underline{I}'_{rd} + (1 + jT_r \omega_s) \underline{I}'_{rq} &= -a T_r (\omega_s - \omega) \underline{I}_{sd} \end{aligned}$$

a)

par élimination de \underline{I}_{sd} , on déduit :

$$\underline{I}'_{rq} = -ja \underline{I}'_{rd}$$

b)

puis par une nouvelle élimination, celle de \underline{I}'_{rq} dans la première équation rotorique, on tire :

$$\underline{I}'_{rd} = \frac{-jT_r (\omega_s - \omega) \underline{I}_{sd}}{1 + jT_r (\omega_s - \omega)}$$

c) on vérifie à l'aide de l'hypothèse et du résultat a) que le couple fluctuant est nul puisqu'alors : $\underline{I}'_{rd} \underline{I}_{sq} - \underline{I}'_{rq} \underline{I}_{sd} = 0$.

d) pour montrer que les fmm sont tournantes circulaires, il suffit de montrer qu'elles sont sinusoïdales, de même amplitude et en quadrature.

$$\varepsilon_{sd} = k_{sd} i_{sd} ; \varepsilon_{sq} = k_{sq} i_{sq} \text{ avec : } k_{sd} = a \cdot k_{sq} \text{ et } \underline{I}_{sq} = -ja \underline{I}_{sd}$$

soit donc :

$$\varepsilon_{sd} = k_{sd} I_{sd} \sqrt{2} \cos(\omega_s t - \psi_{sd}) \text{ et } \varepsilon_{sq} = k_{sd} I_{sd} \sqrt{2} \sin(\omega_s t - \psi_{sd})$$

de même au rotor :

$$\varepsilon_{rd} = k_r i_{rd} = k_{rd} i'_{rd} \text{ et } \varepsilon_{rq} = k_r i_{rq} = k_{rq} i'_{rq}$$

$$\text{or, } k_{rd} = \frac{M_D}{L_r} k_r \text{ et } k_{rq} = \frac{M_Q}{L_r} k_r = \frac{k_{rd}}{a}$$

Comme $\underline{I}'_{rq} = -ja \underline{I}'_{rd}$, on peut donc écrire :

$$\varepsilon_{rd} = k_{rd} I'_{rd} \sqrt{2} \cos(\omega_s t - \psi_{rd}) \text{ et } \varepsilon_{rq} = k_{rd} I'_{rd} \sqrt{2} \sin(\omega_s t - \psi_{rd})$$

III-3.2

III-3.2.1

Partons de l'expression complexe du couple :

$$C_e = k_{DQ} \text{Partie réelle} \left(\underline{I}'_{rd} \underline{I}^*_{sq} - \underline{I}'_{rq} \underline{I}^*_{sd} \right)$$

et exprimons les courants en fonction de I_{sd} :

$$\underline{I}'_{sq} = ja \underline{I}'_{sd}, \text{ soit } \underline{I}^*_{sq} = ja \underline{I}^*_{sd}$$

$$\underline{I}'_{rq} = -ja \underline{I}'_{rd}, \text{ soit } \underline{I}^*_{rq} = ja \underline{I}^*_{rd}$$

$$\text{or : } \underline{I}'_{rd} = -jK \underline{I}_{sd} \text{ avec } K = \frac{T_r \omega_r}{1 + jT_r \omega_r}$$

On déduit :

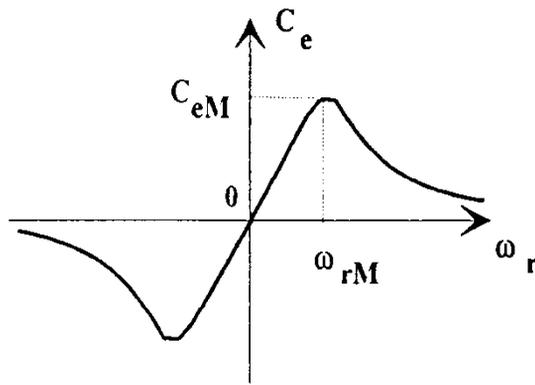
$$\boxed{C_e = 2ak_{DQ} \text{Partie réelle} \left[K \underline{I}_{sd} \underline{I}^*_{sd} \right]}$$

$$\text{et finalement : } C_e = 2ak_{DQ} I_{sd}^2 \frac{T_r \omega_r}{(1 + T_r^2 \omega_r^2)}$$

III-3.2.2

La fonction $C_e(\omega_r)$ est du type : $\frac{x}{x^2 + 1}$, nulle pour $x=0$ et à l'infini, symétrique par rapport à l'origine et maximale (valeur 1/2) pour $x=1$, d'où :

$$\boxed{\omega_{rM} = 1/T_r \text{ et } C_{eM} = ak_{DQ} I_{sd}^2}$$



Application numérique : $\omega_{rM} = 20 \text{ rad / s}$; $C_{eM} = 0,53 I_{sd}^2$

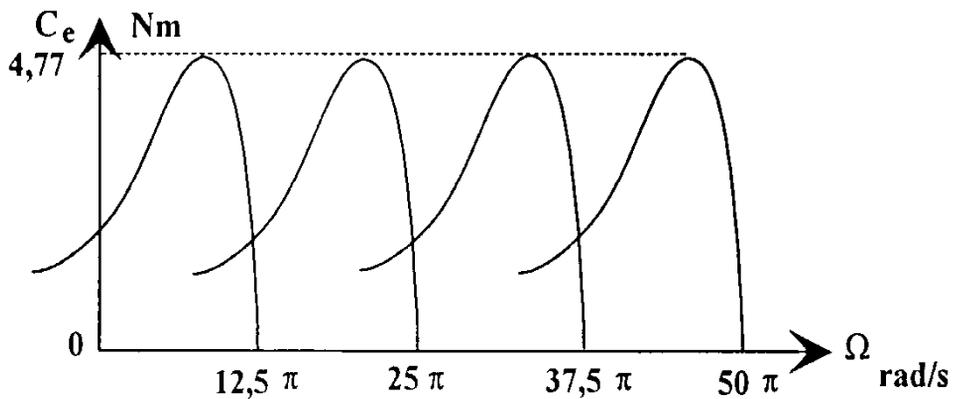
III-3.2.3

Sachant que $\omega_r = \omega_s - \omega = p(\Omega_s - \Omega)$, on peut écrire le couple en fonction de la vitesse :

$$C_e = 2ak_{DQ} p I_{sd}^2 \frac{T_r(\Omega_s - \Omega)}{1 + [pT_r(\Omega_s - \Omega)]^2}$$

à Ω_s réglable, les points de même valeur de couple se déduisent par la translation $\Delta\Omega = \Delta\Omega_s$, car $\Omega_s - \Omega$ est constant : la caractéristique couple-vitesse se translate.

Application numérique : $I_{sd} = 3 \text{ A}$; $C_{eM} = 4,77 \text{ Nm}$
 $\Omega_s - \Omega_M = \omega_{rM} / p = 10 \text{ rad / s}$



Rendement rotorique au maximum de couple :

$$\eta_{rM} = 1 - \frac{P_{jr}}{P_T} = \frac{\Omega_M}{\Omega_s} = 1 - \frac{10}{\Omega_s}, \text{ d'où le tableau :}$$

Ω_M (rad/s)	147	107,8	68,5	29,2
rendement %	93,6	91,5	87,3	74,5

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve C : Problème d'Électricité, d'Électronique,
d'Électrotechnique et d'Automatique - Session : 1995

PARTIE A

MODÉLISATION

I. Modèle du 1^{er} ordre

$$1. \quad F(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau p} = \frac{S(p)}{E(p)} \quad \Rightarrow \quad \tau \cdot p \cdot S(p) + S(p) = \kappa \cdot E(p)$$

Par inversion de Laplace, il vient :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \kappa \cdot e(t)$$

$$2. \quad \text{Si} \quad e(t) = E \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = E \times \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \quad S(p) = F(p) \cdot E(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau p} \times \frac{E}{p} = \frac{\frac{\kappa E}{\tau}}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right) \cdot p}$$

Par décomposition de S(p) en éléments simples, il vient :

$$S(p) = \frac{A}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{B}{p}$$

par identification $B = \kappa E$ et $A = -\kappa E$

$$\Rightarrow \quad S(p) = \frac{-\kappa E}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{\kappa E}{p} \quad \Rightarrow \quad s(t) = -\kappa E e^{-t/\tau} u(t) + \kappa E \cdot u(t)$$

\Rightarrow

$$s(t) = \kappa E \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot u(t)$$

N.B. : On peut, bien sûr, résoudre l'équation différentielle du 1. avec les C.I. $s(0) = 0$ ou admettre la réponse (connue) indicielle d'un premier ordre.

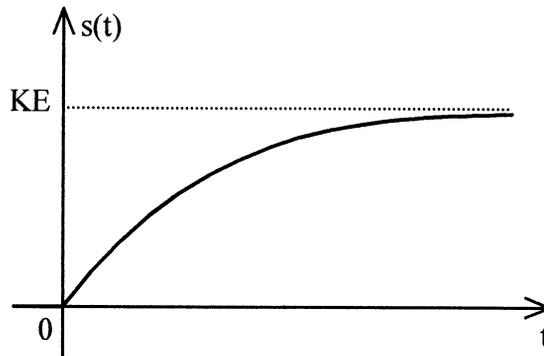
$$3. \quad \text{Pour} \quad t = \infty \quad \Rightarrow \quad s(\infty) = \kappa E$$

à partir du résultat du 2. On peut aussi utiliser le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\kappa E}{1 + \tau p} = \kappa E$$

4. Le graphe de $s(t)$ est fourni ci-dessous :

$$s(t) = \kappa E \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \cdot u(t)$$



5.
$$s(\tau) = \kappa E (1 - e^{-1}) = \kappa E \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Application Numérique :

$$s(\tau) = 0,6321 \cdot \kappa E$$

6. $s(t) = \kappa E \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ pour $t \geq 0 \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \kappa E \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow \left[\frac{ds(t)}{dt} \right]_{t=0} = \kappa E \times \frac{1}{\tau}$$

L'équation de la tangente passant par l'origine est donc :

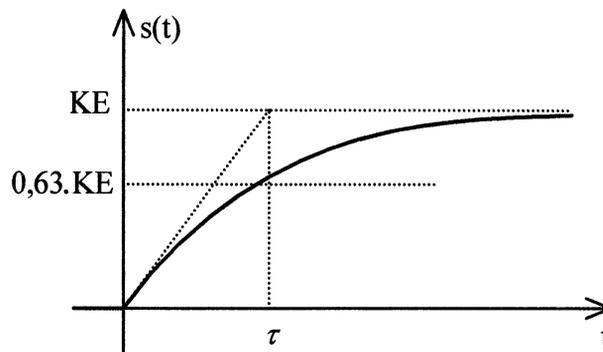
$$y_1(t) = \kappa E \times \frac{t}{\tau}$$

7. $y = s(\infty) = \kappa E \Rightarrow$ on résout $\kappa E = \kappa E \times \frac{t}{\tau}$

\Rightarrow

$$t = \tau$$

8. Si on complète la figure de la question 4 avec les résultats précédents, on voit que :



- κ peut être déterminé par $\kappa = \frac{s(\infty)}{e(\infty)}$,

- τ peut être déterminé par :

- la méthodes «dite des 63 %»,
- la méthode de la tangente à l'origine.

9. Si
$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^2}$$

La résolution directe de l'équation différentielle est maintenant plus difficile et il faut passer par la transformée de Laplace :

$$S(p) = F(p) \cdot E(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau p} \times \frac{a}{p^2} = \frac{\kappa a / \tau}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right) p^2}$$

Décomposition en éléments simples (\exists un pôle double $p = 0$) :

$$S(p) = \frac{A}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p} \quad \text{par identification} \quad A = \kappa a \tau, B = \kappa a, C = -\kappa a \tau$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{\kappa a \tau}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{\kappa a}{p^2} - \frac{\kappa a \tau}{p}$$

Par inversion il vient : $s(t) = \kappa a \tau e^{-t/\tau} \cdot u(t) + \kappa a \cdot t \cdot u(t) - \kappa a \tau \cdot u(t)$

soit

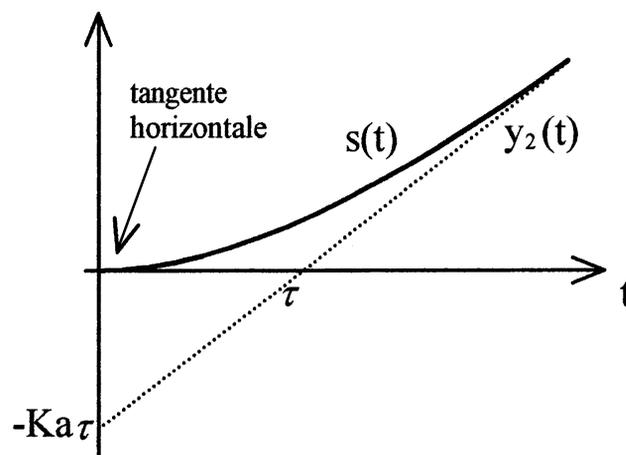
$$s(t) = \kappa a \left[(t - \tau) + \tau e^{-t/\tau} \right] \cdot u(t)$$

10. $s(t)$ est de la forme $s(t) = y_2(t) + \varepsilon(t)$

avec $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ $t \rightarrow \infty$ avec $y_2(t) = \kappa a (t - \tau) \cdot u(t)$

$$\varepsilon(t) = \kappa a \tau e^{-t/\tau} \cdot u(t)$$

11. Cf. graphe.



12. D'après l'équation de l'asymptote $y_2(t)$, elle coupe l'axe horizontal à :

$$t = \tau$$

De plus son ordonnée à l'origine vaut :

$$- \kappa a \tau$$

En prolongeant $s(t)$, lorsque $t \rightarrow \infty$, on détermine donc l'asymptote. On en déduit donc τ , puis $-\kappa a \tau$.

Connaissant a et τ , on en déduit alors κ .

N.B. : La méthode ci-dessus est moins brutale, pour un procédé physique réel, que l'application d'un échelon.

II. Modèle du 2^e ordre

$$13. \quad F(p) = \frac{\kappa}{1 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} = \frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2} p^2 S(p) + \frac{2\lambda}{\omega_0} p \cdot S(p) + S(p) = \kappa \cdot E(p)$$

par inversion de Laplace (rappel : les C.I. sont nulles), il vient :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \kappa \cdot e(t)$$

$$14. \quad e(t) = E \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E}{p}$$

Il est raisonnable d'utiliser la transformée de Laplace, en décomposant $S(p)$ en éléments simples. Le cas $\lambda = 1$ facilite le calcul.

$$S(p) = F(p) \cdot E(p) = \frac{\kappa}{1 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} \times \frac{E}{p} = \frac{\kappa \cdot \omega_0^2 \cdot E}{p(p^2 + 2\lambda \omega_0 p + \omega_0^2)}$$

Pour $\lambda = 1$, les pôles de $F(p)$ sont un pôle double $p = -\omega_0$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p + \omega_0)^2} + \frac{C}{p + \omega_0}$$

par identification : $A = \kappa E$, $B = -\kappa E \omega_0$, $C = -\kappa \cdot E$

$$\Rightarrow S(p) = \kappa E \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_0} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2} \right]$$

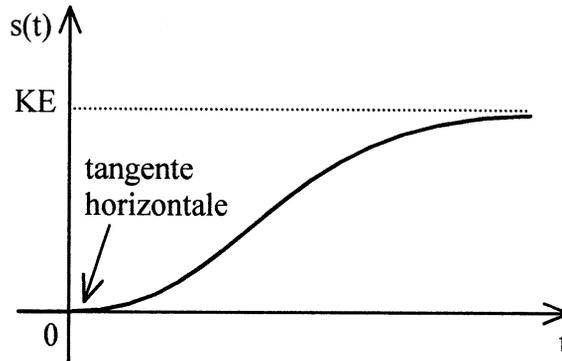
Par inversion directe, (cf. table), il vient :

$$s(t) = \kappa E \left(1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 \cdot e^{-\omega_0 t} \cdot t \right) \cdot u(t)$$

soit :
$$s(t) = \kappa E \left[1 - e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 \cdot t) \right] \cdot u(t)$$

\Rightarrow
$$B(t) = 1 + \omega_0 \cdot t$$

15. L'allure de $s(t)$ est de forme apériodique (cf. courbe ci-dessous).



16.
$$\boxed{\text{NON}}$$

17.
$$F(p) = \frac{\kappa}{1 + \frac{2}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{\kappa}{\left(\frac{p}{\omega_0} + 1\right)^2}$$

de la forme
$$\boxed{F(p) = \frac{\kappa}{(1 + \tau p)^2} \text{ avec } \tau = \frac{1}{\omega_0}}$$

18. On procède par identification directe :

$$F(p) = \frac{\kappa}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + 1} = \frac{\kappa}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{\kappa}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2) p + 1}$$

On doit résoudre :

$$\begin{cases} \tau_1 + \tau_2 = \frac{2\lambda}{\omega_0} = S \\ \tau_1 \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2} = P \end{cases}$$

$\Rightarrow \tau_1$ et τ_2 sont solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 - S X + P = 0 \quad \text{soit} \quad X^2 - \frac{2\lambda}{\omega_0} X + \frac{1}{\omega_0^2} = 0$$

dont le discriminant vaut $\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} (\lambda^2 - 1)$.

Dans le cas $\lambda > 1$, il est > 0 donc on a deux racines réelles τ_1 et τ_2 :

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0} \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0} \left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)$$

Par continuité, on vérifie que $\lambda = 1$ redonne $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{\omega_0}$.

19. $S(p) = \frac{\kappa}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)p}$ présente trois pôles réels négatifs ou nuls \Rightarrow par inversion de Laplace, on obtient des exponentielles décroissantes, sans terme pulsatoire.

Comme pour la question 16, cette courbe ne permet pas facilement de déterminer λ et ω_0 .

III. Modèle de BROÏDA

20.
$$F(p) = \frac{\kappa e^{-Tp}}{1 + \tau p} = \frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow S(p) [1 + \tau p] = \kappa \cdot E(p) \cdot e^{-Tp}$$

ou
$$\tau p S(p) + S(p) = \kappa \cdot E(p) \cdot e^{-Tp}$$

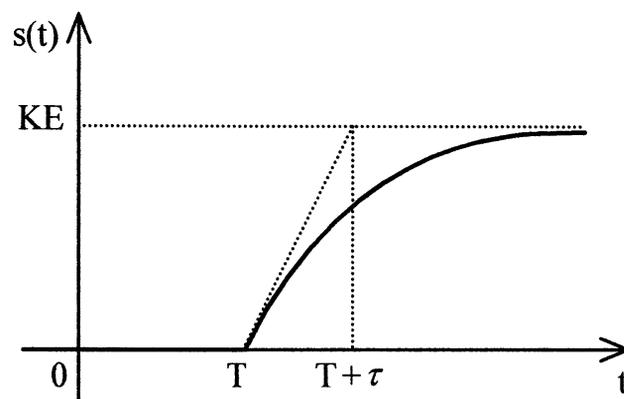
Par inversion de Laplace, en utilisant la propriété des fonctions retardées :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \kappa \cdot e^{-(t-T)}$$

21. D'après les résultats de la question 2, et les propriétés des fonctions retardées :

\Rightarrow
$$s(t) = \kappa \cdot E \left(1 - e^{-\left(\frac{t-T}{\tau}\right)} \right) u(t-T)$$

22. On obtient la courbe ci-dessous :



23. T est directement lu sur l'enregistrement, κ et τ sont déterminés à partir du point de décollement, comme pour un premier ordre (question 8).

IV. Modèle de STREJC

24.
$$S(p) = \frac{\kappa}{(1 + \tau p)^n} \times \frac{E}{p} = \frac{\frac{\kappa E}{\tau^n}}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^n \cdot p}$$

$p = -\frac{1}{\tau}$ est pôle multiple.

Si on décompose en éléments simples :

$$S(p) = \left[\frac{A}{p} + \frac{B_1}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^1} + \frac{B_2}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^2} + \dots + \frac{B_n}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^n} \right]$$

On calcule A par la technique des résidus :

$$A = \left[p \cdot S(p) \right]_{p=0} = \frac{\kappa E}{\tau^n} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^n} = \kappa E$$

On calcule ensuite les B_i pour $n, n - 1, n - 2, n - 3$ et on fait apparaître rapidement une formule récurrente.

Par les résidus :

$$B_n = \left[\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^n S(p) \right]_{p=-\frac{1}{\tau}} = 1 \times \frac{\kappa E}{\tau^n} \times \frac{1}{\left(-\frac{1}{\tau}\right)}$$

\Rightarrow

$$\boxed{B_n = -\frac{\kappa E}{\tau^{n-1}}}$$

$$B_{n-1} = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dp} \left[\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^n S(p) \right] \right]_{p=-\frac{1}{\tau}} = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dp} \left[\frac{\kappa E}{\tau^n} \times \frac{1}{p} \right] \right]_{p=-\frac{1}{\tau}}$$

\Rightarrow

$$B_{n-1} = \frac{1}{1!} \left[\frac{\kappa E}{\tau^n} \times \left(\frac{-1}{p^2}\right) \right]_{p=-\frac{1}{\tau}}$$

\Rightarrow

$$\boxed{B_{n-1} = -\frac{\kappa E}{\tau^{n-2}}}$$

De même $B_{n-2} = -\frac{\kappa E}{\tau^{n-3}}$, $B_{n-3} = -\frac{\kappa E}{\tau^{n-4}}$

$$\boxed{B_{n-k} = -\frac{\kappa E}{\tau^{n-k-1}}}$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{\kappa E}{p} - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\kappa E}{\tau^{i-1}} \times \frac{1}{\left(p + \frac{1}{\tau}\right)^i}$$

Par inversion :

$$s(t) = \left[\kappa E - \kappa E e^{-t/\tau} - \frac{\kappa E}{\tau} \cdot t \cdot e^{-t/\tau} - \frac{\kappa E}{\tau^2 2!} \cdot t^2 \cdot e^{-t/\tau} \dots - \frac{\kappa E}{(n-1)! \tau^{n-1}} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-t/\tau} \right] \cdot u(t)$$

$$\Rightarrow s(t) = \kappa E \left[1 - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\tau^{i-1}} \cdot \frac{1}{(i-1)!} \cdot t^{i-1} \cdot e^{-t/\tau} \right] \cdot u(t)$$

25. On utilise le résultat ci-dessus ou, astucieusement, on reprend le résultat de la question 14, avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$.

$$\Rightarrow s(t) = \kappa E \left[1 - e^{-t/\tau} - \frac{1}{\tau} \cdot t \cdot e^{-t/\tau} \right] \cdot u(t)$$

$$\Rightarrow s(t) = \kappa E \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] \cdot u(t)$$

26. Au point d'inflexion I, la dérivée seconde $\frac{d^2s(t)}{dt^2}$ s'annule.

$$\frac{ds(t)}{dt} = \kappa E \left[-\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \right] = \kappa E \times \frac{t}{\tau^2} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \kappa E \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \text{ qui s'annule pour } t_1 = \tau$$

L'ordonnée correspondante est $s(t_1) = \kappa E \left[1 - 2 \times \frac{1}{e} \right]$

$$\Rightarrow s(t_1) = \kappa E \left(1 - \frac{2}{e} \right) = 0,264 \cdot \kappa E$$

27. L'équation de la droite tangente est de la forme :

$$y_3(t) - y_{(I)} = y'_{(I)} (t - t_1)$$

$$\Rightarrow y_3(t) = \kappa E \left(1 - \frac{2}{e} \right) + \kappa E \cdot \frac{\tau}{\tau^2} \cdot \frac{1}{e} (t - \tau)$$

$$\Rightarrow y_3(t) = \kappa E \left(\frac{t}{\tau \cdot e} + 1 - \frac{3}{e} \right)$$

28. T_u est l'abscisse du point d'ordonnée $y_3(t) = 0 \Rightarrow y_3(T_u) = 0$

$$\Rightarrow \frac{T_u}{\tau \cdot e} + 1 - \frac{3}{e} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_u = \tau (3 - e)$$

29. T_b est l'abscisse du point d'ordonnée $y_3(T_b) = \kappa E$

$$\Rightarrow \kappa E = \kappa E \left(\frac{T_b}{\tau e} + 1 - \frac{3}{e} \right) \quad \Rightarrow \quad T_b = 3 \cdot \tau$$

Par définition $T_a = T_b - T_u = 3\tau - \tau(3 - e) \Rightarrow T_a = e \cdot \tau$

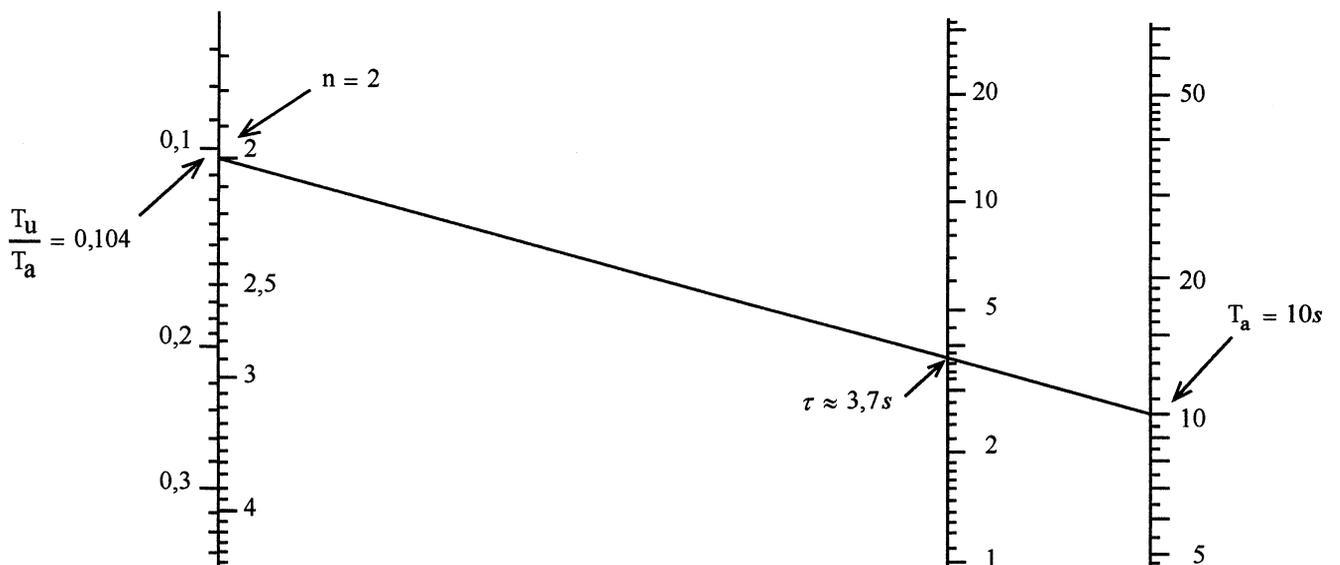
30. $\frac{T_u}{T_a} = \frac{3 - e}{e} \approx 0,104$ $\frac{T_a}{\tau} = e$ $\frac{T_u}{\tau} = 3 - e \approx 0,282$

31. Pour $T_a = 10$ s, par application de $T_a = e \cdot \tau$ (valable pour $n = 2$) on trouve :

$$\tau = \frac{T_a}{e} \quad \Rightarrow \quad \tau = 3,679 \text{ s}$$

32. Sur le nomogramme fourni en annexe, on constate que $\frac{T_u}{T_a}$ sur l'axe de gauche correspond à $n = 2 \Rightarrow$ Cet axe double permet de déterminer n à partir de $\frac{T_u}{T_a}$.

Pour $T_a = 10$ s et $\tau = 3,679$ s, on constate que ces trois points sont alignés, d'où le mode d'utilisation du nomogramme : T_a expérimental + $\frac{T_u}{T_a}$ permettent de trouver τ par alignement.



V. Représentation d'état

$$33. \quad F(p) = \frac{\kappa}{(1 + \tau p)^2} = \frac{S(p)}{E(p)} \quad \Rightarrow \quad S(p) = [1 + \tau p]^2 = \kappa \cdot E(p)$$

$$\Rightarrow \quad \tau^2 p^2 S(p) + 2 \tau p S(p) + S(p) = \kappa \cdot E(p)$$

Par inversion

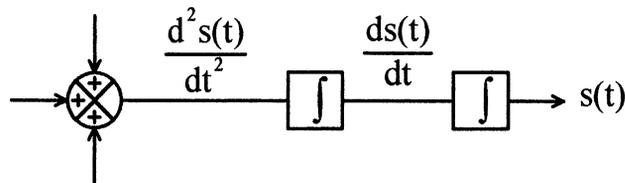
$$\tau^2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \kappa \cdot e(t)$$

34. L'équation différentielle précédente peut s'écrire :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \frac{\kappa}{\tau^2} \cdot e(t) - \frac{2}{\tau} \frac{ds(t)}{dt} - \frac{1}{\tau^2} s(t)$$

Conformément au schéma fourni, on retrouve $\frac{ds(t)}{dt}$ et $\frac{d^2 s(t)}{dt^2}$ devant les deux intégrateurs. On vérifie que

$\frac{d^2 s(t)}{dt^2}$ est une combinaison linéaire de $e(t)$, $\frac{ds(t)}{dt}$ et $s(t)$.



Par identification :

$$\kappa_1 = \frac{\kappa}{\tau^2}$$

$$\kappa_2 = \frac{-2}{\tau}$$

$$\kappa_3 = \frac{-1}{\tau^2}$$

35. On transforme l'équation différentielle initiale du 2^e ordre en un système différentiel du 1^{er} ordre.

L'équation différentielle peut s'écrire :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\tau^2} \cdot s(t) - \frac{2}{\tau} \frac{ds(t)}{dt} + \frac{\kappa}{\tau^2} e(t)$$

de plus :

$$\frac{ds(t)}{dt} = \phi \cdot s(t) + 1 \frac{ds(t)}{dt} + \phi \cdot e(t)$$

Matriciellement, on peut donc écrire :

$$\begin{bmatrix} \frac{ds(t)}{dt} \\ \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{2}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi \\ \frac{\kappa}{\tau^2} \end{bmatrix} \cdot e(t)$$

soit, avec les notations proposées :

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{2}{\tau} \end{bmatrix}}_{[A]} \cdot \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\kappa}{\tau^2} \end{bmatrix}}_{[B]} \cdot e(t)$$

36. $s(t)$ peut s'écrire :

$$s(t) = 1 s \cdot s(t) + \phi \frac{ds(t)}{dt} + \phi \cdot e(t)$$

c'est-à-dire

$$s(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \phi \end{bmatrix}}_{[C]} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix}}_{[D]} \cdot e(t)$$

37. Devant chaque intégrateur, on a respectivement les signaux $\frac{dz(t)}{dt}$ ou $\frac{ds(t)}{dt}$.

Pour la première boucle, on peut écrire :

$$\frac{dz(t)}{dt} \times \frac{1}{\kappa_5} = \kappa_4 \cdot e(t) - z(t) \quad \text{ou} \quad \frac{dz(t)}{dt} = \kappa_4 \cdot \kappa_5 \cdot e(t) - \kappa_5 \cdot z(t)$$

Pour la deuxième boucle, on peut écrire :

$$\frac{ds(t)}{dt} \times \frac{1}{\kappa_6} = z(t) - s(t) \quad \text{ou} \quad \frac{ds(t)}{dt} = \kappa_6 \cdot z(t) - \kappa_6 \cdot s(t)$$

de cette deuxième équation, on tire : $z(t) = \frac{1}{\kappa_6} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$

qui, par dérivation, donne : $\frac{dz(t)}{dt} = \frac{1}{\kappa_6} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt}$

En remplaçant $\frac{dz(t)}{dt}$ par son expression de la première équation, il vient :

$$\frac{1}{\kappa_6} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt} = \kappa_4 \cdot \kappa_5 \cdot e(t) - \kappa_5 \left[\frac{1}{\kappa_6} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) \right]$$

↓
z(t)

⇒

$$\frac{1}{\kappa_5 \kappa_6} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt} \left(\frac{1}{\kappa_5} + \frac{1}{\kappa_6} \right) + s(t) = \kappa_4 \cdot e(t)$$

qui est bien une équation différentielle du deuxième ordre.

38. Par identification avec
$$\tau^2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = \kappa \cdot e(t)$$

il vient :

$$\boxed{\kappa_4 = \kappa} \quad \boxed{\kappa_5 = \kappa_6 = \frac{1}{\tau}}$$

39. Si on reprend le système des deux équations de la question 37, à savoir :

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = \kappa_4 \cdot \kappa_5 \cdot e(t) - \kappa_5 \cdot z(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} = \kappa_6 \cdot z(t) - \kappa_6 \cdot s(t) \end{cases}$$

On peut l'écrire :

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = -\kappa_6 \cdot s(t) + \kappa_6 \cdot z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = \phi \cdot s(t) - \kappa_5 \cdot z(t) + \kappa_5 \cdot \kappa_4 \cdot e(t) \end{cases}$$

Compte tenu des résultats de la question 38 :

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \cdot s(t) + \frac{1}{\tau} z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = \phi \cdot s(t) - \frac{1}{\tau} z(t) + \frac{\kappa}{\tau} e(t) \end{cases}$$

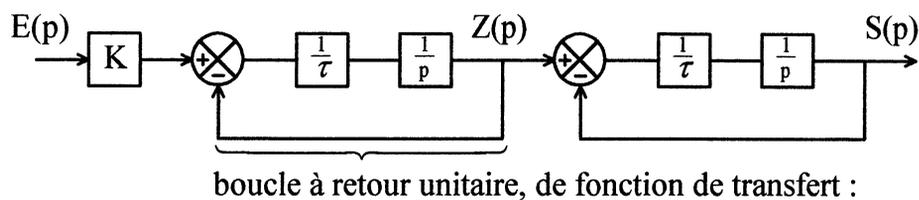
soit :

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \frac{ds(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{\tau} & +\frac{1}{\tau} \\ \phi & -\frac{1}{\tau} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} s(t) \\ z(t) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\kappa}{\tau} \end{array} \right] \cdot e(t) \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ \dot{y} \qquad \qquad [A'] \qquad \qquad y \qquad \qquad [B'] \end{array}$$

et

$$s(t) = [1 \ \phi] \begin{bmatrix} s(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

40. Si on passe du schéma analogique temporel au schéma fonctionnel en notation de Laplace, il vient :



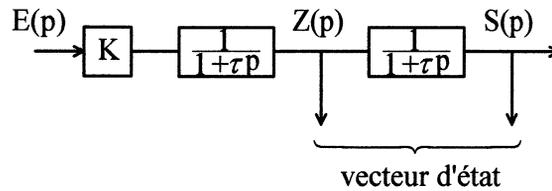
$$H_1(p) = \frac{\frac{1}{\tau p}}{1 + \frac{1}{\tau p}} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

De même pour $H_2(p)$.

⇒

$$H_1(p) = H_2(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

41. La représentation d'un modèle de STREJC sous forme de n systèmes du 1^{er} ordre en série permet d'avoir accès à un vecteur d'état du système global.



Ce résultat est généralisable à $n > 2$.

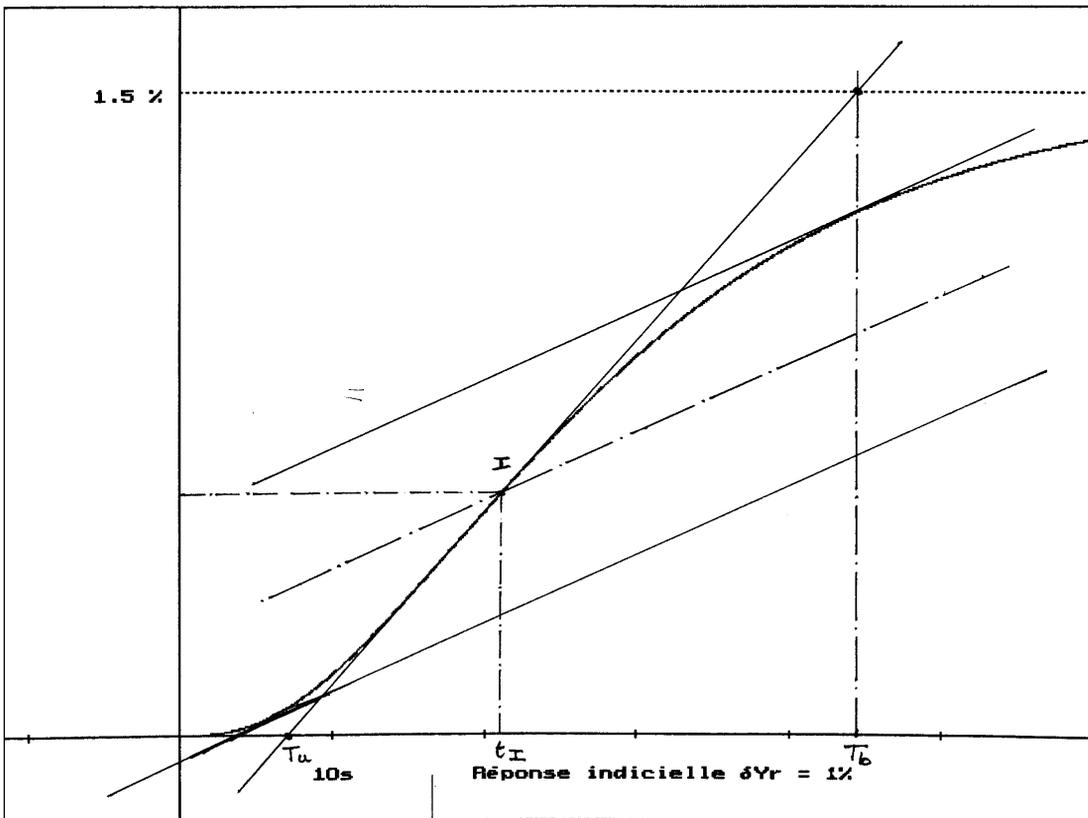
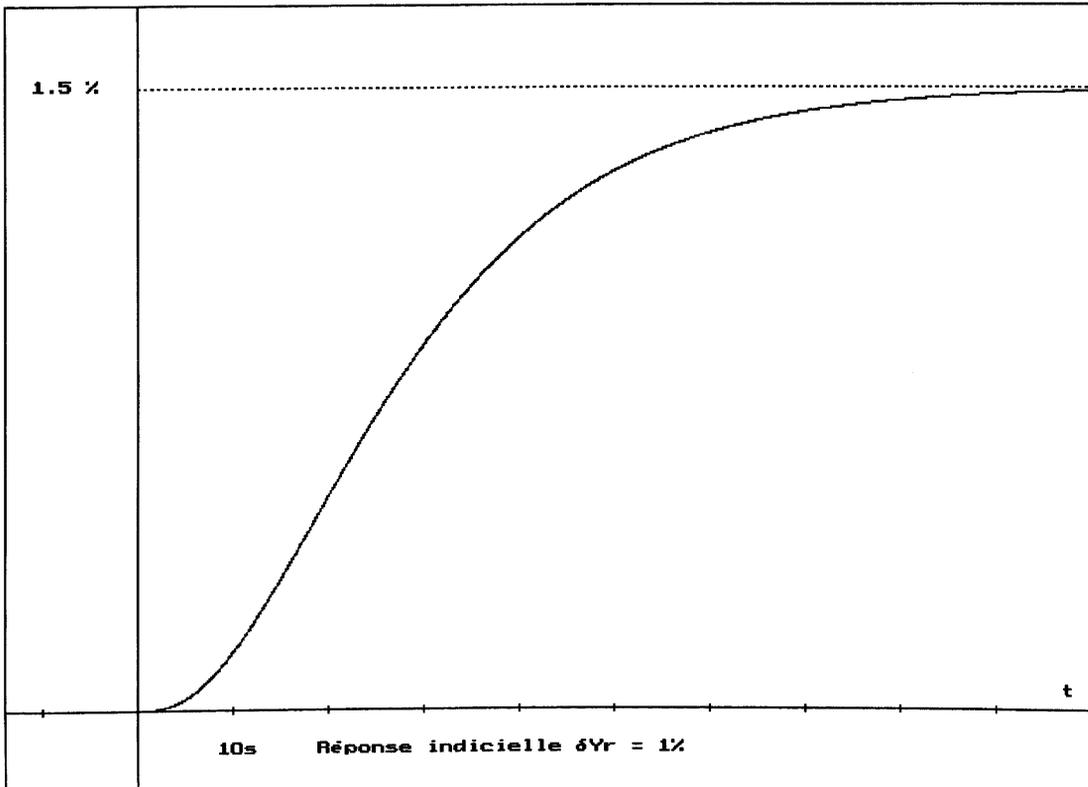
Ce vecteur d'état est plus intéressant que le vecteur d'état constitué des «variables de phase», $s(t)$, $\frac{ds(t)}{dt}$, ...
 $\frac{d^{n-1}s(t)}{dt^{n-1}}$.

En effet la simulation de la fonction de transfert (pour «reconstruire» le vecteur d'état) est très simple et on peut envisager facilement une commande par retour d'état. La matrice $[A]$ des équations d'état qui en résultent est dite «bloc de JORDAN».

PARTIE A

IDENTIFICATION

42.



I. Utilisation d'une méthode graphique

43. $\kappa = \frac{(\Delta s)_{t=\infty}}{(\Delta e)_{t=\infty}} \Rightarrow \kappa \approx \frac{1,5}{1} \Rightarrow \boxed{\kappa = 1,5}$

44. Le point d'inflexion est déterminé par la méthode des tangentes (cf. point d'équivalence en pH-métrie).

\Rightarrow $\boxed{t_1 \approx 21 \text{ s}}$
graphiquement $\boxed{s(t_1) \approx 0,564 \%}$

45. Cf. figure : graphiquement : $\boxed{T_u \approx 7,1 \text{ s}}$

$T_b \approx 44,35 \text{ s} \Rightarrow \boxed{T_a \approx 37,25 \text{ s}}$

46. $\frac{T_u}{T_a} \approx 0,1906$ cf. nomogramme $\boxed{n \approx 2,77}$

47. Par alignement, sur le nomogramme, avec $T_a \Rightarrow \boxed{\tau \approx 10,05 \text{ s}}$

II. Identification par la méthode des moments temporels

48. Par définition $S(p) = \mathbf{L} [s(t)] = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} s(t) dt$

Or e^{-pt} peut s'écrire : $e^{-p \cdot t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot \frac{t^n}{n!}$

Par substitution dans $S(p) \Rightarrow S(p) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} p^n s(t) \cdot dt$

En admettant ici que l'intégrale de la somme est la somme des intégrales

$\Rightarrow S(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^n \int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot s(t) dt$
 \downarrow
 $A_n(s)$

⇒

$$S(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^n A_n(s)$$

⇒ Les coefficients du développement en série de $S(p)$ sont, au signe près, les moments temporels.

$$A_0(s) = \int_0^{\infty} s(t) dt$$

représente **l'aire** sous la courbe $s(t)$.

$$A_1(s) = \int_0^{\infty} t \cdot s(t) dt$$

est lié à l'abscisse du centre de gravité de la surface précédente.

En effet :

$$t_G = \frac{\int_0^{\infty} t \cdot s(t) \cdot dt}{\int_0^{\infty} s(t) \cdot dt}$$

⇒

$$A_1(s) = t_G \cdot A_0(s)$$

$$A_2(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^2 \cdot s(t) dt$$

représente, au facteur 2 près, le **moment d'inertie** de la courbe $s(t)$ par rapport à l'axe vertical $t = 0$.

49. Si $g(t)$ est une fonction d'aire finie, on peut effectivement écrire :

$$G(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^n A_n(g)$$

si

$$g(t) = s(\infty) - s(t) \Rightarrow s(t) = s(\infty) - g(t)$$

donc

$$S(p) = \frac{s(\infty)}{p} - G(p)$$

car $s(\infty) = \text{cste} \Rightarrow$ sa transformée est $s(\infty) \times \frac{1}{p}$.

Or $G(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^n A_n(g) \Rightarrow$ Par substitution :

$$S(p) = \frac{1}{p} \left[s(\infty) - p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n(g) \right]$$

50. De la forme précédente, il vient :

$$S(p) = \frac{1}{p} \left[s(\infty) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot p^{n+1} \cdot A_n(g) \right]$$

Par décalage d'indice, on peut aussi bien noter :

$$S(p) = \frac{1}{p} \left[s(\infty) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_{n-1}(g) \right]$$

Par identification terme à terme avec :

$$S(p) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^n B_n(s)$$

que l'on peut écrire :

$$S(p) = \frac{1}{p} \left[B_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n p^n B_n(s) \right]$$

il vient :

$$B_0(s) = s(\infty) \quad \text{et} \quad B_n(s) = A_{n-1}(g) = A_{n-1}(s(\infty) - s(t))$$

\Rightarrow

$$B_n(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} g(t) \cdot dt$$

51. Par définition des moments $S(p)$, pour une fonction d'aire ∞ , on a :

$$S(p) = \frac{1}{p} \left[s(\infty) + (-1) \cdot p \cdot B_1(s) + p^2 B_2(s) + \dots \right]$$

Or dans le cas présent, $S(p) = \frac{1}{p} \times \frac{\kappa}{(1 + \tau p)^n}$ puisque $s(t)$ est assimilé à la réponse indicelle d'un système de STREJC.

Par identification des deux expressions de $S(p)$, il vient :

$$F(p) = s(\infty) + (-1) p \cdot B_1(s) + p^2 B_2(s) + \dots$$

Or $F(p) = \frac{\kappa}{(1 + \tau p)^n}$ peut se développer en série, au voisinage de $p = 0$:

$$F(p) = [F(p)]_{p=0} + p \left[\frac{dF(p)}{dp} \right]_{p=0} + \frac{p^2}{2!} \left[\frac{d^2F(p)}{dp^2} \right]_{p=0} + \dots$$

$$\Rightarrow F(p) = \kappa + p \dots$$

Par identification directe, il vient : $s(\infty) = B_0(s) = \kappa = [F(p)]_{p=0}$

52. Toujours par identification entre les deux expressions précédentes de $F(p)$, il vient :

$$(-1) \cdot B_1(s) = \left[\frac{dF(p)}{dp} \right]_{p=0}$$

$$\text{Or } \left[\frac{\kappa}{(1 + \tau p)^n} \right]' = - \frac{n(1 + \tau p)^{n-1} \times \tau \cdot \kappa}{(1 + \tau p)^{2n}} \text{ . En prenant } p = 0$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot B_1(s) = -n \tau \kappa \Rightarrow B_1(s) = n \cdot \tau \cdot \kappa = n \tau \cdot B_0(s)$$

$$\text{De même : } B_2(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2F(p)}{dp^2} \right]_{p=0}$$

$$\text{Or } \left[\frac{\kappa}{(1 + \tau p)^n} \right]'' = n \tau \left[\frac{(n+1)(1 + \tau p)^n \tau \kappa}{(1 + \tau p)^{2(n+1)}} \right] \text{ . En prenant } p = 0$$

$$\Rightarrow B_2(s) = \frac{n(n+1) \tau^2 \kappa}{2}$$

$$\text{On rappelle que } B_2(s) = \int_0^\infty t \cdot g(t) \cdot dt$$

$$53. B_1^2(s) = n^2 \tau^2 \kappa^2 \Rightarrow \frac{B_2(s)}{B_1^2(s)} = \frac{n(n+1) \tau^2 \kappa}{2 n^2 \tau^2 \kappa^2} = \frac{n+1}{2 n \cdot \kappa}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{2 \frac{B_2(s)}{B_1^2(s)} \kappa \cdot 1} \quad \text{ou} \quad n = \frac{1}{2 \cdot \frac{B_2(s)}{B_1^2(s)} \cdot B_0(s) - 1}$$

$$B_1(s) = n \tau \kappa \Rightarrow \tau = \frac{B_1(s)}{n \cdot \kappa} \text{ par substitution de } n \text{ et de } \kappa = B_0(s)$$

$$\Rightarrow \tau = 2 \frac{B_2(s)}{B_1(s)} - \frac{B_1(s)}{B_0(s)}$$

54. $g(t) = s(t_{21}) - s(t) = 1,494 - s(t) \Rightarrow$ tableau évident.

55. L'horizon temporel théorique d'intégration, pour les moments est $[0, \infty[$. En pratique on se ramène à $[0, 105 \text{ s}]$.

Pour $t_{21} = 105 \text{ s}$, $s(t)$ est stable et très proche de $s(\infty)$. On pourrait se contenter d'admettre $t = 80 \text{ s}$ comme limite de l'horizon d'intégration. Or si le calcul de $B_1(s)$ représente l'aire de $g(t)$, celui de $B_2(s)$ fait intervenir $t \cdot g(t)$. La multiplication par t donne un « poids » plus élevé à des valeurs négligeables. L'intérêt du modèle de STREJC (par rapport à des modèles polynomiaux plus sophistiqués) est de limiter les calculs à $B_2(s)$.

56. Par définition de la méthode des trapèzes :

$$C_1(s) = \frac{g(0) + g(t_1)}{2} \times h + \frac{g(t_1) + g(t_2)}{2} \times h + \dots + \frac{g(t_{n-1}) + g(t_n)}{2} \times h$$

$$\Rightarrow C_1(s) = h \left[\frac{g(0)}{2} + \frac{g(t_n)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n-1} g(t_i) \right]$$

57. A la machine

$$C_1(s) = 44,28$$

cf. programme PASCAL en annexe.

58. Par définition de la méthode des trapèzes, pour la fonction $t \cdot g(t)$:

$$C_2(s) = \frac{\phi g(0) + h g(t_1)}{2} \times h + \frac{h \cdot g(t_1) + 2h g(t_2)}{2} \cdot h + \dots + \frac{(n-1) h g(t_{n-1}) + n h g(t_n)}{2} \cdot h$$

$$\Rightarrow C_2(s) = \frac{h^2}{2} \left[n g(t_n) + \sum_{k=1}^{k=n-1} 2 \cdot k \cdot g(t_k) \right]$$

Bien évidemment $C_1(s)$ et $C_2(s)$ peuvent s'écrire en fonction de $s(t_i)$, mais l'écriture est plus lourde.

59. A la machine

$$C_2(s) = 890,60$$

cf. programme PASCAL en annexe.

60. Compte tenu de $B_0(s) = \kappa = 1,494$ $B_1(s) \approx C_1(s)$ et $B_2(s) \approx C_2(s)$, on obtient :

$$n \approx 2,8$$

$$\kappa = 1,494 \approx 1,5$$

$$\tau = 10,59 \text{ s}$$

valeurs très, très proches de la méthode graphique, qui se trouve ainsi validée.

On trouvera en annexe 1 une recopie d'exécution et en annexe 2 un listing du programme de calcul.

61. Le développement de $F(p) = \frac{\kappa}{(1 + \tau p)^n}$ en série est, au voisinage de 0 :

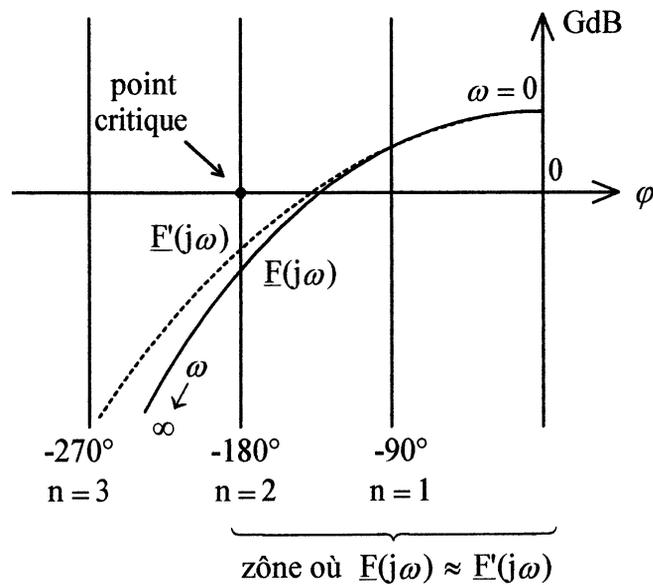
$$F(p) = \frac{\kappa}{(1 + \tau p)^n} = \kappa - n \tau \kappa p + \frac{n(n+1)\tau^2 \kappa}{2} p^2 + \dots$$

En se limitant aux deux premiers termes $F(p) \approx \kappa(1 - n\tau p)$ où l'on voit que n et τ interviennent par leur produit.

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 + \tau p)^n} \approx \frac{1}{(1 + \tau' p)^{n'}} \text{ à condition que } \boxed{n\tau = n'\tau'}$$

$$\Rightarrow n = 2,8 \text{ et } \tau = 10,58 \text{ s est équivalent à } \boxed{n = 3 \quad \tau = 9,88 \text{ s}}$$

Validité du concept



On peut raisonner dans le plan complexe (en notation de Black) pour la fonction de transfert isochrone $\underline{F}(j\omega)$ associée à $F(p)$ par $p = j\omega$.

Le domaine $p \approx 0$ correspond aux fréquences faibles.

Dans la mesure où $n > 2$ (strictement) le diagramme asymptotique tend vers $n \cdot (-90^\circ) < -180^\circ$.

Dans le domaine de pulsation intéressant ($\varphi > -180^\circ$), les deux lieux de Black sont pratiquement confondus.

Bien évidemment l'approximation est d'autant meilleure que n est élevé.

\Rightarrow Pour $n > 2$, il est donc pratiquement toujours possible (pour un système régulier modélisable sous forme de STREJC) de trouver un modèle équivalent du 3^e ordre.

Annexe 1

point n= 1	f(t) =	0.027	5
point n= 2	f(t) =	0.140	10
point n= 3	f(t) =	0.318	15
point n= 4	f(t) =	0.519	20
point n= 5	f(t) =	0.713	25
point n= 6	f(t) =	0.883	30
point n= 7	f(t) =	1.026	35
point n= 8	f(t) =	1.141	40
point n= 9	f(t) =	1.230	45
point n= 10	f(t) =	1.300	50
point n= 11	f(t) =	1.352	55
point n= 12	f(t) =	1.391	60
point n= 13	f(t) =	1.420	65
point n= 14	f(t) =	1.442	70
point n= 15	f(t) =	1.458	75
point n= 16	f(t) =	1.469	80
point n= 17	f(t) =	1.478	85
point n= 18	f(t) =	1.484	90
point n= 19	f(t) =	1.488	95
point n= 20	f(t) =	1.492	100
point n= 21	f(t) =	1.494	105

— Identification d'un modèle de STREJC —

Nombre de points pour le calcul: 22

Période d'échantillonnage : 5.00

Moments du signal de sortie :

Bo(s) = 1.494 B1(s) = 44.280 B2(s) = 890.600

Paramètres du modèle de STREJC :

n = 2.7994 K = 1.4940 $\tau = 10.5873$

Pour valider ce concept d'équivalence, le logiciel trace la courbe correspondant à n entier, ainsi que les points initiaux.

N.B. : Les points initiaux correspondent à $F(p) = \frac{1}{1+5p} \cdot \frac{1}{1+10p} \cdot \frac{1}{1+15p}$.

On vérifie d'ailleurs que :

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \approx n \cdot \tau$$

Annexe 2

```

PROGRAM Identification_par_les_moments;
USES crt;
CONST
  entree:array[0 .. 21] of real=(0,0.027,0.140,0.318,0.519,0.713,0.883,1.026,
  1.141,1.230,1.300,1.352,1.391,1.420,1.442,1.458,1.469,1.478,1.484,1.488,
  1.492,1.494);
  { fichier des points de s(t) }
VAR
  sortie:array[0 .. 21] of real; { tableau de s(∞)-s(t) }
  nb_points   : integer; { rang maximal du dernier point entré }
  n,K,Tau     : real;   { coefficients du modèle de STREJC }
  AoS,A1S,A2S : real;   { moments }
  h           : real;   { pas de calcul }

PROCEDURE Trois_moments(VAR K:integer;VAR h,BoS,B1S,B2S:real);
var
  i       : integer;   { compteur }
begin
  clrscr;
  BoS:=0;B1S:=0;B2S:=0;  { initialisation }
  K:=0;
  while K<=0 DO
    begin
      write('Nombre de points maxi, 0 compris ( entier positif:');
      readln(K);K:=K-1;    { car les indices débutent à 0 }
    end;
  h:=0;
  while h<=0 DO
    begin
      write('Période d"échantillonnage ( réel positif:');
      readln(h);
    end;
  BoS:=entree[K];
  For I:=0 to K DO
    sortie[I]:=entree[K]-entree[I];
  FOR I:=0 to K DO
    begin
      IF (I=0) or (I=K)THEN
        begin
          B1S:=B1S+sortie[I]/2;
          B2S:=B2S+I*sortie[I];
        end
      ELSE
        begin
          B1S:=B1S+sortie[I];
          B2S:=B2S+2*I*sortie[I];
        end;
    end;
  end; { of FOR }
  B1S:=B1S*h;
  B2S:=B2S*h*h/2;
  K:=K+1;    { pour retourner le nombre de points, 0 compris }
end; { of procedure Trois_moments }

```

```

PROCEDURE Coefficients(BoS,B1S,B2S : real;VAR n,K,Tau :real);
begin
  K:=BoS;
  n:=1/(2*B2S*BoS/B1S/B1S-1);
  Tau:=2*B2S/B1S-B1S/BoS;
end; { of procedure Coefficients }

```

```

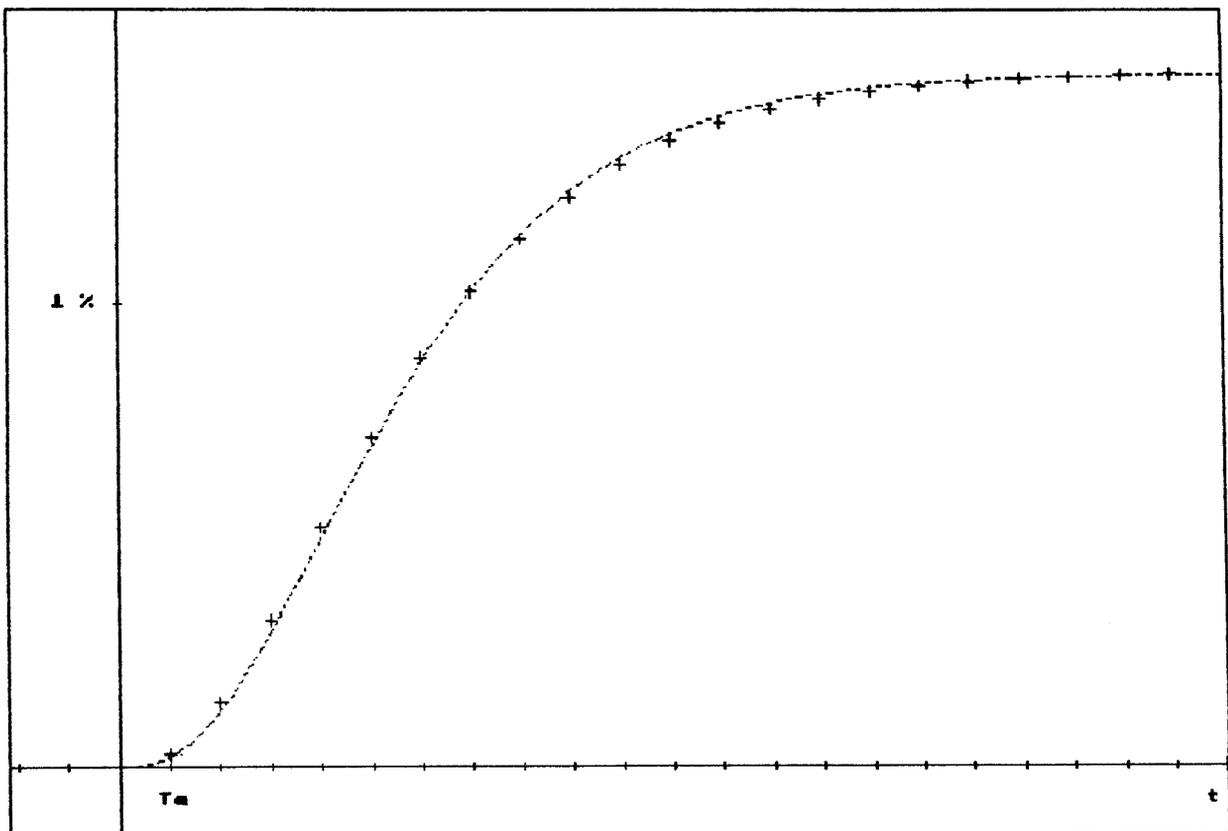
Procedure Affiche_resultats(I:integer,h,MoS,M1S,M2S,n,K,Tau :real);
begin
  clrscr;
  gotoXY(20,5);
  write('Identification d'un modèle de STREJC');
  gotoXY(1,8);
  writeln('Nombre de points pour le calcul: ',I);
  writeln;
  writeln('Période d'échantillonnage : ',h:5:2);
  writeln;
  writeln('Moments du signal de sortie :');writeln;
  writeln('Bo(s) = ',MoS:10:3,' B1(s) = ',M1S:10:3,' B2(s) = ',M2S:10:3);
  writeln;writeln;
  writeln('Paramètres du modèle de STREJC :');writeln;
  writeln('n = ',n:10:4,' K = ',K:10:4,' p = ',Tau:10:4);
end; { of procedure Affiche_resultats }

```

```

BEGIN
  Trois_moments(nb_points,h,AoS,A1S,A2S);
  Coefficients(AoS,A1S,A2S,n,K,Tau);
  Affiche_resultats(nb_points,h,AoS,A1S,A2S,n,K,Tau);
END.

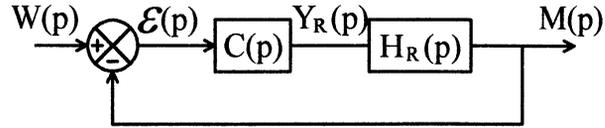
```



PARTIE B

I. Calculs préliminaires

62. Le schéma fonctionnel en asservissement est :



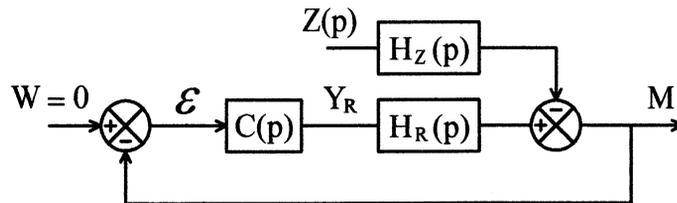
Mise en équations :

$$M(p) = H_R(p) \cdot Y_R(p)$$

$$Y_R(p) = C(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = W(p) - M(p) \Rightarrow M(p) = \frac{H_R(p) \cdot C(p)}{1 + H_R(p) \cdot C(p)} \cdot W(p)$$

Le schéma fonctionnel en régulation est :



$$M(p) = -H_Z(p) \cdot Z(p) + H_R(p) \cdot Y_R(p)$$

$$Y_R(p) = -C(p) \cdot M(p) \Rightarrow M(p) = \frac{-H_Z(p)}{1 + H_R(p) \cdot C(p)} \cdot Z(p)$$

Par application du théorème de superposition (dans le domaine linéaire) :

$$\Rightarrow M(p) = \underbrace{\frac{H_R(p) \cdot C(p)}{1 + H_R(p) \cdot C(p)}}_{F_1(p)} W(p) + \underbrace{\frac{-H_Z(p)}{1 + H_R(p) \cdot C(p)}}_{F_2(p)} Z(p)$$

II. Utilisation d'un modèle de référence en asservissement, pour une fonction de transfert réglante du 1^{er} ordre

a. Étude en asservissement

63. D'après l'expression de $F_1(p)$:

$$F_1(p) = \frac{H_R(p) \cdot C(p)}{1 + H_R(p) \cdot C(p)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(p) = \frac{F_1(p)}{H_R(p) [1 - F_1(p)]}}$$

avec le modèle de référence :

$$F_1(p) = \frac{1}{1 + \tau d \cdot p} \quad \text{et} \quad H_R(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau \cdot p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(p) = \frac{1 + \tau \cdot p}{\kappa \cdot \tau d \cdot p}}$$

64. Par identification

$$A \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) = \frac{A}{T_i p} (1 + T_i p)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{T_i p} (1 + T_i p) = \frac{1}{\kappa \tau d \cdot p} (1 + \tau p) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_i = \tau}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{\kappa} \times \frac{\tau}{\tau d}}$$

65. Le gain de boucle $A\kappa = \frac{\tau}{\tau d}$ représente le facteur d'accélération en chaîne fermée, par rapport au comportement en chaîne ouverte.

Si $A\kappa > 1 \Rightarrow \frac{\tau}{\tau d} > 1 \Rightarrow \tau d < \tau$ et on a une accélération, en asservissement. Il faut noter que ce n'est pas systématiquement recherché en régulation.

b. Étude en régulation

66.
$$F_2(p) = \frac{-H_Z(p)}{1 + H_R(p) \cdot C(p)} \quad \text{avec} \quad H_Z(p) = \frac{\kappa'}{1 + \tau p} \quad H_R(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau p}$$

et
$$C(p) = \frac{A}{\tau p} (1 + \tau p) \quad \left[\text{puisque} \frac{1}{\kappa \tau d} = \frac{A}{\tau} \right]$$

$$\Rightarrow \quad F_2(p) = \frac{-\frac{\kappa'}{1 + \tau p}}{1 + \frac{\kappa}{1 + \tau p} \cdot \frac{A}{\tau p} (1 + \tau p)} = \frac{-\kappa'}{(1 + \tau p) \left(1 + \frac{A\kappa}{\tau} \cdot \frac{1}{p} \right)}$$

Par identification :

⇒

$$F_2(p) = \frac{-\frac{\kappa'\tau}{A\kappa} p}{1 + \left(\frac{1+A\kappa}{A\kappa}\right)\tau \cdot p + \frac{\tau^2}{A\kappa} p^2}$$

$$b_1 = \frac{-\kappa'\tau}{A\kappa}$$

$$a_1 = \frac{1+A\kappa}{A\kappa} \cdot \tau$$

$$a_2 = \frac{\tau^2}{A\kappa}$$

67. On utilise le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot M(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \times F_2(p) \times \frac{1}{p} \quad \text{car} \quad Z(p) = \frac{1}{p} \text{ (échelon)}$$

⇒

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} F_2(p) = 0$$

⇒

$$m(\infty) = 0$$

⇒ précision statique parfaite

68. Question piège !

L'énoncé aurait pu être : «En assimilant... (cf. partie A), **chercher si** il existe une valeur limite $(A\kappa)_L$... à une perturbation **devienne** pseudopériodique».

Cette question avait pour but de tester la capacité du candidat à poursuivre complètement un calcul.

Par identification

$$1 + \frac{1+A\kappa}{A\kappa} \tau p + \frac{\tau^2}{A\kappa} p^2 = 1 + \frac{2\lambda}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}$$

⇒

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{A\kappa}}{\tau} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1+A\kappa}{2\sqrt{A\kappa}}$$

On sait que la réponse devient pseudopériodique si $\lambda < 1$. L'étude de la frontière limite $\lambda = 1$ aboutit à $2\sqrt{A\kappa} = 1 + A\kappa$.

⇒

$$2x = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

est racine double.

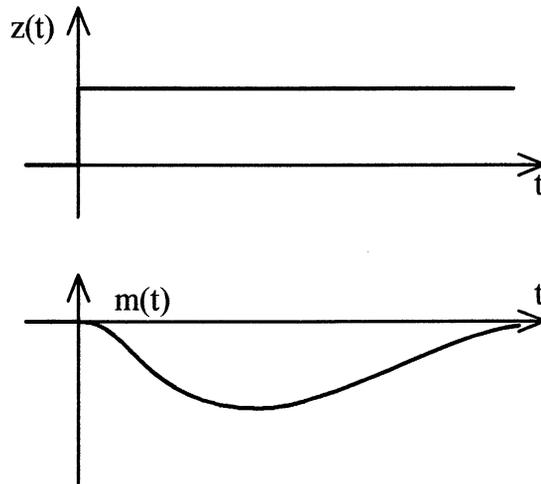
⇒

$$\sqrt{(A\kappa)_L} = 1 \Rightarrow (A\kappa)_L = 1$$

Malheureusement pour le candidat, si $A\kappa \neq 1$, $\supset A\kappa > 0$, λ est strictement supérieur à 1 !

Ceci est confirmé par l'étude graphique de $y = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

69. Seconde question piège (dans le prolongement de la 68). Si on cherche à accélérer le système en asservissement, en adoptant $A\kappa > 1$, la réponse en régulation reste apériodique. Ce résultat, vrai pour un choix de même constante de temps τ pour $H_R(p)$ et $H_Z(p)$, est un cas particulier.



Pour $\tau_R \neq \tau_Z$ le résultat n'est plus vrai.

III. Utilisation d'un modèle de référence en asservissement, pour une fonction de transfert réglante de BROÏDA

70.
$$C(p) = \frac{F_1(p)}{H_R(p) [1 - F_1(p)]} \quad \text{avec} \quad F_1(p) = \frac{1}{1 + \tau d \cdot p} \quad \text{et} \quad H_R(p) = \frac{\kappa e^{-Tp}}{1 + \tau p}$$

\Rightarrow
$$C(p) = \frac{1 + \tau \cdot p}{\kappa \cdot \tau d \cdot p} \cdot e^{+T \cdot p}$$

qui n'est pas réalisable à cause du terme d'avance e^{+Tp} .

71. Si T est faible, on peut utiliser un développement de e^{+Tp} au voisinage de zéro :

$$e^{+Tp} = 1 + T \cdot p + \frac{T^2}{2!} p^2 + \dots \quad \Rightarrow \quad e^{+Tp} \approx 1 + T \cdot p$$

si on se limite aux deux premiers termes.

On obtient :
$$C(p) \approx \frac{1 + \tau p}{\kappa \cdot \tau d \cdot p} (1 + T \cdot p)$$

ou
$$C(p) \approx \frac{\tau}{\kappa \tau d} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau \cdot p} \right) (1 + T \cdot p)$$

$$A = \frac{\tau}{\kappa \cdot \tau d}$$

Par identification avec le PID série \Rightarrow

$$T_i = \tau$$

$$T_d = T$$

Si T devient non négligeable, il faut tenir compte des termes en p^n , ce qui est impossible en régulation, compte tenu du bruit sur la mesure.

72. Compte tenu de l'expression générale de $C(p)$, la seule solution pour rendre $C(p)$ réalisable est d'adopter un modèle de référence présentant un temps mort identique (ou supérieur !) à celui de $H_R(p)$.

\Rightarrow

$$F_1(p) = \frac{e^{-T \cdot p}}{1 + \tau d \cdot p}$$

par exemple

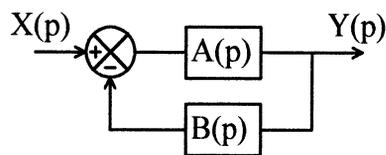
IV. Réalisation d'un compensateur de temps mort

a. Étude en asservissement

$$73. \quad C(p) = \frac{F_1(p)}{H_R(p) [1 - F_1(p)]} \quad \text{avec} \quad F_1(p) = \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau d \cdot p} \quad \text{et} \quad H_R(p) = \frac{\kappa \cdot e^{-Tp}}{1 + \tau \cdot p}$$

$$\Rightarrow \quad C(p) = \frac{1 + \tau \cdot p}{\kappa (1 + \tau d \cdot p)} \times \frac{1}{1 - \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau d p}} \quad \Rightarrow \quad C(p) = \frac{1 + \tau p}{\kappa (1 + \tau d \cdot p - e^{-Tp})}$$

74. Le modèle proposé est mis sous la forme d'une boucle à retour non unitaire, selon le schéma fonctionnel ci-dessous :



La fonction de transfert en chaîne fermée est : $\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)}$.

Par identification avec $C(p)$:

$$\frac{A \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right)}{1 + A \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \cdot G(p) \right)} = \frac{1 + \tau p}{\kappa (1 + \tau d p - e^{-Tp})}$$

si

$$A = \frac{\tau}{\kappa \cdot \tau d}$$

et

$$T_i = \tau$$

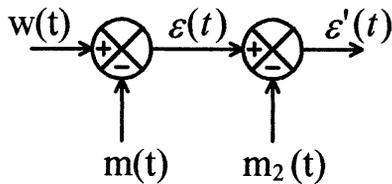
⇒

$$G(p) = \frac{\kappa \left(1 - e^{-T \cdot p} \right)}{1 + \tau \cdot p}$$

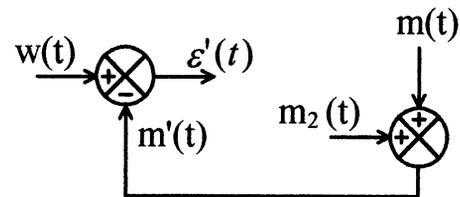
fonction de transfert appelée CTM (Compensateur de Temps Mort) sur les systèmes industriels.

75. On montre que les deux portions de schéma ci-dessous sont équivalentes, car elles aboutissent toutes les deux à la même expression du signal $\varepsilon'(t)$.

N.B. : On peut aussi utiliser les règles de MASON.



$$\varepsilon'(t) = [w(t) - m(t)] - m_2(t)$$



$$\varepsilon'(t) = w(t) - [m(t) + m_2(t)]$$

76. D'après le schéma fonctionnel $M'(p) = M_2(p) + M(p)$

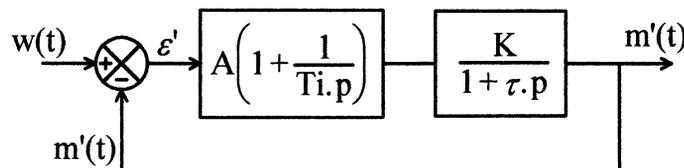
$$M'(p) = G(p) \cdot Y_R(p) + H_R(p) \cdot Y_R(p) = [G(p) + H_R(p)] \cdot Y_R(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{M'(p)}{Y_R(p)} = G(p) + H_R(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau p} (1 - e^{-T p}) + \frac{\kappa e^{-T p}}{1 + \tau p}$$

⇒

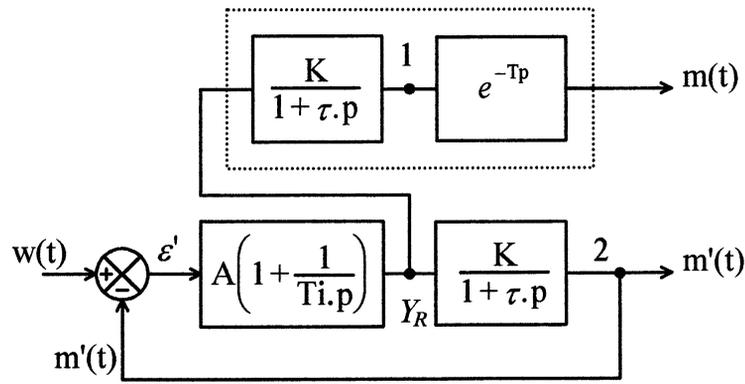
$$H(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau p}$$

77. Le schéma de la figure 9 peut donc se modifier de la façon suivante : le régulateur «voit» un système du 1^{er} ordre.



Son réglage avec $T_i = \tau$ permet d'obtenir (pour $m'(t)$ et non $m(t)$!) une réponse du type 1^{er} ordre (celle du modèle de référence), avec une constante de temps τd en chaîne fermée, réglée par A. On est bien dans le cas II.

78. En ce qui concerne $m(t)$, on obtient $m'(t)$ mais retardée du temps mort T . En effet on peut compléter le schéma de la question 77 de la façon ci-dessous :



Les signaux en 1 et 2 sont identiques

⇒

$$m(t) = m'(t - T)$$

b. Étude en régulation

79. On rappelle le résultat de la question 62 : $F_2(p) = -\frac{H_Z(p)}{1 + H_R(p) \cdot C(p)}$

avec $H_R(p) = \frac{\kappa e^{-Tp}}{1 + \tau p}$, $H_Z(p) = \frac{\kappa'}{1 + \tau p}$ et $C(p) = \frac{1 + \tau p}{\kappa(1 + \tau d \cdot p - e^{-Tp})}$

on rappelle également que si $A\kappa = 1 \Rightarrow \tau d = \tau$

$$\Rightarrow F_2(p) = \frac{-\frac{\kappa'}{1 + \tau p}}{1 + \frac{\kappa \cdot e^{-Tp}}{1 + \tau p} \times \frac{1 + \tau p}{1 + \tau \cdot p - e^{-Tp}}}$$

⇒

$$F_2(p) = \frac{\kappa'(1 + \tau p - e^{-Tp})}{(1 + \tau p)^2}$$

80. On utilise le théorème de la valeur finale :

$$m(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} m(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot M(p) = \lim_{p \rightarrow 0} -F_2(p)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \frac{-\kappa'(1 + 0 - 1)}{1}$$

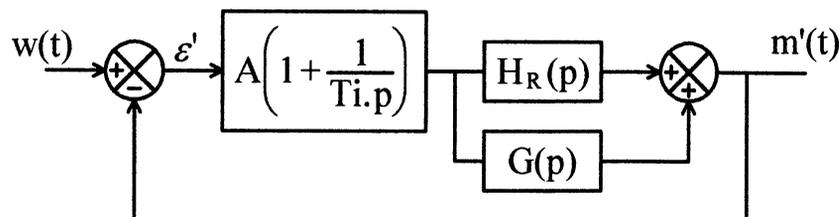
⇒

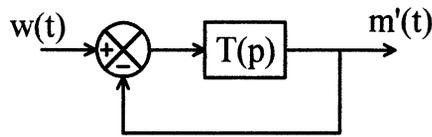
$$m(\infty) = 0$$

précision statique parfaite.

c. Étude de la robustesse

81. Le schéma de la figure 10, sans $H_Z(p)$ puisque $z(t) = 0$, peut se représenter sous la forme ci-dessous, qui permet d'utiliser la représentation «classique» d'une boucle de régulation à retour unitaire ; sa fonction





de transfert en chaîne fermée vaut :

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

Sa stabilité limite peut s'étudier par l'équation $1 + T(p) = 0$. D'après le schéma 10,

$$M'(p) = Y_R(p) [H_R(p) + G(p)]$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{M'(p)}{Y_R(p)} = \frac{\kappa_v \cdot e^{-Tp}}{1 + \tau p} + \frac{\kappa(1 - e^{-Tp})}{1 + \tau p}$$

Si on pose $\kappa_v = \alpha \cdot \kappa$

$$H(p) = \kappa \cdot \frac{1 + e^{-Tp} \times (\alpha - 1)}{1 + \tau p}$$

82. D'après les remarques ci-dessus :

$$F(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} \quad \text{avec} \quad T(p) = A\kappa \frac{(1 + \tau p)}{\tau p} \cdot \frac{1 + e^{-Tp} (\alpha - 1)}{1 + \tau p}$$

\uparrow
 car $T_i = \tau$

Pour $A\kappa = 0,5$

$$\Rightarrow \boxed{T(p) = 0,5 \frac{1 + e^{-Tp} (\alpha - 1)}{\tau \cdot p}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(p) = \frac{0,5 [1 + e^{-Tp} (\alpha - 1)]}{\tau p + 0,5 [1 + e^{-Tp} (\alpha - 1)]}}$$

83. La stabilité peut être étudiée par la méthode isochrone : on cherche la pulsation ω_C telle que $T(j\omega)$ passe par le point critique $-1 \Rightarrow T(j\omega_C) = -1$

$$\Rightarrow 0,5 \frac{1 + e^{-Tj\omega_C} (\alpha - 1)}{\tau j \omega_C} = -1 \quad \text{or} \quad e^{-Tj\omega_C} = \cos(-T\omega_C) + j \sin(-T\omega_C)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + (\alpha - 1) \cos(-T\omega_C) + j (\alpha - 1) \sin(-T \cdot \omega_C)}{\tau \cdot j \cdot \omega_C} = -2$$

Si ce rapport vaut -2 , son argument vaut π et son module 2. De plus le deuxième membre étant réel, le numérateur du premier membre doit être imaginaire (et < 0).

$$\Rightarrow \text{Sa partie réelle est donc nulle} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1 + (\alpha - 1) \cos(-T \cdot \omega_C) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{j (\alpha - 1) \sin(-T \cdot \omega_C)}{\tau j \omega_C} = -2 \Rightarrow (\alpha - 1) \cdot \sin(-T \omega_C) = -2 \tau \omega_C$$

On doit donc résoudre

$$\begin{cases} \sin(-T\omega_c) = -\frac{2\tau\omega_c}{\alpha-1} \\ \cos(-T\omega_c) = -\frac{1}{\alpha-1} \end{cases}$$

⇒

$$\tan(T\omega_c) = -2\frac{\tau}{T} \cdot (T\omega_c)$$

On retrouve le rapport $\frac{T}{\tau}$ (ou $\frac{\tau}{T}$), bien connu en régulation, qui caractérise la difficulté de régulation : plus $\frac{\tau}{T}$ est faible, plus la régulation est difficile.

Changement de variable :

$$\tan x + 2\frac{\tau}{T} \cdot x = 0$$

si

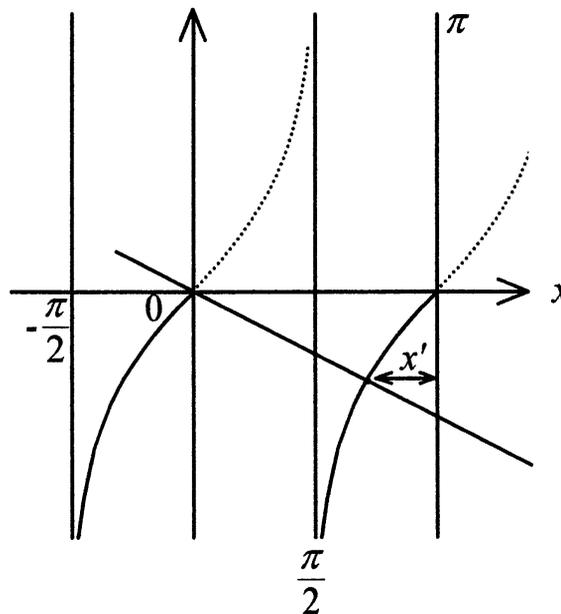
$$\frac{T}{\tau} = 2,26$$

⇒

$$\tan x + \frac{2}{2,26}x = 0$$

⇒

$$\tan x + 0,885x = 0$$



La résolution au solveur des machines des candidats donne uniquement $x = 0$ comme solution, car la partie principale Arc tan n'est définie que de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Le graphe rapide de $\tan x$ et $-0,885x$ montre qu'il existe une solution positive entre $\frac{\pi}{2}$ et π

⇒ on pose $x' = x - \pi$ et on résout : $\tan x' = -0,885(x' + \pi)$

⇒ Au solveur

$$x' = -1,0712$$

⇒

$$x = 2,070 \text{ rad}$$

⇒

$$T \cdot \omega_c = 2,070 \Rightarrow \cos(T\omega_c) = \cos(2,07) = \frac{-1}{\alpha-1} = -0,4787$$

⇒

$$\alpha = \frac{1}{0,4787} + 1$$

⇒

$$\alpha = 3,0889 \approx 3,089$$

⇒ Pour $(\kappa_V)_L \approx 3 \cdot \kappa$, la boucle avec C.T.M. commence à osciller.

84. Pour la boucle «classique», sans C.T.M., la fonction de transfert en chaîne ouverte $T(p)$ s'écrit :

$$T(p) = A \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) \cdot \frac{\kappa_V e^{-Tp}}{1 + \tau p} \quad \text{avec } T_i = \tau \text{ et } A\kappa = 0,5$$

si on pose toujours $\kappa_V = \alpha \cdot \kappa$

$$\Rightarrow T(p) = A\kappa \frac{1 + \tau p}{\tau p} \cdot \frac{\alpha e^{-Tp}}{1 + \tau p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(p) = \frac{0,5}{\tau \cdot p} \cdot \alpha \cdot e^{-Tp}}$$

Les oscillations limites sont obtenues pour :

$$T(j \omega_C) = \frac{0,5 \alpha}{j \tau \omega_C} \cdot e^{-Tj \omega_C} = -1 \quad \text{ou} \quad \alpha \frac{e^{-Tj \omega_C}}{j \tau \omega_C} = -2$$

Comme précédemment, on décompose $e^{-Tj \omega_C} = \cos(-T\omega_C) + j \sin(-T\omega_C)$ et on retrouve les deux équations :

$$\begin{cases} \cos(-T\omega_C) = 0 & \text{La première impose } -T\omega_C = -\frac{\pi}{2} \\ \sin(-T\omega_C) = \frac{-2 \tau \omega_C}{\alpha} & \text{La deuxième aboutit à : } -1 = -2 \frac{\tau \omega_C}{\alpha} \end{cases}$$

En tirant $\omega_C = \frac{\pi}{2 \cdot T}$ de la première, la deuxième donne :

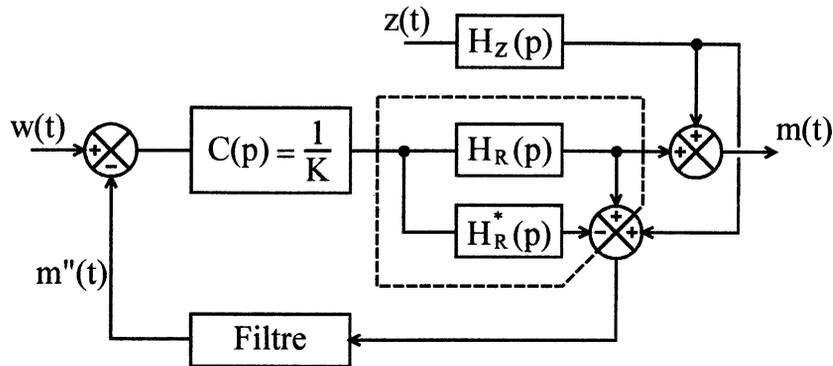
$$1 + \frac{2 \tau}{\alpha} \times \frac{\pi}{2 T} \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha = \pi \times \frac{\tau}{T}} \quad \text{ou, numériquement} \quad \boxed{\alpha = 1,39}$$

⇒ Pour $(\kappa_V)_L \approx 1,4 \cdot \kappa$, la boucle simple commence à osciller, ce qui donne une marge de gain de 2,86 dB, ce qui est trop faible (alors qu'on a adopté déjà $A\kappa = 0,5$, c'est-à-dire un ralentissement en asservissement).

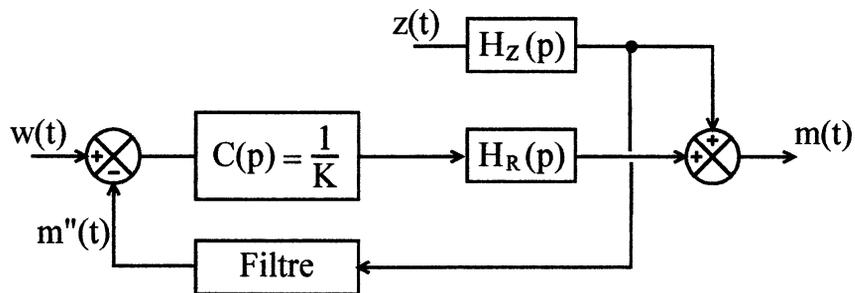
L'utilisation du C.T.M. donne 9,8 dB de marge de gain, ce qui est satisfaisant.

V. Régulation par modèle interne

85. En utilisant les règles de MASON (concernant le déplacement des sommateurs), le schéma proposé à la figure 11 peut se modifier de la façon suivante :



Compte tenu de l'identité $H_R^*(p) = H_R(p)$ ce schéma se simplifie de la façon suivante :



On constate alors que, en asservissement, on a un fonctionnement en chaîne ouverte, sans accélération, puisque la fonction de transfert est de la forme :

$$F_1(p) = \frac{1}{\kappa} \times \frac{\kappa e^{-T_p p}}{1 + \tau p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_1(p) = \frac{e^{-T_p p}}{1 + \tau p}}$$

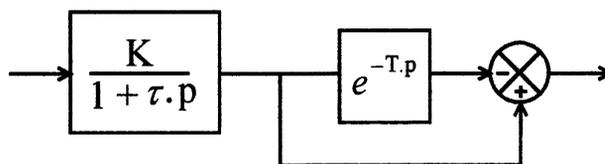
Le gain statique de $F_1(p)$ vaut 1, donc on a une précision statique parfaite.

$m''(t)$ représente l'ensemble des perturbations.

86. Dans la cas ou $H_R^*(p) \neq H_R(p)$, $m''(t)$ représente les perturbations généralisées, somme des perturbations physiques et de l'écart entre $H_R(p)$ et $H_R^*(p)$.

87.
$$G(p) = \frac{\kappa (1 - e^{-T_p p})}{1 + \tau p} = \frac{\kappa}{1 + \tau p} - \frac{\kappa}{1 + \tau p} \cdot e^{-T_p p}$$

On aboutit donc au schéma ci-dessous :



avec

$$H_1(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau p}$$

$$H_2(p) = e^{-T_p}$$

88. On utilise les règles de MASON de simplification des schémas fonctionnels, ou on discute sur l'expression du signal $\varepsilon(t)$ figure 9 :

$$\varepsilon'(p) = W(p) - M'(p) = W - \left[\frac{\kappa}{1 + \tau p} Y_R(p) - \frac{\kappa e^{-T_p}}{1 + \tau p} Y_R(p) + M(p) \right]$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ H_1(p) & & H_R^*(p) \end{array}$$

$$G(p) \cdot Y_R(p)$$

$$\Rightarrow \varepsilon'(p) = W(p) - [M(p) - H_R^* \cdot Y_R(p)] - \frac{\kappa}{1 + \tau p} \cdot Y_R(p)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\kappa e^{-T_p}}{1 + \tau p}$$

figure 13 :

$$\varepsilon(p) = [W(p) - M''(p)] - H_1(p) \cdot Y_R(p)$$

Or

$$M''(p) = M(p) - H_1 \cdot H_2 Y_R(p)$$

$$\downarrow$$

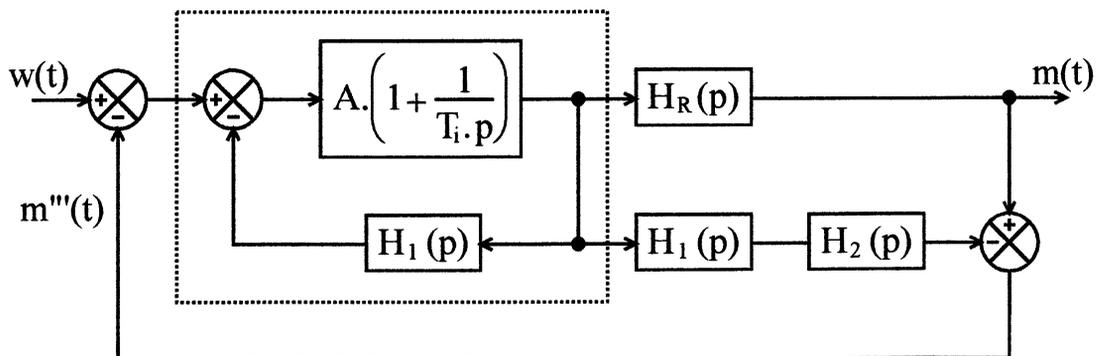
$$H_R^*(p)$$

\Rightarrow

$$\varepsilon(p) = \varepsilon'(p) \text{ et les deux schémas sont équivalents.}$$

89. $H_1(p)$ étant en «commun», dans la figure 13, pour «alimenter» $H_2(p)$ et le retour, le schéma de la figure 13, peut «distribuer» $H_1(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau p}$ et on obtient alors le schéma de la page 30.

On peut alors chercher à simplifier la boucle interne en ...



$$C'(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)} = \frac{A \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)}{1 + A \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) \cdot \frac{\kappa}{1 + \tau p}}$$

⇒

$$C'(p) = \frac{A (1 + T_i p)}{T_i p + A\kappa \cdot \frac{1 + T_i p}{1 + \tau p}}$$

90. Dans le cas où on adopte $T_i = \tau$, la fonction de transfert devient :

$$C'(p) = \frac{A (1 + \tau p)}{\tau p + A\kappa} = \frac{A}{A\kappa} \cdot \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{\tau}{A\kappa} \cdot p}$$

⇒

$$C'(p) = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1 + \tau p}{1 + \frac{\tau}{A\kappa} p}$$

On constate que $C'(p)$ se confond avec une fonction de transfert du type avance / retard.

Dans le cas particulier qui est étudié ($A\kappa = 1$), le correcteur se confond avec un gain :

⇒

$$C'(p) = \frac{1}{\kappa}$$

Au filtre près, on retrouve bien le schéma de la figure 11, puisque $H_1(p) \cdot H_2(p) = H_R(p)$.

91. Dans le cas d'une identification parfaite (cf. question 85) on constate que $m''(t)$ représente les perturbations. On trouve donc sur ce signal une contamination par du bruit, que le filtre peut éliminer.

Sur la base des résultats généraux des structures de commande à modèle interne, on montre que tout se passe comme si on introduisait un «modèle de référence en régulation», vis-à-vis des variations de $z(t)$.

Le choix de ce filtre (passe-bas) permet d'augmenter la robustesse de l'ensemble, vis-à-vis des perturbations ET des écarts entre le procédé et son modèle. C'est pourquoi ce filtre est souvent appelé «**filtre de robustesse**».

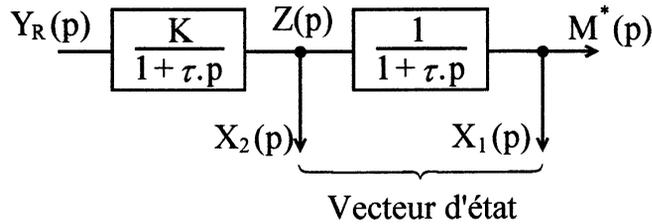
En régulation analogique il est souvent réalisé par un 1^{er} ordre, sur l'entrée $m''(t)$.

En régulation à temps discret, on peut utiliser un filtre moyenneur, à réponse impulsionnelle finie (RIF passe-bas), comme le correcteur C.Z. de Control-Bailey.

VI. Régulation par retour d'état

a. Retour d'état pour une fonction de transfert réglante de STREJC, d'ordre 2.

92.



Par définition :

$$M^*(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \cdot Z(p)$$

⇒ (cf. première partie A)

$$\tau \frac{dm^*(t)}{dt} + m^*(t) = z(t)$$

donc

$$\boxed{\frac{dm^*(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} m^*(t) + \frac{1}{\tau} z(t)} \quad (1)$$

De même

$$Z(p) = \frac{\kappa}{1 + \tau p} \cdot Y_R(p) \Rightarrow \tau \frac{dz(t)}{dt} + z(t) = \kappa Y_R(t)$$

⇒

$$\boxed{\frac{dz(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} z(t) + \frac{\kappa}{\tau} Y_R(t)} \quad (2)$$

Par dérivation de (1) il vient :

$$\frac{d^2m^*(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\tau} \frac{dm^*(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} \frac{dz(t)}{dt}$$

En remplaçant $\frac{dz(t)}{dt}$ par son expression tirée de (2) et $\frac{dm^*(t)}{dt}$ par son expression tirée de (1), il vient :

$$\frac{d^2m^*(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\tau} \left[-\frac{1}{\tau} m^*(t) + \frac{1}{\tau} z(t) \right] + \frac{1}{\tau} \left[-\frac{1}{\tau} z(t) + \frac{\kappa}{\tau} Y_R(t) \right]$$

⇒

$$\boxed{\frac{d^2m^*(t)}{dt^2} = \frac{1}{\tau^2} m^*(t) - \frac{2}{\tau^2} z(t) + \frac{\kappa}{\tau^2} Y_R(t)}$$

93.

$$\frac{M^*(p)}{W_C(p)} = \frac{1}{(1 + \tau d \cdot p)^2} \Rightarrow \text{cf. première partie}$$

$$\boxed{\tau d^2 \frac{d^2m^*(t)}{dt^2} + 2 \tau d \frac{dm^*(t)}{dt} + m^*(t) = W_C(t)}$$

94. Il suffit, dans l'équation différentielle de la question 93, de remplacer $\frac{dm^*(t)}{dt}$ et $\frac{d^2m^*(t)}{dt^2}$ par leur expression (question 92) en fonction du vecteur d'état ($m^*(t)$, $z(t)$).

$$\Rightarrow \tau d^2 \left[\frac{1}{\tau^2} m^*(t) - \frac{2}{\tau^2} z(t) + \frac{\kappa}{\tau^2} y_R(t) \right] + 2 \tau d \left[-\frac{1}{\tau} m^*(t) + \frac{1}{\tau} z(t) \right] + m^*(t) = W_C(t)$$

$$\Rightarrow W_C(t) = \kappa \frac{\tau d^2}{\tau^2} y_R(t) + \underbrace{m^*(t)}_{x_1(t)} \left[\frac{\tau d}{\tau} - 1 \right]^2 + \underbrace{z(t)}_{x_2(t)} \times 2 \frac{\tau d}{\tau} \left(1 - \frac{\tau d}{\tau} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_R(t) = \frac{\tau^2}{\kappa \tau d^2} \left[W_C(t) - \left(\frac{\tau d}{\tau} - 1 \right)^2 x_1(t) - 2 \frac{\tau d}{\tau} \left(1 - \frac{\tau d}{\tau} \right) x_2(t) \right]}$$

95. Par identification avec la relation proposée à la figure 15, et qui est :

$$y_R(t) = A \left[W_C(t) - \lambda_1 x_1(t) - \lambda_2 x_2(t) \right]$$

on trouve :

$$\boxed{A = \frac{\tau^2}{\kappa \tau d^2}}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \left(\frac{\tau d}{\tau} - 1 \right)^2}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{2\tau d}{\tau} \left(1 - \frac{\tau d}{\tau} \right)}$$

96. Si on désire $\tau d = \tau$, on obtient :

$$\boxed{A = \frac{1}{\kappa}}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 0}$$

et on retrouve le schéma

à modèle interne classique. On constate que l'usage du retour d'état permet de choisir un modèle de référence à constante de temps donnée (du même type que $H_R(p)$).

97. Pour $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, le schéma 15 ne fait pas intervenir d'intégrateur explicite, donc la précision statique n'est pas acquise, a priori. En effet le modèle de référence en asservissement adopté, à savoir $\frac{1}{(1 + \tau dp)^2}$, caractérise la relation entre $W_C(t)$ et $m^*(t)$, et non entre $W(t)$ et $m(t)$.

Or d'après le schéma : $W_C(t) = W(t) - [m(t) - m^*(t)]$ vrai \supset t.

Pour $t \rightarrow \infty$ $W_C(\infty) = W(\infty) - [m(\infty) - m^*(t)]$

Or $W_C(\infty) = m^*(\infty)$ puisque le modèle de référence les liant a un gain statique de 1 $\Rightarrow 0 = W(\infty) - M(\infty)$

\Rightarrow $\boxed{M(\infty) = W(\infty)}$ ce qu'il fallait démontrer

b. Retour d'état pour une fonction de transfert réglante de BROÏDA.

98. $Y_R(p) = A \left[W(p) - M(p) - M^*(p) \right] - \lambda \cdot X(p)$

Or $X(p) = \frac{\kappa R}{1 + \tau p} Y_R(p)$ et $M^*(p) = \frac{\kappa e^{-T_p}}{1 + \tau p} \cdot Y_R(p)$

$$\Rightarrow Y_R(p) = A \cdot W(p) - A \cdot M(p) + Y_R(p) \left[\frac{A \kappa}{1 + \tau p} \cdot e^{-Tp} - \lambda \frac{\kappa}{1 + \tau p} \right]$$

$$\Rightarrow Y_R(p) = \left[1 + \frac{\lambda \kappa}{1 + \tau p} - \frac{A \kappa e^{-Tp}}{1 + \tau p} \right] = A W(p) - A \cdot M(p)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_R(p) = \frac{A (1 + \tau p) [W(p) - M(p)]}{1 + \tau p + \lambda \kappa - A \kappa e^{-Tp}}}$$

de la forme $Y_R(p) = C(p) \cdot \varepsilon(p)$.

99. Ce régulateur est intégral (permet une précision statique parfaite caractérisée par $m(\infty) = W(\infty)$) si $p = 0$ est pôle de $C(p)$, mais pas zéro :

$$\begin{cases} \left(1 + \tau p + \lambda \kappa - A \kappa e^{-Tp} \right)_{p=0} = 0 \\ A (1 + \tau p)_{p=0} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda \kappa - A \kappa = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{A \kappa - 1}{\kappa}}$$

La deuxième condition est toujours vraie.

100. Le correcteur $C(p) = \frac{Y_R(p)}{W(p) - M(p)} = \frac{Y_R(p)}{\varepsilon(p)}$ précédent, peut s'exprimer de la façon suivante, dans le cas

$$\lambda = \frac{A \kappa - 1}{\kappa} :$$

$$C(p) = \frac{A (1 + \tau p)}{1 + \tau p + (A \kappa - 1) - A \kappa e^{-Tp}} = \frac{A (1 + \tau p)}{A \kappa + \tau p - A \kappa e^{-Tp}}$$

$$C(p) = \frac{A (1 + \tau p)}{A \kappa \left(1 + \frac{\tau}{A \kappa} p - e^{-Tp} \right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(p) = \frac{A(1 + \tau \cdot p)}{\kappa \left(1 + \frac{\tau}{A \kappa} p - e^{-Tp} \right)}}$$

On retrouve le correcteur de la question 73, avec $\tau d = \frac{\tau}{A \kappa}$.

On constate donc que le correcteur de SMITH, réalisé à la question 73, est en fait une autre forme d'une régulation par retour d'état reconstruit.

C.A.P.E.S.

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de Physique avec applications - Session : 1995

Première partie : phénomènes liés à l'atmosphère terrestre

A. Stabilité de l'atmosphère terrestre

A.1.

$$\vec{F} = -K \frac{M_T m}{(R+z)^2} \vec{u}$$

A.2. $\vec{F} = m\vec{G}$

$$\vec{G} = -\frac{K M_T}{(R+z)^2} \vec{u}$$

$$z=0 : \vec{G} = \vec{G}_0 = -\frac{K M_T}{R^2} \vec{u}$$

$$G = G_0 \left(\frac{R}{R+z} \right)^2$$

A.3. Soit \vec{u}_θ le vecteur unitaire orthoradial. Un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ s'écrit :

$$d\vec{l} = dr \vec{u} + r d\theta \vec{u}_\theta$$

et le travail de \vec{F} :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{m G_0 R^2}{(R+z)^2} dz$$

Ce travail, lors du déplacement de A, d'altitude z_A , à B, d'altitude z_B s'écrit :

$$W_{AB} = -m G_0 R^2 \int_{z_A}^{z_B} \frac{dz}{(R+z)^2} = -m G_0 R^2 \left[\frac{1}{R+z_A} - \frac{1}{R+z_B} \right]$$

W_{AB} est indépendant du chemin suivi, donc \vec{F} dérive d'une énergie potentielle :

$$W = E_{pA} - E_{pB}$$

avec :

$$E_p = -\frac{m G_0 R^2}{R+z}$$

si $E_{p_\infty} = 0$

A.4.

$$E_m = E_c + E_p \quad E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{m G_0 R^2}{R}$$

Si le corps échappe à l'attraction terrestre, $z \rightarrow \infty$, et $E_p \rightarrow 0$. Comme $E_c \geq 0$, $E_m \geq 0$. A la limite

de libération, $E_m = 0$:

$$\frac{1}{2} = m v_L^2 = \frac{m G_0 R^2}{R}$$

$$v_L = \sqrt{2 G_0 R}$$

$$v_L = 11,2 \text{ km/s}$$

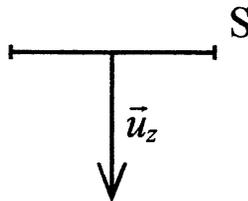
A.5. \vec{V}_0 n'étant pas colinéaire à \vec{u} , la trajectoire n'est pas rectiligne.

$V < V_L$: pas de points à l'infini : trajectoire elliptique (ou circulaire).

$V > V_L$: trajectoire hyperbolique.

$V = V_L$: trajectoire parabolique.

A.6.



a) Force pressante :

$$p_0 S \vec{u}_z$$

Poids :

$$n_0 m_a G_0 \vec{u}_z$$

pour $S = 1 \text{ m}^2$

$$S p_0 \vec{u}_z = n_0 m_a G_0$$

$$n_0 = \frac{p_0 S}{m_a G_0}$$

b) La surface terrestre a une aire : $S = 4\pi R^2$ on en déduit :

$$N_0 = 4\pi R^2 \cdot n_0$$

$$N_0 = \frac{4\pi p_0 R^2}{m_a G_0}$$

Application Numérique :

$$N_0 = 1,05 \cdot 10^{44} \text{ molécules}$$

$$v_p = 406,9 \text{ m/s}$$

A.7. Le nombre de molécules ayant une vitesse supérieure à V_0 s'écrit :

$$N = \frac{4 N_0}{\sqrt{\pi}} \int_{V_0}^{\infty} \frac{v^2}{v_p^3} \cdot e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} \cdot dv$$

avec :

$$\frac{v}{v_p} = x \quad \frac{V_0}{v_p} = x_0 \quad \frac{dv}{v_p} = dx$$

$$N = \frac{4 N_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{\infty} x^2 e^{-x^2} \cdot dx$$

Soit :

$$N \approx \frac{2 N_0}{\sqrt{\pi}} x_0 e^{-x_0^2}$$

A.8. Dans le modèle adopté : $x_0 = \frac{V_L}{v_p}$

Soit

$$x_0 = 27,5 \quad N = N_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(27,5)^2} \cdot 27,5$$

La calculatrice donne $N = 0$, résultat suffisant pour conclure. On peut toutefois exprimer :

$$\log \frac{N}{N_0} = \frac{1}{2,3} \ln \frac{N}{N_0} = \log \frac{2 \times 27,5}{\sqrt{\pi}} - \frac{27,5^2}{2,3}$$

$$\log \frac{N}{N_0} = -327,3 \quad N = N_0 \times 10^{-327} \times 10^{-0,3}$$

$$N = 5,26 \cdot 10^{-284}$$

A.9. Cent moles d'air ont la masse :

$$m = (80 \times 28 + 20 \times 32)$$

et une molécule :

$$m_a = \frac{m}{100 N}$$

m_a est naturellement la masse moyenne d'une molécule :

$$m_a = 4,8 \cdot 10^{-23} \text{ g}$$

$$m_a = 4,8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

c'est bien l'ordre de grandeur proposé dans l'énoncé.

A.10. Les calculs littéraux sont les mêmes, avec pour valeurs numériques :

$$v_p = \sqrt{\frac{2 k_T}{m_a}} = 1579 \text{ m/s}$$

$$x_0 = 7,09$$

on trouve alors :

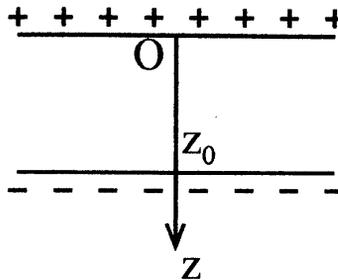
$$N = 1,24 \cdot 10^{23} \text{ molécules}$$

Le modèle proposé constitue une approche très simplifiée de la réalité (en particulier avec le modèle isotherme). Toutefois, les conclusions sont conformes à la réalité :

- l'atmosphère terrestre ($O_2 + N_2$) est stable, puisque par le jeu de l'agitation thermique, une proportion négligeable, pour ne pas dire nulle échappe à l'attraction terrestre,
- une atmosphère d'hydrogène serait instable : l'hydrogène est rare dans l'atmosphère.

B. Étude électrique du système terre - atmosphère

B.1.



Condensateur plan. Effet de bord négligeable : équivalent à un condensateur à armatures infinies. Soit M un point entre les armatures : toute symétrie / axe \perp aux armatures et passant par M conserve M et les sources, donc conserve \vec{E} en M. Les lignes de champ sont \perp aux armatures :

$$\vec{E} = E \cdot \vec{e}_z \quad \text{div } \vec{E} = 0 = \frac{dE}{dz}$$

E est indépendant de z.

Au voisinage des armatures, $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (théorème de Coulomb).

B.2. Par définition, $Q = \sigma S$. On a donc :

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad \text{soit} \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dz$$

$$V = \int_0^z E \cdot dz = \frac{Q z_0}{\epsilon_0 S} = E \cdot z_0$$

B.3. La capacité du condensateur s'écrit :

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{z_0}$$

L'énergie emmagasinée s'écrit :

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

Application Numérique :

$$C = 17,68 \text{ pF}$$

$$W = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

- B.4. Le système a la symétrie sphérique : les équipotentielles sont des sphères de centre O, donc le champ est radial, et sa norme ne dépend que de z.

Soit (ϵ) une sphère de centre O et de rayon $R + z$. Elle contient la charge $-Q$, et le théorème de Gauss s'écrit :

$$\iint_{(\epsilon)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{Q}{\epsilon_0} = 4\pi (R + z)^2 E$$

Soit :

$$\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 (R + z)^2} \vec{u}$$

- B.5. La différence de potentiel V entre l'équipotentielle $z = z_0$ et $z = 0$ s'écrit :

$$V = -\int_0^{z_0} E \cdot dz = \frac{Q z_0}{4\pi \epsilon_0 R (R + z)} = \frac{Q}{C}$$

on en déduit :

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 R (R + z_0)}{z_0}$$

- B.6. $z_0 \ll R$:

$$R + z_0 = R \left(1 + \frac{z_0}{R} \right) \approx R$$

$$C \approx \frac{\epsilon_0 \times 4\pi R^2}{z_0}$$

condensateur plan.

$4\pi R^2$ est la surface S des armatures : $C \approx \frac{\epsilon_0 S}{z_0}$ on retrouve le cas du

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

$$W = \frac{\epsilon_0 \times 4\pi R^2}{2 z_0} V^2$$

Application Numérique :

$$W = 7,28 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La norme du champ E est quasi constante (approximation du condensateur plan).

$$E \approx \frac{V}{z_0}$$

$$E = 8 \text{ v/m}$$

- B.7. L'application du théorème de Coulomb s'écrit :

$$Q' = \sigma' S = S \epsilon_0 E \quad \text{avec} \quad S = 4\pi R^2$$

$$Q' = 4\pi R^2 E \epsilon_0$$

$$Q' = 455100 \text{ C}$$

B.8. Chocs moléculaires. Rayonnement cosmique. Radioactivité naturelle.

B.9. La charge échangée est le flux sortant de \vec{j} de la surface sphérique de la terre, soit :

$$-j \times 4\pi R^2 = 1800 \text{ C/s}$$

Pour compenser cette décharge, il faut environ : $\frac{1800}{20} = \underline{90 \text{ impacts}}$ de foudre par seconde.

C. Phénomène de mirage

C.1. D'après la deuxième loi de Snell-Descartes relative à la réfraction :

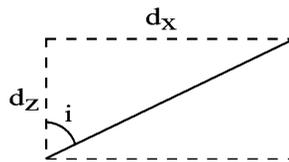
$$n_{j-1} \sin i_{j-1} = n_j \cdot \sin i_j = n_{j+1} \cdot \sin i_{j+1}$$

Si on fait tendre l'épaisseur des couches vers 0, avec $n_j = n$, $n_{j+1} = n + dn$ et $n_{j-1} = n - dn$, on tend vers un milieu d'indice continûment variable, avec des surfaces équi indice planes : $n(z) = \text{cte}$. Les relations précédentes restent les mêmes. On a donc :

$$\boxed{n \sin i = \text{cte}}$$

C.2. On a vu que $n \sin i$ est un invariant. En z_s , les conditions initiales imposent : $i = \frac{\pi}{2}$, soit $\sin i = 1$.

Si en z , l'angle est i , on a alors : $n(z_s) = n(z) \sin i$



$$\sin i = \frac{dx}{\sqrt{dz^2 + dx^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{n(z_s)}{n(z)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}}$$

C.3. z et z_s sont tous les deux inférieurs à 10 cm. On en déduit :

$$\frac{n(z)}{n(z_s)} < \frac{n(0,1 \text{ m})}{n(0)} = \frac{1,00250 + 4 \cdot 10^{-5}}{1,00250} \approx 1,0 + 4 \cdot 10^{-5}$$

Soit :

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 < \left(1 + 4 \cdot 10^{-5}\right)^2 \approx 1 + 8 \cdot 10^{-5}$$

$$\boxed{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 < 8 \cdot 10^{-5}}$$

$\frac{dz}{dx}$ est effectivement très petit devant 1.

C.4. En effectuant un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{n(z_s)}{n(z)} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2$$

$$\frac{n(z_s)}{n(z)} = \frac{n_0 + \alpha z_s}{n_0 + \alpha z}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = 1 - \frac{n_0 + \alpha z_s}{n_0 + \alpha z} = \frac{\alpha(z - z_s)}{n_0 \left(1 + \frac{\alpha z}{n_0} \right)}$$

en négligeant $\frac{\alpha z}{n_0} < 4.10^{-5}$ devant 1, on obtient :

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{2\alpha}{n_0}} \sqrt{z - z_s}$$

Soit :

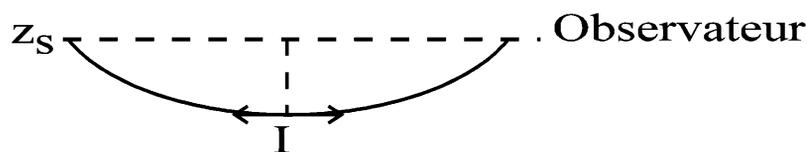
$$\frac{dz}{\sqrt{z - z_s}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{n_0}} dx$$

qui s'intègre, en tenant compte des conditions initiales :

$$2\sqrt{z - z_s} = \sqrt{\frac{2\alpha}{n_0}} x$$

$$z = z_s + \frac{\alpha}{2n_0} x^2$$

C.5.



La parabole est symétrique par rapport au plan d'abscisse $\frac{x}{2}$.

Le rayon issu de la source arrivera sur l'observateur tant que, en $x = \frac{d}{2}$, le rayon ne touche pas le sol.

A la distance d maximum, le rayon est à l'altitude $z = 0$ en $x = \frac{d}{2}$.

En prenant ce point de contact I comme nouvelle origine, l'équation du rayon lumineux s'écrit :

$$z = \frac{\alpha}{2n_0} x^2$$

et en $x = \frac{d}{2}$, il doit passer à l'altitude z_s :

$$z_s = \frac{\alpha}{2n_0} \frac{d^2}{4}$$

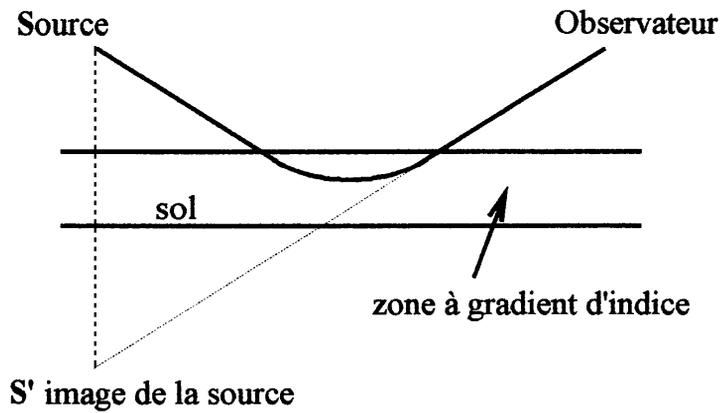
$$d^2 = \frac{8n_0 z_s}{\alpha}$$

$$d = 2\sqrt{\frac{2n_0 z_s}{\alpha}}$$

Application Numérique :

$$d = 31,6 \text{ m}$$

- C.6. Loin du sol, la propagation est rectiligne. Dans la zone à gradient d'indice, la trajectoire est celle étudiée précédemment.



L'observateur verra une image S' de la source, pratiquement symétrique par rapport au sol (la «réflexion» s'effectue en tout état de cause entre 0 et 10 cm d'altitude).

- C.7. Le phénomène s'observe couramment sur une route plane dont le goudron noir est surchauffé par le Soleil. Il est rare que l'on voie des objets se réfléchir, mais le ciel, en se réfléchissant, donne l'impression qu'il y a des flaques d'eau sur la route.

Deuxième partie : fonctionnement d'un haut-parleur

A. Étude mécanique**I. Oscillations libres**

A.I.1. a) m est soumis à la force :

$$\vec{F} = -kz \vec{u}_z$$

La RFD s'écrit :

$$m\ddot{z} + kz = 0$$

Soit :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

b) C'est l'équation d'un mouvement sinusoïdal, de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et de période}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

c) *Application Numérique :*

$$\omega_0 = 438,17 \text{ rd/s}$$

$$T_0 = 14,3 \text{ ms}$$

$$N_0 = 69,7 \text{ Hz}$$

A.I.2. a) On ajoute, dans le bilan des forces, le frottement de type visqueux $-f\dot{z}$:

$$m\ddot{z} + f\dot{z} + kz = 0$$

b) L'équation caractéristique associée a pour discriminant :

$$\Delta = f^2 - 4km$$

pour $f = f_c$, on a un régime critique qui correspond à $\Delta = 0$:

$$f_c^2 = 4km$$

$$f_c = 2\sqrt{k \cdot m}$$

Application Numérique :

$$f_c = 7,01 \text{ kg} \times \text{s}^{-1}$$

c) En divisant par m, l'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{z} = \frac{f}{m} \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$\frac{f}{m} = \frac{f}{f_c} \cdot \frac{f_c}{m} = \alpha \cdot \frac{2\sqrt{km}}{m} = 2\alpha \omega_0$$

D'où l'écriture :

$$\ddot{z} + 2\alpha \omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

d) Le discriminant de l'équation caractéristique s'écrit :

$$\Delta' = \omega_0^2 (\alpha^2 - 1)$$

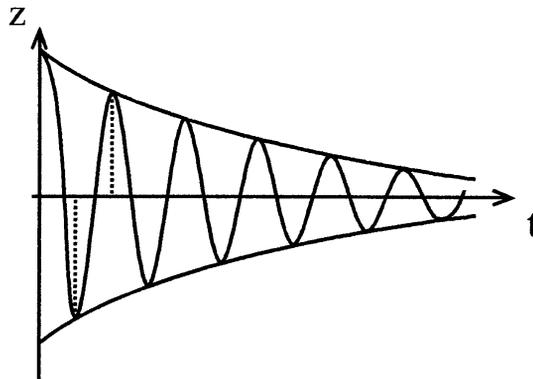
α représente le coefficient de frottement exprimé avec f_c comme unité. On a donc logiquement :

$\alpha < 1$: frottement faible-régime pseudo périodique.

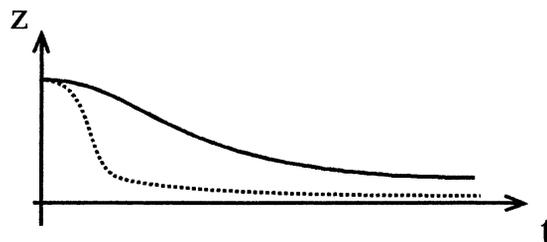
$\alpha > 1$: frottement important régime apériodique.

$\alpha = 1$: régime critique.

Correspondant aux schémas suivants :



$\alpha < 1$ régime pseudo périodique



$\alpha > 1$ régime apériodique

$\alpha = 1$ régime critique

A.I.3. a) $\Delta' = \omega_0^2 (\alpha^2 - 1) < 0$ $\sqrt{\Delta'} = j \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$-\alpha \omega_0 \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$$

d'où les solutions en z :

$$z = A e^{-\alpha \omega_0 t} \cos \left[\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} t + \varphi \right]$$

la pseudo période s'écrit donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

soit :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

b) *Application Numérique* : $T = T_0 (1 - 0,01)^{-1/2} \approx T_0 (1 + 0,005)$

$$T \approx 14,3 \text{ ms}$$

$$\frac{T - T_0}{T} = 0,5 \%$$

l'écart est difficile à déceler expérimentalement.

c) α) L'oscillateur a une énergie conservative s'il est sinusoïdal :

$$E_c = E_p = E$$

On peut donc calculer E :

– soit en $z = 0$: $E_p = 0$, et $E_c = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$ avec $v_{\max} = \omega_0 a$,

– soit en z_{\max} où $E_c = 0$, et $z_{\max} = a$: on a alors :

$$E = \frac{1}{2} k a^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2$$

β) Durant une période, la force de frottement fournit le travail :

$$W = - \int_0^T f \cdot v \cdot \frac{dz}{dt} dt = - \int_0^T f v^2 dt$$

avec

$$v^2 = \omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$W = - f \omega_0^2 a^2 \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \cdot dt$$

$$W = - f \omega_0^2 a^2 \frac{T_0}{2}$$

avec : $f = 2m \alpha \omega_0$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$W = - 2\pi \alpha m \omega_0^2 a^2$$

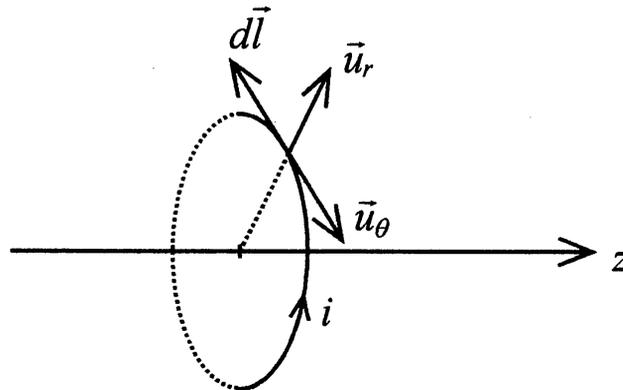
γ) $Q = - 2\pi \frac{E}{W}$

$$Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{m\omega_0}{f}$$

δ) Q est le coefficient de qualité de l'oscillateur (parfois coefficient de surtension pour un oscillateur électrique).

II. Oscillations forcées

A.II.1.



L'élément \vec{dl} de conducteur (\vec{dl} dans le sens de i) est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{dF} = i \vec{dl} \wedge \vec{B} = -i dl B \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r$$

d'où :

$$\vec{F} = i Bl \vec{u}_z$$

A.II.2. On retrouve l'équation établie en première partie : il suffit d'ajouter \vec{F} au bilan des forces :

$$m\ddot{z} + f\dot{z} + kz = F = i Bl$$

Soit, en divisant par m :

$$\ddot{z} + 2\alpha \omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{Bl}{m} I_0 \cos \omega t$$

La solution de l'équation sans second membre est celle étudiée plus haut. Elle se manifeste au moment où on détruit l'équilibre de l'oscillateur. Elle dépend ainsi des conditions initiales et tend toujours vers 0. Au bout d'un temps suffisant, on n'a plus comme solution que la solution particulière sinusoïdale de l'équation sans second membre, et on est en régime permanent (le système a «oublié» les conditions initiales).

A.II.3. a) Pour chercher la solution en régime forcé, on utilise la représentation complexe :

$$(-\omega^2 + 2j \alpha \omega_0 \omega + \omega_0^2) \bar{z} = \frac{Bl}{m} \bar{i}$$

$$\text{on en déduit } \bar{z} : \quad \bar{z} = \frac{\frac{Bl}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j \alpha \omega_0 \omega} \bar{i}$$

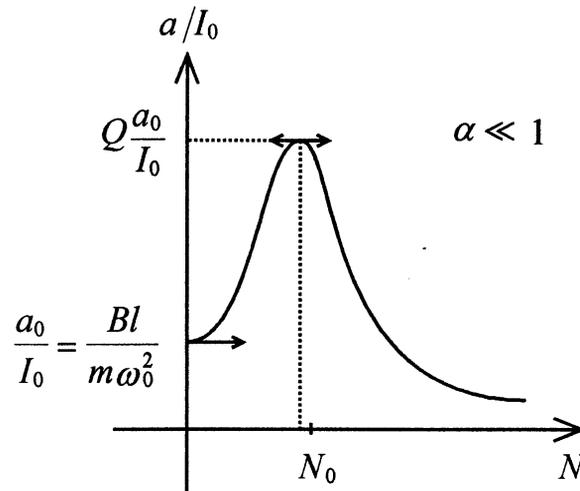
et on trouve a et φ en égalant les modules et les arguments :

$$a = \frac{\frac{Bl}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega_0^2 \omega^2}} \times I_0$$

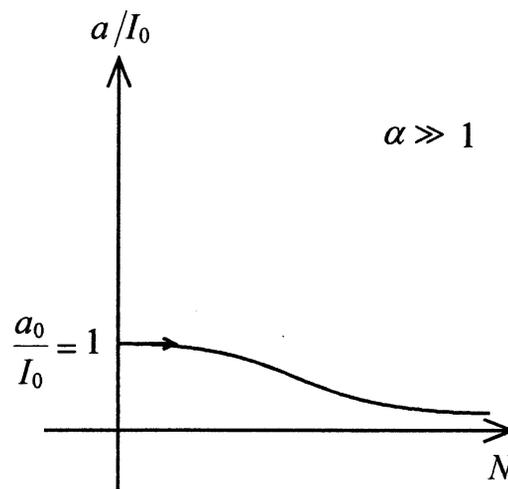
$$\text{tg } \varphi = -\frac{2\alpha \omega_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

b) Si l'amortissement est faible, $\frac{a}{I_0} = f(N)$ passe par un maximum à une fréquence légèrement

inférieure à $N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$:



Si l'amortissement est fort ($Q < \frac{\sqrt{2}}{2}$), la courbe ne présente pas de maximum :



B. Étude énergétique

I. Bilan électro-mécanique

B.I.1. Le champ électromoteur s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Soit :

$$\vec{E} = v \cdot B \cdot \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = v B \vec{u}_\theta$$

La f.é.m. aux bornes de la bobine est égale à la circulation de \vec{E} le long du fil :

$$e = -v Bl$$

(signe négatif par rapport à la convention donnée pour $i > 0$).

B.I.2. L'équation aux mailles s'écrit :

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} - e$$

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + B/v$$

B.I.3. L'ensemble électromécanique est régi par les deux équations :

$$\begin{cases} m\ddot{z} + f\dot{z} + kz = B/i \\ L \frac{di}{dt} + ri + B/v = u \end{cases}$$

Dans l'équation mécanique, on fait intervenir : $v = \dot{z}$; $\ddot{z} = \frac{dv}{dt}$

$$m \frac{dv}{dt} + fv + kz = B/i$$

$$L \frac{di}{dt} + ri + B/v = u$$

Pour faire disparaître les termes de couplage, on multiplie la première équation par v , la seconde par i et on ajoute membre à membre :

$$mv \frac{dv}{dt} + f v^2 + k z v + Li \frac{di}{dt} + ri^2 = ui$$

qui peut s'écrire :

$$ui = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kz^2 \right) + ri^2 + fv^2$$

le premier membre, ui , représente la puissance électrique reçue par le dipôle. Cette puissance est répartie dans les cinq termes du second membre :

- *énergie stockée* : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} kz^2 \right)$ énergies cinétique, magnétique, élastique,
- *énergie dissipée* :
 - ri^2 : effet Joule,
 - fv^2 : puissance de la force exercée sur le fluide environnant.

C'est une partie de ce dernier terme qui constituera la puissance acoustique du haut-parleur.

II. Puissance acoustique

B.II.1. Si I est l'intensité acoustique, elle est reliée à I_{dB} par la relation :

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

On en déduit :

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{I_{dB}}{10}}$$

On obtient ainsi, aux deux fréquences proposées :

$$\underline{60 \text{ Hz}} : I = 10^{-12} \cdot 10^{8,9} \quad I = 7,9 \cdot 10^{-4} \text{ W} \times \text{m}^{-2}$$

$$\underline{200 \text{ Hz}} : I = 10^{-12} \cdot 10^{9,9} \quad I = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ W} \times \text{m}^{-2}$$

B.II.2. L'émission du haut-parleur est isotrope sur un demi-espace. La puissance émise est uniformément répartie sur des demi-sphères centrées sur le haut-parleur (supposé ponctuel).

Sur la sphère de rayon unité, on peut donc écrire :

$$P_a = 2\pi I$$

Soit :

$$\text{à } \underline{60 \text{ Hz}} : P_a = 4,99 \text{ mW}$$

$$\text{à } \underline{200 \text{ Hz}} : P_a = 49,9 \text{ mW}$$

Ce qui donne, comme rendement :

$$\rho = \frac{P_a}{P_{\text{électrique}}}$$

$$\text{à } \underline{60 \text{ Hz}} : \rho = 2,55 \%$$

$$\text{à } \underline{200 \text{ Hz}} : \rho = 5,9 \%$$

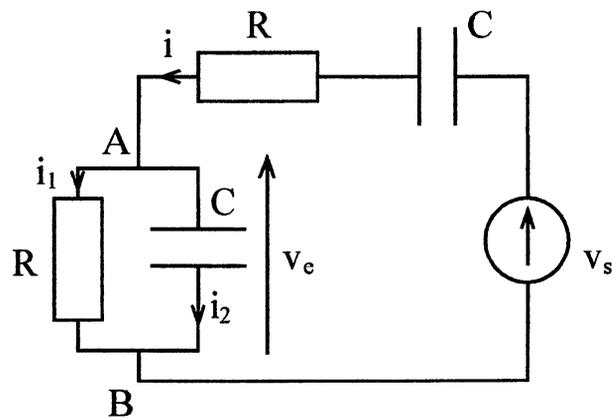
B.II.3. Le rendement acoustique reste faible, une toute petite partie de la puissance électrique est transformée en puissance acoustique.

Les pertes par effet Joule représentent une partie assez faible de ces pertes.

C'est au niveau de l'interaction entre la membrane et l'air qu'il y a des pertes, par exemple, à cause de la viscosité du gaz.

En tout état de cause, le modèle d'étude est trop rudimentaire pour pouvoir en rendre compte de façon satisfaisante :

- la membrane se déforme, et n'a donc pas un simple mouvement de translation,
- l'air environnant est mis en mouvement, et la vitesse de la membrane par rapport au fluide n'est plus \dot{z} .

C. Alimentation du haut-parleur

C.1. a) Aux bornes de R-C série, on peut écrire :

$$v_s - v_e = Ri + \frac{1}{C} \int i \, dt$$

Et aux bornes AB :

$$v_e = Ri_1 = \frac{1}{C} \int i_2 \, dt \quad i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = \frac{v_e}{R} \quad i_2 = C \frac{dv_e}{dt} \quad i = \frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt}$$

b) En dérivant une fois la première équation, on a :

$$\frac{dv_s}{dt} - \frac{dv_e}{dt} = R \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) + \frac{1}{C} (i_1 + i_2)$$

Soit :

$$\frac{dv_s}{dt} - \frac{dv_e}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + RC \frac{d^2v_e}{dt^2} + \frac{v_e}{RC} + \frac{dv_e}{dt}$$

en ordonnant :

$$\frac{d^2v_e}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{(RC)^2} = \frac{1}{RC} \frac{dv_s}{dt}$$

C.2. a) En remplaçant v_s par Gv_e , on obtient l'équation :

$$\frac{d^2v_e}{dt^2} + \frac{3}{RC} (3 - G) \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{(RC)^2} = 0$$

qui admet une solution sinusoïdale pure pour $G = 3$ (annulation du terme d'amortissement).

b) Pour $G = 3$, l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2v_e}{dt^2} + \frac{1}{(RC)^2} v_e = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$N_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

c) Application Numérique :

$$N_0 = 338,6 \text{ Hz}$$

C.3. a) On a un amplificateur non inverseur. Son gain G s'écrit :

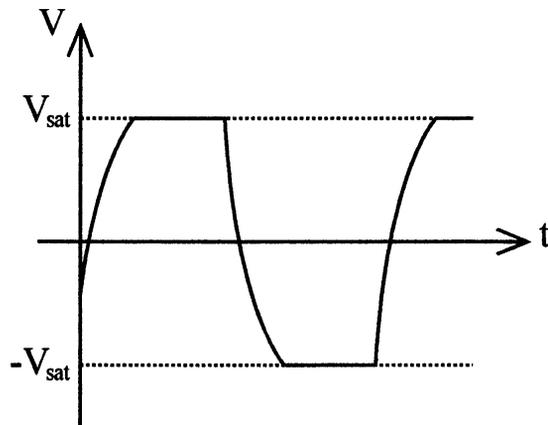
$$G = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Pour qu'il y ait oscillation spontanée, il faut que $G = 3$, soit $\frac{R_2}{R_1} = 2$ $R_2 = 2 R_1$:

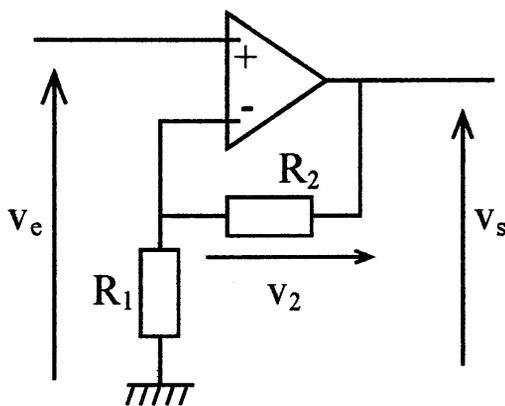
$$R_2 = 110 \text{ k}\Omega$$

b) Si G devient accidentellement :

- inférieur à 3 : on a une oscillation atténuée exponentiellement en régime transitoire, donc aucune oscillation en régime permanent ;
- supérieur à 3 : on a théoriquement une oscillation d'amplitude croissante exponentiellement, ce qui signifie que, dans la pratique, on atteint en crête un régime de saturation :



C.4.



a)

$$v_s = G v_e$$

$$v_e = v_+ = v_-$$

$$v_2 = v_s - v_- = v_s - v_e$$

$$v_2 = v_s \left(1 - \frac{1}{G} \right)$$

$$v_s = \frac{G}{G-1} v_2$$

b) $G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ avec $R_2 = f(v_2)$ et $v_2 = (v_s)$

On obtient numériquement :

R_2 en $k\Omega$	238	185	150	126	106	90	74	51	37
V_2 en V	4	5	6	7	8	9	10	12	14
G	5,32	4,36	3,72	3,29	2,92	2,64	2,34	1,93	1,67
V_s en V	4,92	6,49	8,2	10,05	12,16	14	14	14	14



fonctionnement non linéaire

C.A.P.E.S.

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de Chimie avec applications - Session : 1995

PREMIÈRE PARTIE : LES HYDROCARBURES

I. Traitement du pétrole brut.

1. Décomposition anaérobie de micro-organismes.
2. – Dessalage : enlever le sel présent dans les gisements, risque de corrosion.
 – Distillation sous pression atmosphérique : obtention des principales coupes.
 – Distillation sous pression réduite : pour éviter décomposition des coupes lourdes.
 – Craquage : casser les molécules en plus petites.
 – Réformage : transformer les molécules en ramifiées ou cycliques.
3. – Fraction légère gazeuse.
 – Essence ou naphtha.
 – Kérosène.
 – Gazole, huile.
 – Résidu atmosphérique ou fuel lourd ou bitume.

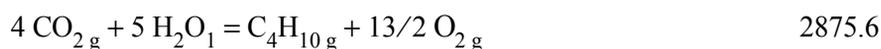
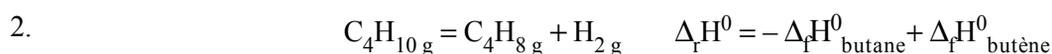
II. Enthalpies standard de réaction.



$$\Delta H = \xi \Delta_f H^0 \quad \xi = 10/58$$

$$\Delta_f H^0 = -58/10 \cdot 495,8 = -2875,6 \text{ kJ mol}^{-1}$$

$$\Delta_r U = \Delta_f H^0 - \Delta v \cdot RT = -2875,6 + 3,5 \cdot 8,32 \cdot 0,298 = -2867 \text{ kJ mol}^{-1}$$



$$\Delta_f H^0_{\text{butane}} = 4 \Delta_f H^0_a + 5 \Delta_f H^0_b - \Delta_f H^0_{\text{combustion butane}}$$

$$\Delta_f H^0_{\text{butane}} = -125,4 \text{ kJ mol}^{-1}$$

$$\Delta_r H^0 = -\Delta_f H^0_{\text{butane}} + \Delta_f H^0_{\text{butène}} = 125,4 - 0,13 = 125,27 \text{ kJ mol}^{-1}$$

3.



$$\Delta_r H^0 = +2 E_{\text{C-C}} - 2 E_{\text{C=C}} + 4 E_{\text{C-H}} - 2 E_{\text{H-H}}$$

$$\Delta_r H^0 = 2.345 - 2.610 + 4.414 - 2.435 = 256 \text{ kJ mol}^{-1}$$

molécule conjuguée : facteur non pris en compte ou calculs faits avec des valeurs moyennes.

III. Enthalpie libre d'un système physico-chimique ; enthalpie libre de réaction.

1.

$$dG = vdp - SdT + \Delta_r G d\xi$$

2.

$$\Delta_r G = (\partial G / \partial \xi)_{T, P} = -A$$

s'exprime en kJ mol^{-1}

$$\Delta_r G = \sum v_i \mu_i$$

3.

$$\Delta_r G \cdot d\xi < 0 \quad \text{ou} \quad A \cdot d\xi > 0 \quad \text{éventuellement} \quad \Delta_r G < 0$$

4. Équilibre

$$\Delta_r G = 0 = \Delta_r G^0 + RT \ln \pi \left(a_i^{\text{équilibre}} \right)^{v_i}$$

$$\Delta_r G^0 = \sum v_i \mu_i^0$$

$$\pi \left(a_i^{\text{équilibre}} \right)^{v_i} = -\Delta_r G^0 / RT$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] [\text{OH}^-] = K_e$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] [\text{A}^-] / [\text{AH}] = K_a$$

Activité de l'eau solvant = 1 (référence corps pur).

Activité des solutés = $\frac{\text{concentration}}{C^0}$ référence : solution infiniment diluée, ou état standard à la concentration 1 mol L^{-1} ayant les propriétés de la solution infiniment diluée.

VI. Isomérisation du (E)-but-2-ène en (Z)-but-2-ène en phase gazeuse.

1.

$$\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 = \Delta_f H^0_Z - \Delta_f H^0_E - 298 \left(S^0_Z - S^0_E \right)$$

$$\Delta_r G^0 = -5,69 + 10,05 - 0,298 (300,5 - 296,2) = 3,08 \text{ kJ mol}^{-1}$$

$$2. \quad \begin{matrix} E & = & Z \\ 1 - \xi & & \xi \end{matrix}$$

$$P_E = (1 - \xi) P_T, \quad P_Z = \xi P_T,$$

$$G = \sum n_i \mu_i$$

$$G = (1 - \xi) [\mu_E^0 + RT \ln(1 - \xi)] + \xi [\mu_Z^0 + RT \ln \xi]$$

ou

$$G = \mu_E^0 + \xi \Delta_r G^0 + RT [(1 - \xi) \ln(1 - \xi) + \xi \ln \xi]$$

$$3. \quad \Delta_r G = (\partial G / \partial \xi)_{T, P} = \Delta_r G^0 + RT \ln(\xi / 1 - \xi)$$

à l'équilibre

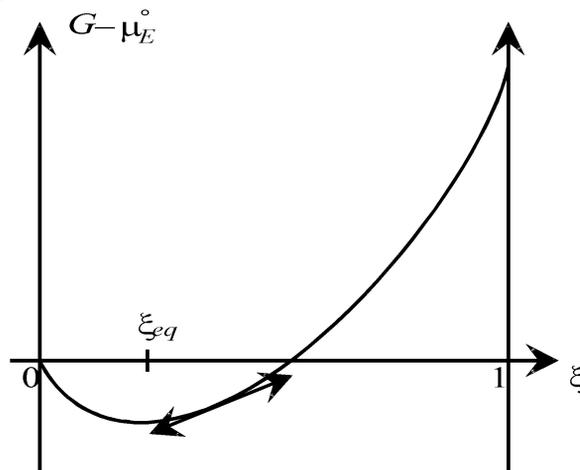
$$0 = \Delta_r G^0 + RT \ln(\xi_{\text{éq}} / 1 - \xi_{\text{éq}})$$

$$(\xi_{\text{éq}} / 1 - \xi_{\text{éq}}) = 0,289 \quad \xi_{\text{éq}} = 0,22$$

$$4. \quad G - \mu_E^0 = 3080 \xi + 2479,36 [(1 - \xi) \ln(1 - \xi) + \xi \ln \xi]$$

$$\xi = 0 \quad G - \mu_E^0 = 0 \quad \xi = 1 \quad G - \mu_E^0 = 3080 \text{ J}$$

représentation graphique :



$$\Delta_r G (\xi \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$$

$$\Delta_r G (\xi \rightarrow 1) \rightarrow +\infty$$

 $\Delta_r G$ représentée par la pente.

V. Étude thermodynamique de la stabilité des hydrocarbures.

$$1. \quad x C_s + y/2 H_{2g} = C_x H_{yg}$$

$$2. \quad \Delta_r H^0 \text{ et } \Delta_r S^0 \text{ supposées constantes ou } \Delta_r C_p = 0$$

pente positive donc $\Delta_r S^0$ négative liée à une diminution du nombre de moles de réaction.

3. $\Delta_f G^0 \gg 0$ composé instable par rapport aux corps simples. Cinétique très lente.

4.
$$C_n H_{2n+2} = H_2 + C_n H_{2n} \quad \Delta_r G^0 = \Delta_f G^0_{\text{alcène}} - \Delta_f G^0_{\text{alcane}}$$

$\Delta_r G^0 < 0$ aux hautes températures.

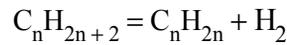
Alcène le plus stable.

Utilisé dans le craquage.

VI. Craquage des alcanes.

1.
$$C_n H_{2n+2} = C_{n-m} H_{2(n-m)+2} + C_m H_{2m}$$

$$\Delta_r H^0_{C-C} = 2 E_{C-C} - E_{C=C} = 80 \text{ kJ mol}^{-1}$$



$$\Delta_r H^0_{C-H} = E_{C-C} - E_{C=C} + 2 E_{C-H} - E_{H-H} = 128 \text{ kJ mol}^{-1}$$

réaction thermodynamiquement la plus favorable : craquage pur.

2.
$$d \ln K / dT = \Delta_r H^0 / RT^2$$

$\Delta_r H^0 > 0$ une augmentation de la température favorise la dissociation.

$\Delta v' = 1$ une augmentation de la pression ne favorise pas la dissociation haute température, basse pression.

3. Éthylène.

Vapeur d'eau joue différents rôles :

- Cinétique : abaisse les pressions partielles et favorise l'obtention d'éthylène.
- Thermique : a une grande conductivité et contribue aux échanges qui doivent être rapides.
- Chimique : évite la formation de coke $C + H_2O = CO + H_2$.

VII. Réformage des alcanes.

1. Coupes correspondant aux essences, pour les ramifier.

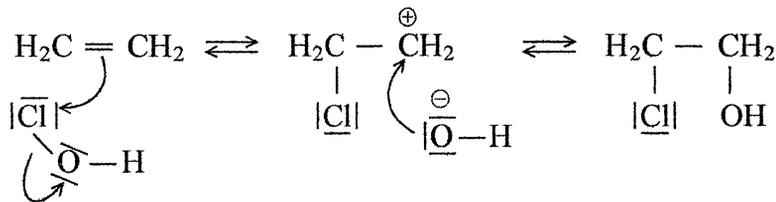
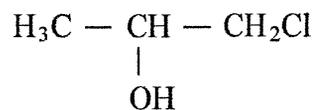
2. L'indice d'octane d'un carburant est de x s'il a le même pouvoir antidétonant qu'un mélange comportant :
 - x % d'isooctane (2-2-4-triméthylpentane),
 - 1 - x % d'heptane.

DEUXIÈME PARTIE : L'OXIRANE ET L'ÉTHANEDIAL

I. Obtention de l'oxirane ou oxyde d'éthylène à partir de l'éthylène (ou éthène) par le procédé à la chlorhydrine.

1. Étude de la réaction (1).

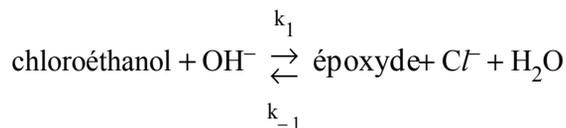
a.

b. Cl^+ électrophile OH^- nucléophile.

Produit majoritaire 1-chloropropan-2-ol :

2. Étude cinétique de la réaction (2).

a.



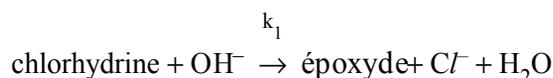
$$v = d[\text{époxyde}]/dt = k_1 [\text{chloroéthanol}][OH^-] - k_{-1} [\text{époxyde}][Cl^-]$$

à l'équilibre :

$$v = 0$$

$$\frac{[\text{époxyde}][Cl^-]}{[\text{chloroéthanol}][OH^-]} = \frac{k_1}{k_{-1}} = K$$

b.



$$d[OH^-]/dt = -k_1 [\text{chloroéthano}][OH^-] = -k_1 [OH^-]^2$$

$$\frac{1}{[OH^-]} - \frac{1}{[OH^-]_{ini}} = k_1 t$$

tableau de mesure ou courbe amenant à valeur moyenne de $k_1 = 4,72 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ mol}^{-1} \text{ L}$

donc avec K :

$$k_{-1} = 1,53 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \text{ mol}^{-1} \text{ L}$$

c. $\ln k_1 = \ln A - E_a/RT$

tableau ou courbe $\ln k_1 = f(1/T)$

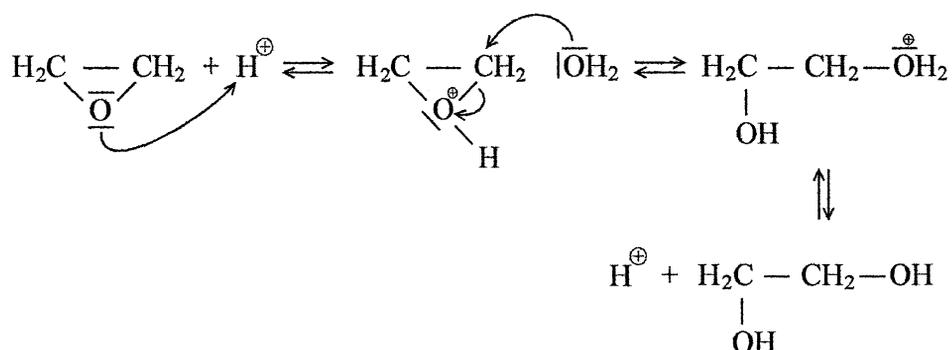
$$E_a = 94,1 \text{ kJ mol}^{-1}$$

II. Obtention et utilisation de l'éthane-1,2-diol ou éthylèneglycol.

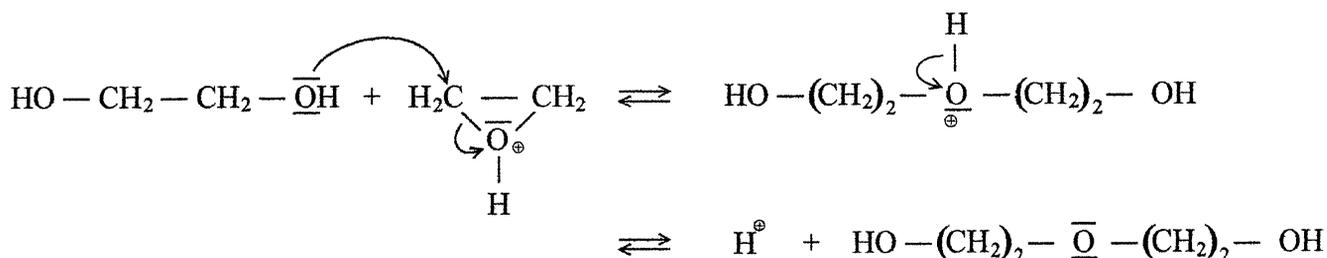
1. Obtention de l'éthane-1,2-diol.



mécanisme :



b. Mécanisme :

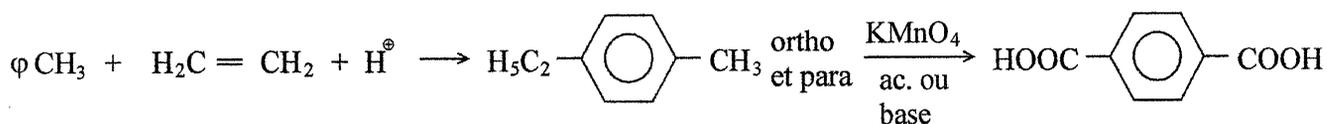


Formule semi-développée

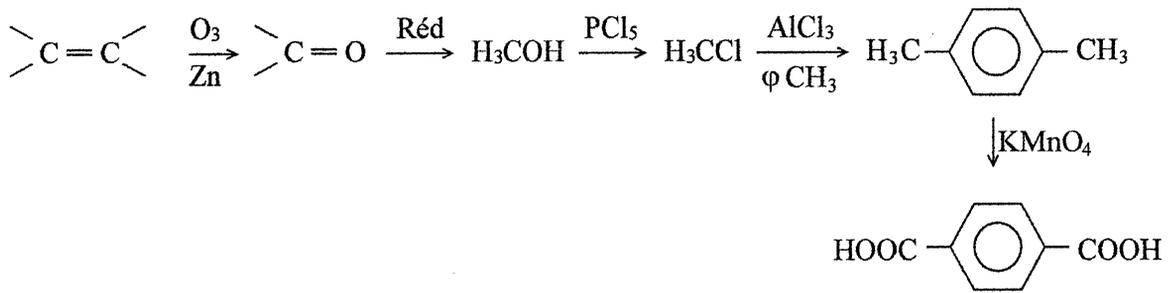
c. $\text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{CH}_2\text{OH}$ obtenu en traitant l'époxyde par NH_3 .

2. Utilisation de l'éthane-1,2-diol pour la fabrication du polytéréphtalate d'éthylèneglycol.

a. Synthèse de l'acide téréphtalique.



Pour faire « $\text{H}_5\text{C}_2^\oplus$ » on peut aussi :



b. Règles de Holleman.

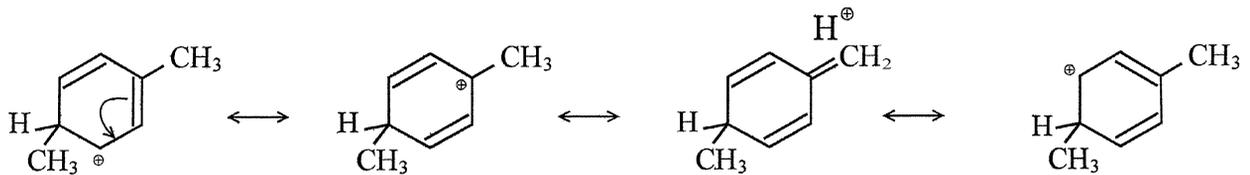
Régiosélectivité : position de la deuxième substitution ne dépend que du substituant déjà présent.

CH_3 inductif donneur oriente en ortho-para.

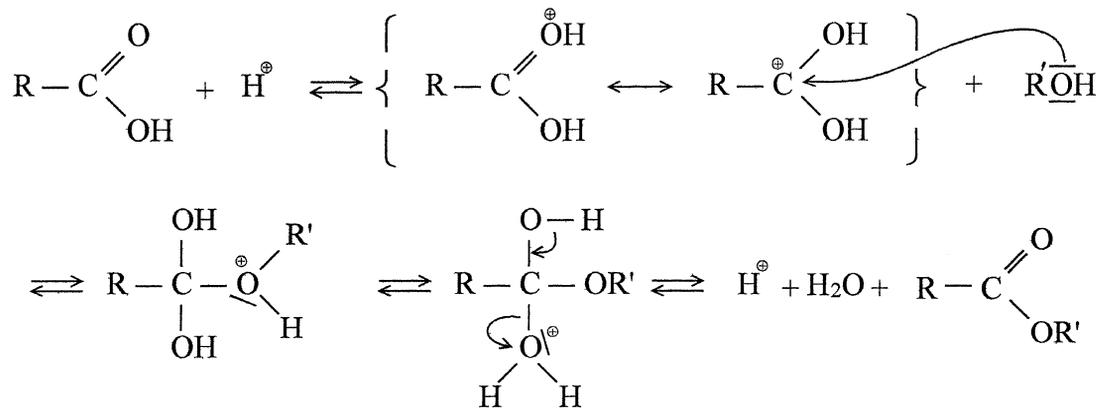
Sous contrôle cinétique : plus rapide que sur le benzène.

Justification : tout ce qui stabilise l'intermédiaire de Wheland stabilise aussi le complexe activé donc diminue l'énergie d'activation et augmente la vitesse.

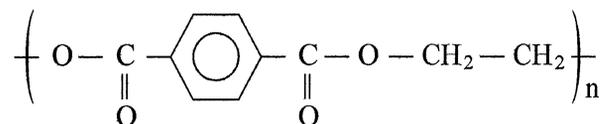
En ortho-para quatre formes mésomères contre trois en méta :



c. Mécanisme de l'estérification :



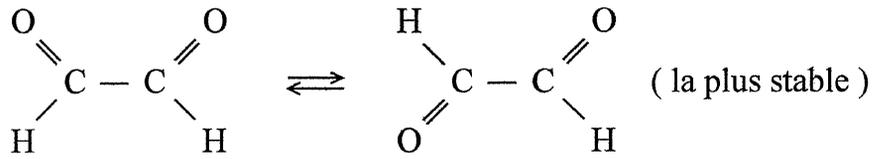
d. Formule du TPE :



III. Obtention et réactivité de l'éthanedial ou glyoxal.

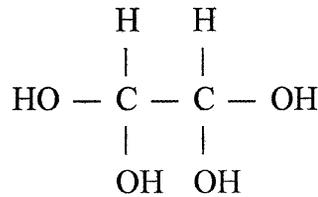
1. Obtention du glyoxal et de ses hydrates.

a. 2 conformations

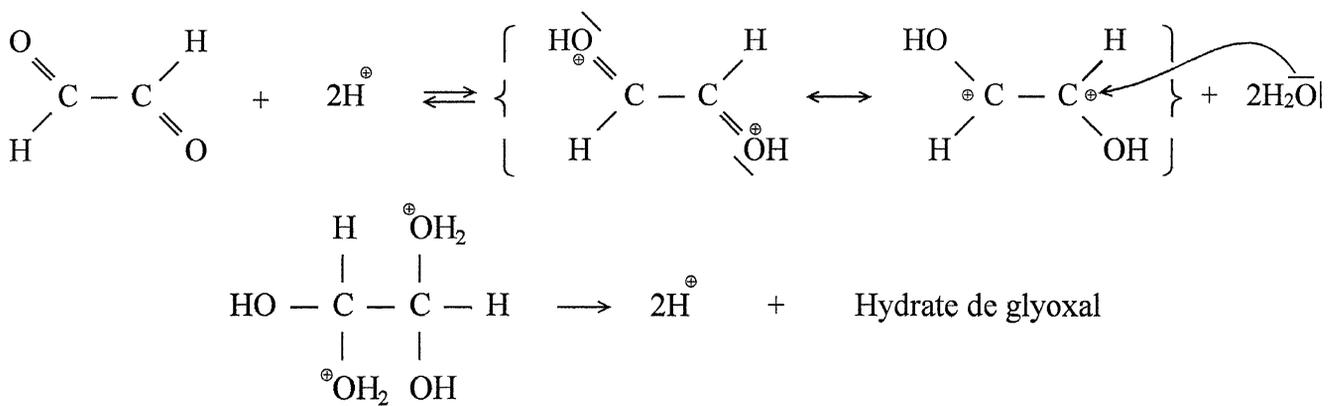


Atomes d'oxygène les plus éloignés.

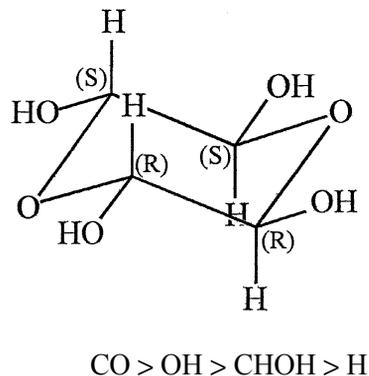
b. Hydrate de glyoxal.



Mécanisme :



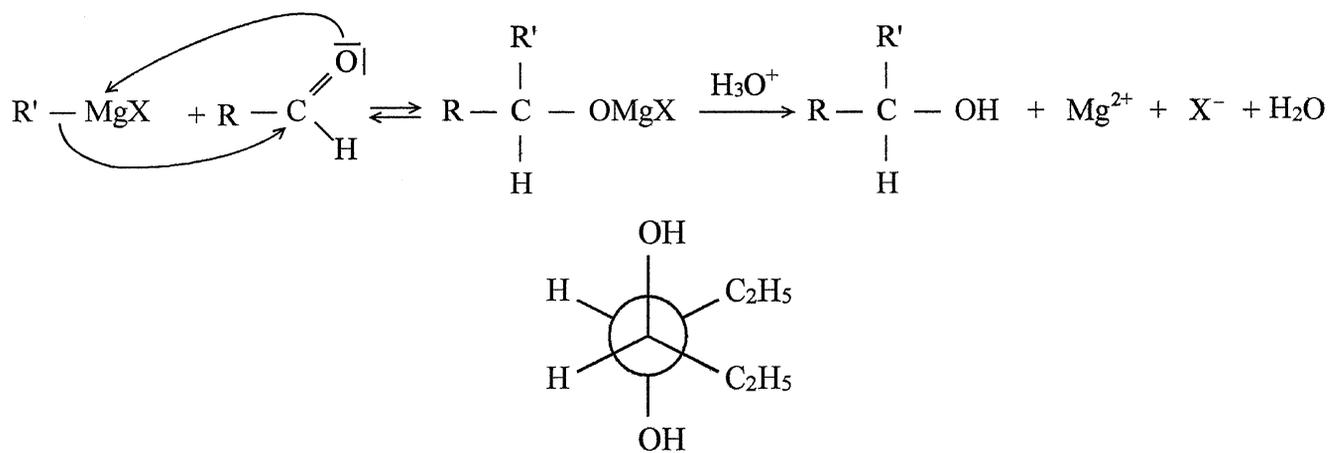
c. Conformère chaise tous les OH en position équatoriale :



2 carbones R et 2 carbones S.

Non chiral.

2. a. Mécanisme :

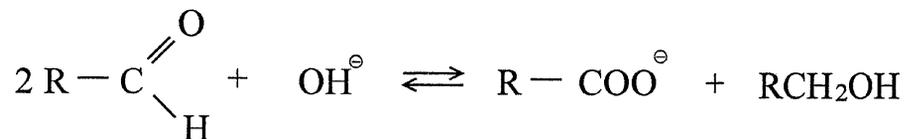


b. Projection de Newman.

On ne peut rien conclure car dépend de la conformation initiale du glyoxal.

3. Réaction de Cannizzaro

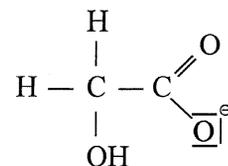
a. Équation-bilan :



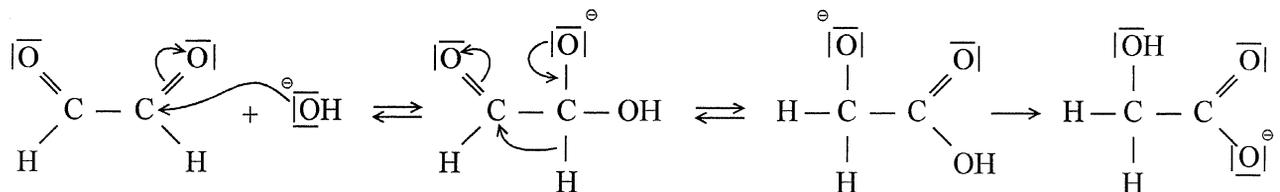
doit être écrite en milieu basique.

Oxydoréduction

b. Formule semi-développée :

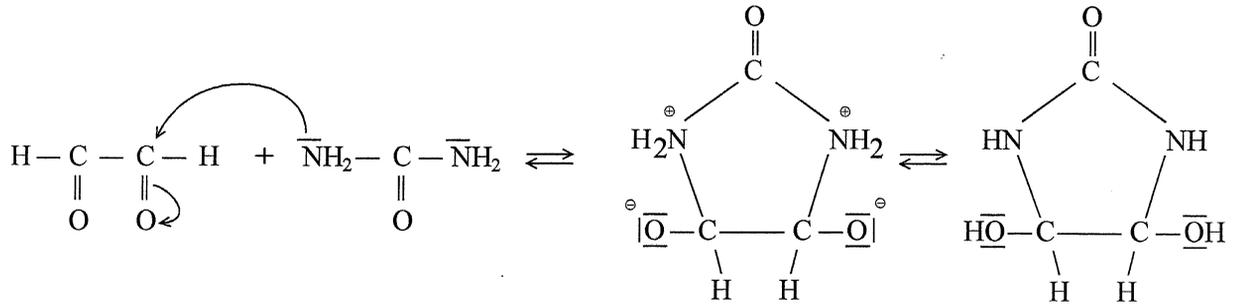
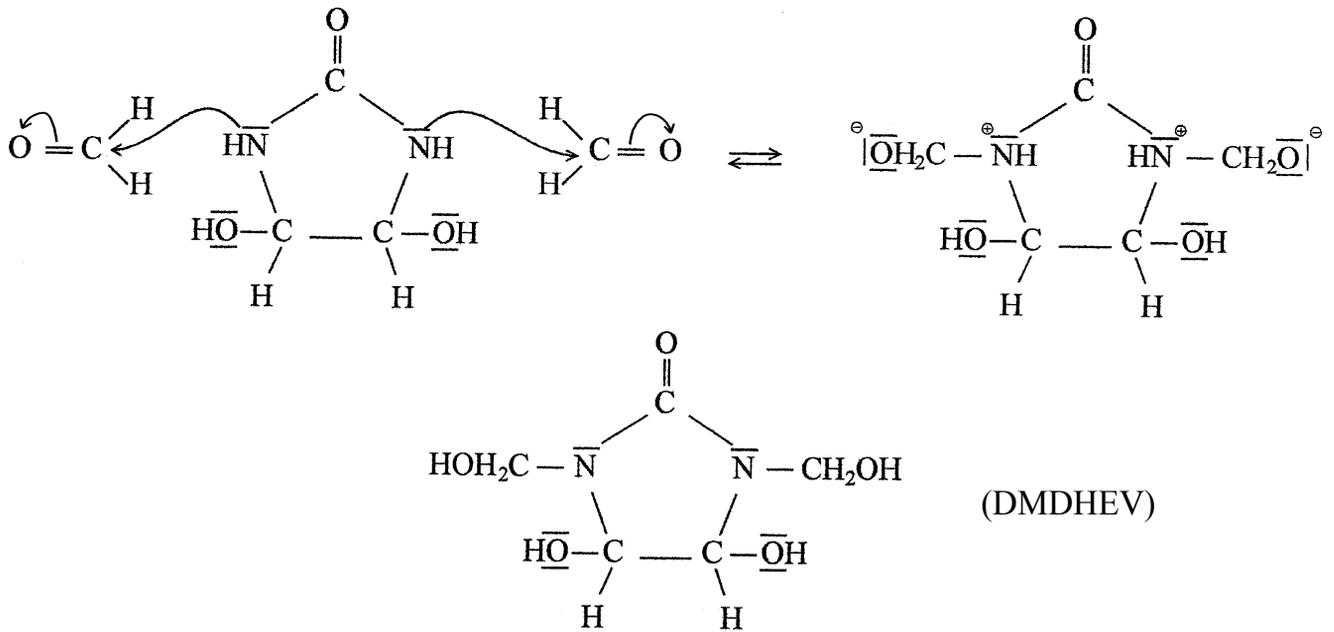


Mécanisme :

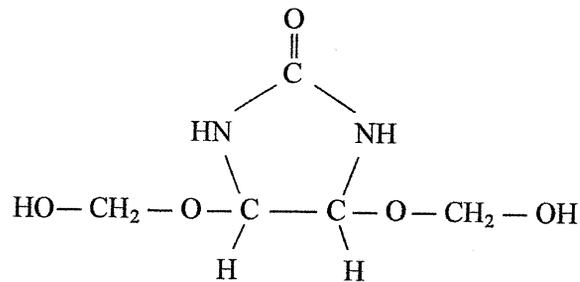


4. Action sur les composés azotés.

a. Mécanisme :

b. Attaque de \bar{N} : mécanisme :autre possibilité : attaque de \bar{O} : formation d'hémiacétal.

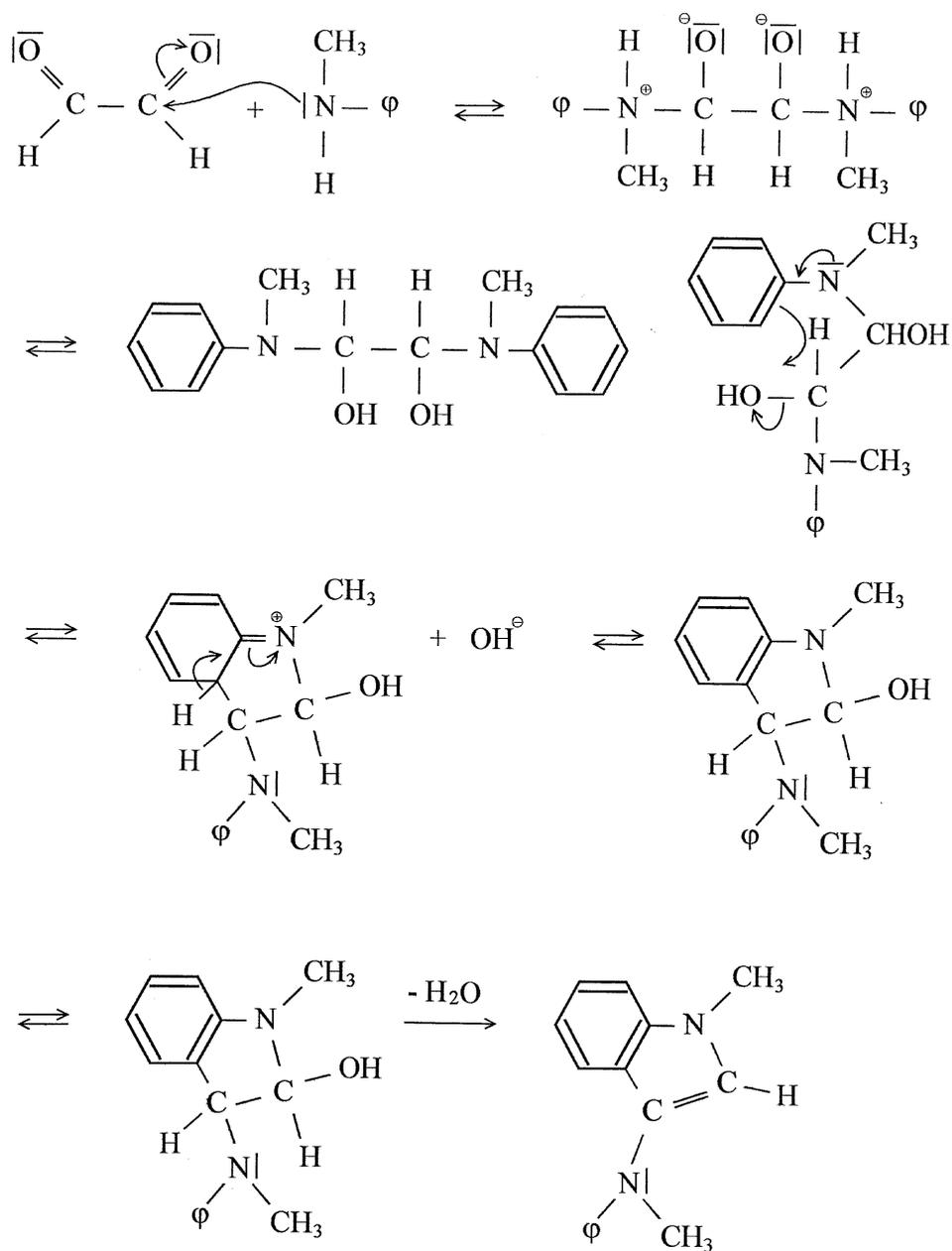
Formule :



c. Réticuler : pontage des chaînes de la cellulose afin de créer un réseau tridimensionnel.

Élimination d'eau entre les fonctions OH de la cellulose et des CH_2OH de la DMDHEU.

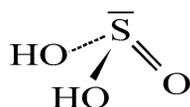
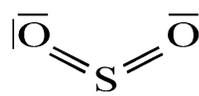
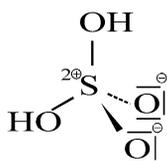
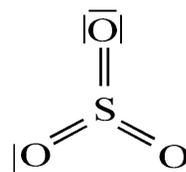
d. Mécanisme :



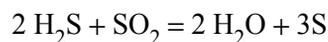
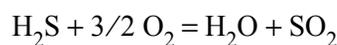
TROISIÈME PARTIE : LE DIOXYDE DE SOUFRE

I. Généralités sur la chimie du soufre.

- $$\text{H}_2\text{S} + \text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{CH}_2\text{OH} = \text{H}_3\text{N}-\text{CH}_2-\text{CH}_2\text{OH} + \text{HS}^-$$
- | | | | | |
|----------------------|-------------------|------------|---|---|
| H_2S | , S^{2-} | S | SO_2 , H_2SO_3 | SO_3 , H_2SO_4 |
| -II | | 0 | +IV | +VI |

3. H_2SO_3 pyramide SO_2 coudée H_2SO_4 tétraèdre SO_3 plane

4.



5. Stocker le soufre et l'utiliser en fonction de la demande.

6. V_2O_5 pentaoxyde de divanadium. SO_3 récupéré par barbotage dans l'acide sulfurique.

7. Engrais.

Acide phosphorique puis au choix décapage métaux, obtention de TiO_2 , traitement des minerais, détergents, etc.

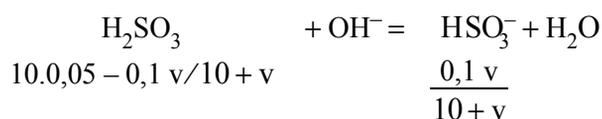
II. Propriétés acido-basiques du dioxyde de soufre en solution.

1. Dosage potentiométrique d'une solution d'acide sulfureux par l'hydroxyde de sodium.

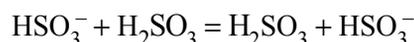
a. Électrode de verre : électrode de mesure $E = A + B \text{ pH}$ Électrode au calomel : électrode de référence si $[Cl^-] = \text{constante}$.b. • $v = 0 \text{ cm}^3$

Acide trop fort pour négliger la dissociation ; équation du second degré :

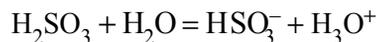
$$[\text{H}^+]^2 + 0,01 [\text{H}^+] - 5 \cdot 10^{-4} = 0 \quad \text{pH} = 1,75$$

• $v = 2,5 \text{ cm}^3$ hors du domaine d'Henderson.

puis :



et



$$[\text{H}_2\text{SO}_3] = (0,5 - 0,1 v/10 + v) - [\text{H}^+] \quad \text{et} \quad [\text{HSO}_3^-] = (0,1 v/10 + v) + [\text{H}^+]$$

avec K_{a1} équation du second degré.

$$[\text{H}^+]^2 + 0,03 [\text{H}^+] - 2 \cdot 10^{-4} = 0 \quad \text{pH} = 2,25$$

- $v = 5,0 \text{ cm}^3$ composé amphotère.



$$\text{pH} = 1/2 (\text{p}K_{a1} + \text{p}K_{a2}) = 4,5$$

$$[\text{H}^+] = 10^{-4,5} \quad [\text{H}_2\text{SO}_3] = 10^{-4}$$

hypothèse un peu limite si équation du second degré $\text{pH} = 4,56$.

- $v = 7,5 \text{ cm}^3$ domaine d'Henderson $\text{pH} = \text{p}K_{a2} = 7$

 $[\text{H}^+]$ et $[\text{OH}^-]$ négligeables.

- $v = 10,0 \text{ cm}^3$ solution de sulfite de sodium $0,025 \text{ mol L}^{-1}$

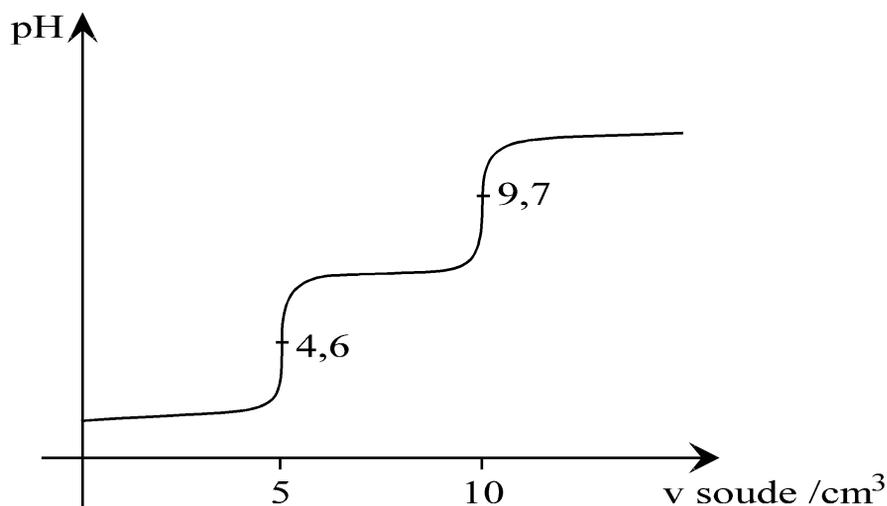
$$K_{a2} = c [\text{H}^+]^2 / K_e$$

$$\text{pH} = 9,7$$

- $v = 15,0 \text{ cm}^3$ 5 cm^3 soude en excès.

$$\text{pH} = 12,3$$

c. Allure de la courbe :



2. Dosage d'un mélange d'acide sulfurique et d'acide sulfureux.

Le premier saut correspond au dosage des deux acidités de l'acide sulfurique et à la première acidité de l'acide sulfureux.

Le deuxième aux deux acidités des deux acides.

$$n(\text{H}_2\text{SO}_3) = (v_2 - v_1) [\text{OH}^-] = 7 \cdot 10^{-4} \text{ mole dans } 20 \text{ cm}^3$$

$$2 n(\text{H}_2\text{SO}_4) = 6 \cdot 10^{-4} \text{ mole dans } 20 \text{ cm}^3$$

$$[\text{H}_2\text{SO}_3] = 0,035 \text{ mol L}^{-1}$$

$$[\text{H}_2\text{SO}_4] = 0,015 \text{ mol L}^{-1}$$

3. Barbotage de dioxyde de soufre dans une solution d'hydroxyde de sodium.

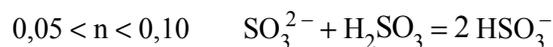


$$n < 0,05$$

Au début la soude est en excès et impose son $\text{pH} = \text{pK}_e + \lg(0,1 - 2n)$

$n = 0,05$ solution de sulfite de sodium de concentration $0,05 \text{ mol L}^{-1}$

$$\text{pH} = 1/2 (\text{pK}_{a2} + \text{pK}_e + \lg C) = 9,5$$



$$\text{pH} = \text{pK}_{a2} + \lg(0,1 - n/2n - 0,1)$$

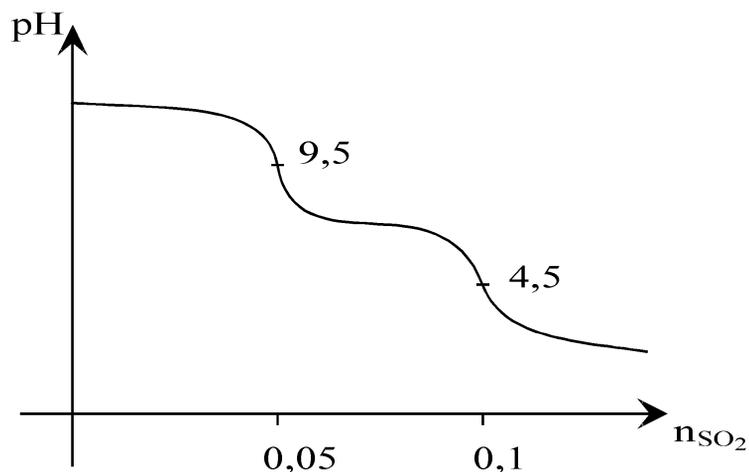
$n = 0,10$ solution d'hydrogénosulfite de sodium

$$\text{pH} = 1/2 (\text{pK}_{a2} + \text{pK}_{a2}) = 4,5$$

$n > 0,1$ mélange d' HSO_3^- et d' H_2SO_3

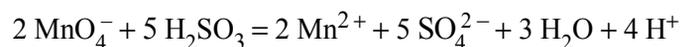
$$\text{pH} = \text{pK}_{a2} + \lg(0,1/n - 0,1)$$

Allure de la courbe :



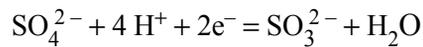
III. Propriétés oxydo-réductrices du dioxyde de soufre en solution.

1. Décoloration du permanganate de potassium en milieu acide :



rôle de conservateur, antioxydant (vin).

2. a.



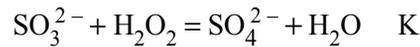
écrit à partir du couple $\text{H}_2\text{SO}_4/\text{SO}_3^{2-}$

$$E^0 = E_1^0 + 0,03 \lg K_{a1} K_{a2} - 0,06 \text{pH}$$

à $\text{pH} = 13$

$$E^0 = -0,88 \text{ V}$$

b.



à $\text{pH} = 13$

$$E^0(\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,77 - 0,06 \text{pH} = 0,99$$

$$\Delta_r G^0 = -2 F (0,88 + 0,99) = -RT \ln K$$

$$\lg K = 62,3 \quad K = 2 \cdot 10^{62}$$

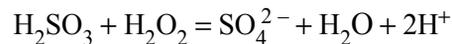
réaction très déplacée.

c. Au début du dosage :



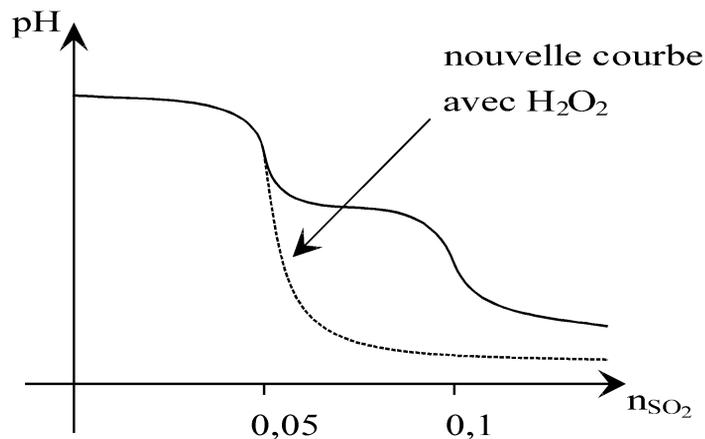
Pour $n = 0,05$ on a une solution de sulfate à la place de la solution de sulfite $\text{pH} = 7$.

Au-delà :



On produit des H^+ courbe voisine de celle d'un acide fort.

Allure de la courbe :



C.A.P.E.S**(Concours Externe)**SECTION : PHYSIQUE
ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électronique - Électrotechnique avec applications - Session : 1995

PREMIER PROBLÈME

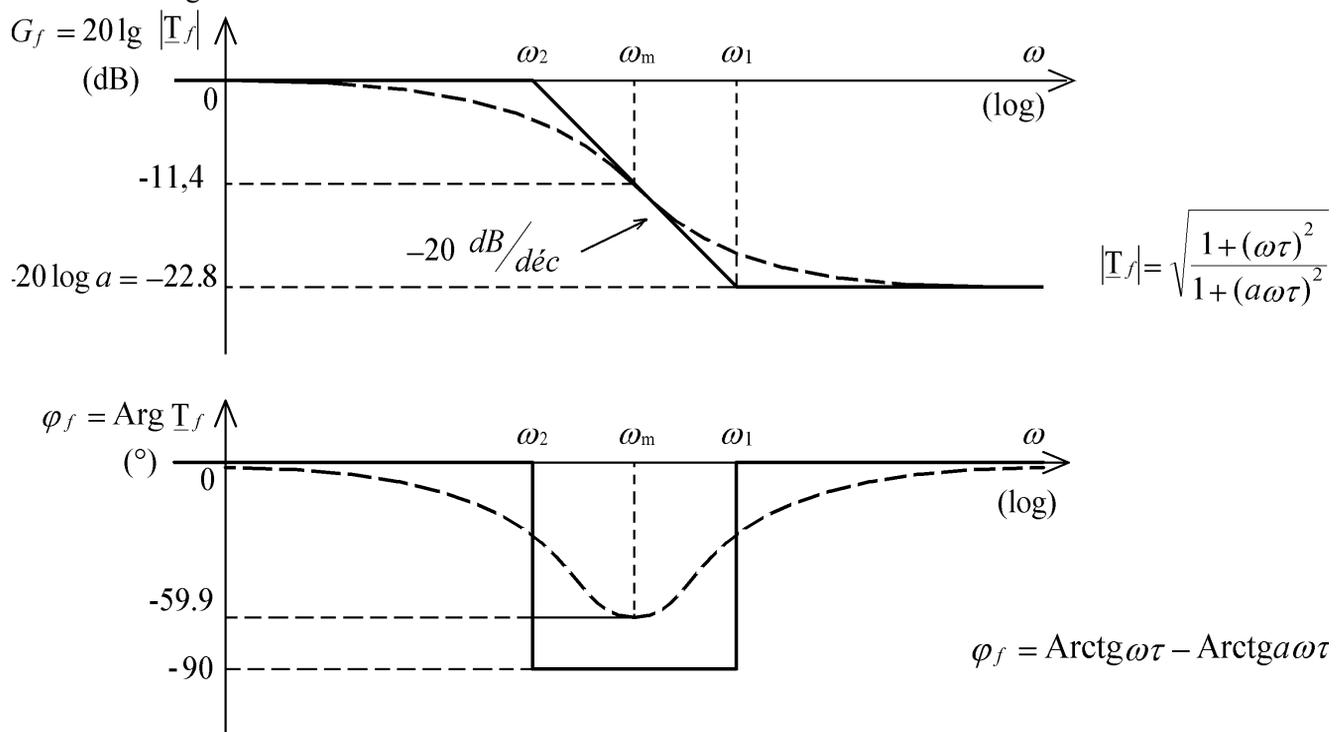
PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE GÉNÉRALE D'UNE BOUCLE À VERROUILLAGE DE PHASE

1. Étude du filtre.

$$1.1. \quad \underline{T}_f = \frac{\underline{V}_f}{\underline{V}_d} = \frac{1 + j R_2 C_1 \omega}{1 + j (R_1 + R_2) C_1 \omega} = \frac{1 + j \omega \tau}{1 + j \omega a \tau}$$

1.2. Diagramme de Bode :



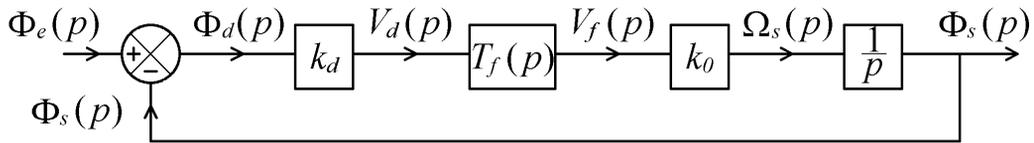
$$\omega_1 = \frac{1}{\tau} = 2500 \text{ rd/s} \quad \omega_2 = \frac{1}{a\tau} \approx 181 \text{ rd/s}$$

$$\omega_m = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}} \approx 673 \text{ rd/s} \Rightarrow \begin{cases} G_{f_m} = -20 \lg \sqrt{a} \approx -11,4 \text{ dB} \\ \varphi_{f_m} = -\text{Arctg } \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \approx -59,9^\circ \end{cases}$$

Filtre correcteur intégral ou à retard de phase.

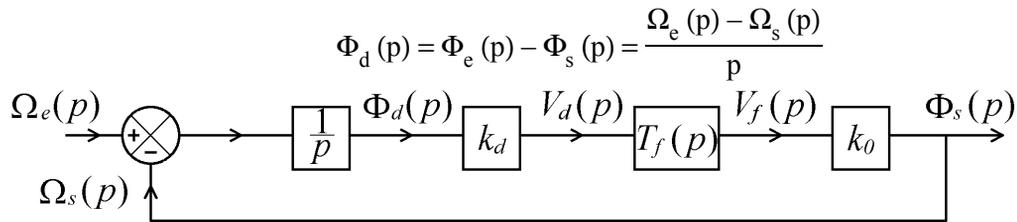
2. Synthèse de la boucle à verrouillage de phase.

2.1.

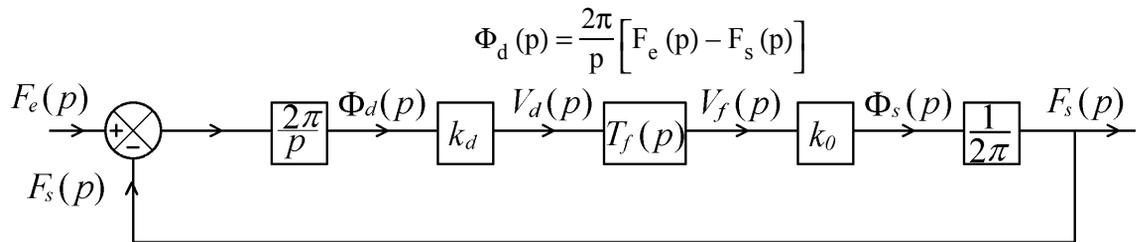


$$T_f(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + a \tau p} \quad \omega_s(t) = \frac{d\phi_s(t)}{dt} \rightarrow \Omega_s(p) = p \Phi_s(p)$$

2.2.



$$\Phi_d(p) = \Phi_e(p) - \Phi_s(p) = \frac{\Omega_e(p) - \Omega_s(p)}{p}$$



$$\Phi_d(p) = \frac{2\pi}{p} [F_e(p) - F_s(p)]$$

2.3. • Transmittance en boucle ouverte (schéma-bloc 21) :

$$T(p) = \frac{\Phi_s(p)}{\Phi_d(p)} = \frac{k_0 k_d T_f(p)}{p}$$

$$T(p) = \frac{T_0 (1 + \tau p)}{p (1 + a \tau p)}$$

$$T_0 = k_0 k_d \approx 62500 \text{ rd/s}$$

• Schéma-bloc du 22

$$T(p) = \frac{T_0 (1 + \tau p)}{p (1 + a \tau p)}$$

Donc quelle que soit la grandeur d'entrée choisie (phase, pulsation, fréquence) pour le schéma-bloc le système est décrit par la même transmittance en boucle ouverte.

2.4. Transmittance en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{\Phi_s(p)}{\Phi_e(p)} = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{T_0 (1 + \tau p)}{p (1 + a \tau p) + T_0 (1 + \tau p)}$$

$$H(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + \left(\tau + \frac{1}{T_0}\right)p + \frac{a \tau}{T_0} p^2} = \frac{1 + \tau p}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

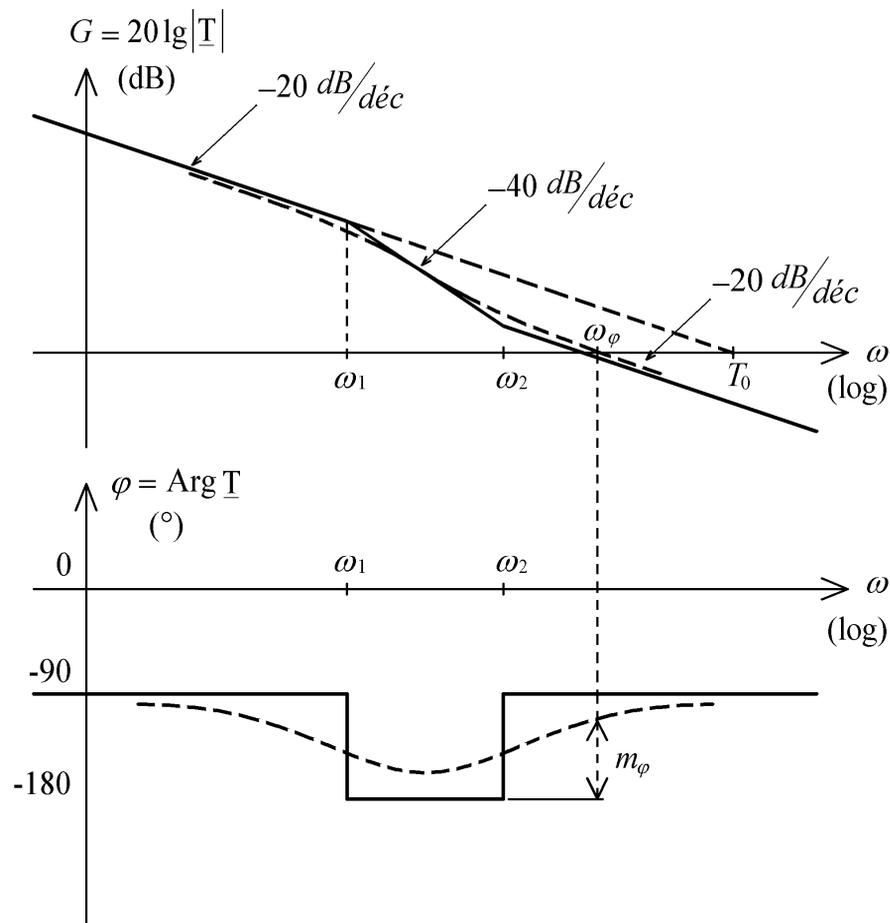
$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{T_0}{a \tau}} \approx 3365 \text{ rd/s} \\ \frac{2m}{\omega_0} = \tau + \frac{1}{T_0} \Rightarrow m = \frac{1 + \tau T_0}{2 \sqrt{a \tau T_0}} \approx 0,7 \end{cases}$$

3. Stabilité.

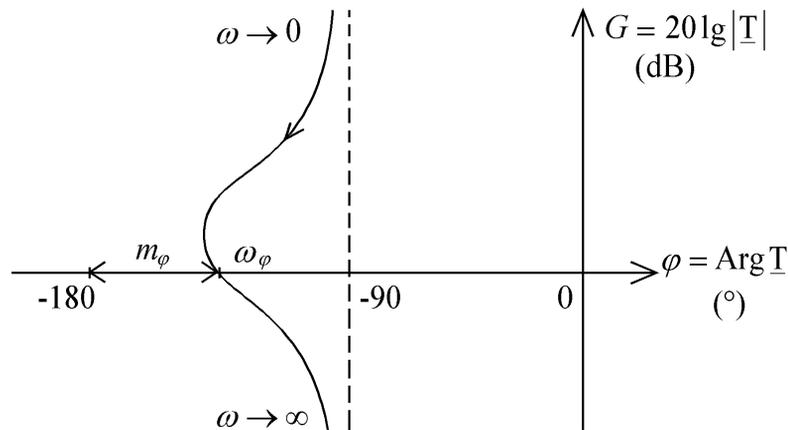
3.1.

$$\underline{T} = \frac{T_0 (1 + j \omega \tau)}{j \omega (1 + j a \omega \tau)} = \frac{T_0 \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right)}{j \omega \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{\tau} = 2500 \text{ rd/s} & T_0 \approx 62500 \text{ rd/s} \\ \omega_2 = \frac{1}{a \tau} \approx 181 \text{ rd/s} \end{cases}$$



3.2. Diagramme de Black.



Critère du revers : un système bouclé est stable si en décrivant le lieu de Black de la F.T.B.O. dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique ($0 \text{ dB}, -180^\circ$) à droite.

C'est le cas ici, le système est donc stable.

3.3. *Marge de phase* m_φ : à gain constant égal à 0 dB , c'est de déphasage supplémentaire qui ferait passer le lieu de Black de l'autre côté du point critique $m_\varphi = 180 + \varphi$ (φ : argument correspondant à $|T| = 1$). (Voir sur les diagrammes).

3.4. • Calcul de ω_φ :

$$|T| = \frac{T_0 \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}{\omega \sqrt{1 + a^2 \omega^2 \tau^2}} = 1$$

$$T_0^2 (1 + \omega^2 \tau^2) = \omega^2 (1 + a^2 \omega^2 \tau^2)$$

$$\omega^4 + \frac{1 - T_0^2 \tau^2}{a^2 \tau^2} \omega^2 - \frac{T_0^2}{a^2 \tau^2} = 0$$

$$\Omega^2 - 2,051 \cdot 10^7 \Omega - 1,282 \times 10^{14} = 0$$

$$\text{avec } \Omega = \omega^2$$

$$\Delta \approx 9,335 \times 10^{14} \Rightarrow \sqrt{\Delta} \approx 3,055 \times 10^7$$

$$\Omega \approx 2,553 \times 10^7$$

$$\omega_\varphi = \sqrt{\Omega} \approx 5050 \text{ rd/s}$$

• Calcul de φ :

$$\varphi = \text{Arctg } \omega_\varphi \tau - \text{Arctg } a \omega_\varphi \tau - 90 \approx -116,3^\circ$$

•

$$m_\varphi = 180 + \varphi = 63,7^\circ$$

On adopte généralement $m_\varphi \geq 45^\circ$. La stabilité est donc suffisante.

4. Précision.

$$\begin{aligned}
 4.1. \quad \Phi_d(p) &= \Phi_e(p) - \Phi_s(p) \\
 &= \Phi_e(p) \left[1 - \frac{\Phi_s(p)}{\Phi_e(p)} \right] = \Phi_e(p) [1 - H(p)] \\
 &\qquad\qquad\qquad \downarrow \\
 &\qquad\qquad\qquad \frac{T(p)}{1 + T(p)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 + T(p)} \Phi_e(p)$$

$$\Phi_d(p) = \frac{p(1 + a\tau p)}{p(1 + a\tau p) + T_o(1 + \tau p)} \Phi_e(p)$$

$$\Phi_d(p) = \frac{1}{T_o} \cdot \frac{p(1 + a\tau p)}{1 + \left(\tau + \frac{1}{T_o}\right)p + \frac{a\tau}{T_o}p^2} \Phi_e(p)$$

4.2.

$$\Phi_e(p) = \frac{\Phi}{p}$$

$$\varphi_{dP} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_d(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi_d(p)$$

$$\varphi_{dP} = 0$$

$$\begin{cases} v_e(t) = V_{eM} \sin(\Omega_o t + \Phi) \\ v_s(t) = V_{sM} \cos(\Omega_o t + \Phi) \end{cases} \Rightarrow \text{même pulsation } \Omega_o$$

↑
régime permanent

4.3.

$$\Phi_e(p) = \frac{\Delta \omega}{p^2}$$

$$\varphi_{dT} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_d(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi_d(p)$$

$$\varphi_{dT} = \frac{\Delta \omega}{T_o} \Rightarrow \varphi_s(t) = \varphi_e(t) - \frac{\Delta \omega}{T_o} = \Delta \omega \left(t - \frac{1}{T_o} \right)$$

$$\begin{cases} v_e(t) = V_{eM} \sin(\Omega_o t + \Delta \omega t) = V_{eM} \sin((\Omega_o + \Delta \omega)t) \\ v_s(t) = V_{sM} \cos \left[\Omega_o t + \Delta \omega \left(t - \frac{1}{T_o} \right) \right] = V_{sM} \cos \left[(\Omega_o + \Delta \omega)t - \frac{\Delta \omega}{T_o} \right] \end{cases}$$

⇒ Même pulsation $\Omega_o + \Delta \omega$.

5. Réponse indicielle.

$$5.1. \quad H(p) = \frac{\Phi_s(p)}{\Phi_e(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$\Phi_s(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \cdot \frac{\Phi}{p}$$

$\varphi_s(0^+) = 0$. La transformée de Laplace de $\frac{d\varphi_s}{dt}$ est :

$$p \Phi_s(p) = \frac{\Phi(1 + \tau p)}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On a donc $\frac{d\varphi_s}{dt}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d\varphi_s}{dt} = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \Phi_s(p)$

$$\frac{d\varphi_s}{dt}(0^+) = \tau \omega_0^2 \Phi$$

$$5.2. \quad (p^2 + 2m \omega_0 p + \omega_0^2) \Phi_s(p) = \omega_0^2 (1 + \tau p) \Phi_e(p)$$

En revenant à l'original :

$$\frac{d^2 \varphi_s(t)}{dt^2} + 2m \omega_0 \frac{d\varphi_s(t)}{dt} + \omega_0^2 \varphi_s(t) = \tau \omega_0^2 \frac{d\varphi_e(t)}{dt} + \omega_0^2 \varphi_e(t)$$

$$\varphi_e(t) = \Phi \Rightarrow \frac{d\varphi_e(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 \varphi_s(t)}{dt^2} + 2m \omega_0 \frac{d\varphi_s(t)}{dt} + \omega_0^2 \varphi_s(t) = \omega_0^2 \Phi$$

5.3. Détermination de $\varphi_s(t)$.

– Solution particulière de l'équation complète $\varphi_{s_2}(t) = \Phi$.

– Solution générale de l'équation sans second membre :

$$r^2 + 2m \omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta' = \omega_0^2 (m^2 - 1) < 0$$

($m \approx 0,7$)

Deux racines complexes conjuguées à partie réelle < 0

$$\begin{cases} r_1 = -\alpha + j \omega_p \\ r_2 = -\alpha - j \omega_p \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = m \omega_0 \\ \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - m^2} \end{cases}$$

$$\varphi_{s_2}(t) = e^{-\alpha t} (\lambda \cos \omega_p t + \mu \sin \omega_p t)$$

– On a donc

$$\varphi_s(t) = \varphi_{s_1}(t) + \varphi_{s_2}(t)$$

$$\boxed{\varphi_s(t) = \Phi + e^{-\alpha t} (\lambda \cos \omega_p t + \mu \sin \omega_p t)}$$

à $t = 0$

$$\varphi_s(0^+) = 0 = \Phi + \lambda \Rightarrow \lambda = -\Phi$$

d'autre part on a :

$$\frac{d\varphi_s(t)}{dt} = e^{-\alpha t} (-\lambda \omega_p \sin \omega_p t + \mu \omega_p \cos \omega_p t) - \alpha e^{-\alpha t} (\lambda \cos \omega_p t + \mu \sin \omega_p t)$$

$$\frac{d\varphi_s(0^+)}{dt} = \mu \omega_p - \alpha \lambda = \tau \omega_0^2 \Phi$$

$$\mu = \frac{\tau \omega_0^2 \Phi + \alpha \lambda}{\omega_p} = \frac{\tau \omega_0^2 \Phi - \alpha \Phi}{\omega_p}$$

$$\mu = \frac{\Phi (\omega_0 \tau - m)}{\sqrt{1 - m^2}} = \frac{\Phi \left(m - \frac{\omega_0}{T_0} \right)}{\sqrt{1 - m^2}}$$

Finalement on a :

$$\varphi_s(t) = \Phi \left[1 + e^{-m \omega_0 t} \left(\frac{\omega_0 \tau - m}{\sqrt{1 - m^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - m^2} t - \cos \omega_0 \sqrt{1 - m^2} t \right) \right]$$

Application Numérique : $\varphi_s(t) = \Phi \left[1 + e^{-2356 t} (0,9046 \sin 2403 t - \cos 2403 t) \right]$.

Sur la courbe de la figure 3 on retrouve bien :

– le régime permanent lorsque $t \rightarrow \infty$ et qui correspond à $\varphi_{s_1}(t) = \Phi$,

– le régime transitoire pseudo-sinusoïdal amorti ($m < 1$) correspondant à :

$$\varphi_{s_2}(t) = e^{-\alpha t} (\lambda \cos \omega_p t + \mu \sin \omega_p t)$$

5.4. *Temps de montée* : temps pour passer de 10 % de la valeur finale à 90 % de la valeur finale.

Temps de réponse : temps au-delà duquel la réponse ne s'écarte pas de $\pm 5\%$ de la valeur finale.

Sur la courbe de la figure 3 on obtient :

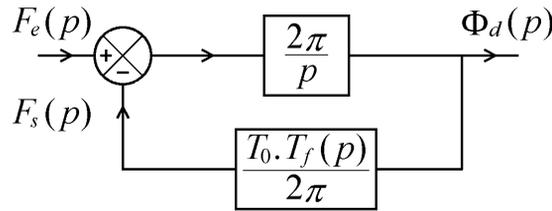
$$\begin{cases} t_m \approx 0,26 \text{ ms} \\ t_r \approx 1,26 \text{ ms} \\ D \approx 20\% \end{cases}$$

La valeur de m est bien choisie car elle donne :

- un temps de réponse bref,
- un temps de montée rapide tout en ayant un dépassement peu important.

6. Plage de verrouillage.

6.1.



$$T_f(p) = \frac{1 + \tau p}{1 + a \tau p}$$

6.2.

$$\frac{\Phi_d(p)}{F_e(p)} = \frac{\frac{2\pi}{p}}{1 + \frac{T_0 T_f(p)}{p}} = 2\pi \frac{1 + a \tau p}{p(1 + a \tau p) + T_0(1 + \tau p)}$$

$$\frac{\Phi_d(p)}{F_e(p)} = \frac{2\pi}{T_0} \frac{1 + a \tau p}{1 + \left(\tau + \frac{1}{T_0}\right)p + \frac{a \tau}{T_0} p^2}$$

$$F_e(p) = \frac{f_L}{p} \Rightarrow \Phi_d(p) = \frac{2\pi}{T_0} \frac{1 + a \tau p}{1 + \left(\tau + \frac{1}{T_0}\right)p + \frac{a \tau}{T_0} p^2} \cdot \frac{f_L}{p}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_d(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Phi_d(p) = \frac{2\pi f_L}{T_0}$$

φ_d est limité à $\frac{\pi}{2}$, on a donc :

$$\frac{2\pi f_C}{T_0} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2f_L = \frac{T_0}{2} \approx 31250 \text{ Hz}$$

7. Plage de capture.

7.1. En l'absence de signal d'entrée, la boucle à verrouillage de phase oscille à la fréquence $F_s = F_0$.

Lorsqu'on applique un échelon de fréquence permettant la capture, il apparaît un phénomène de battement c'est-à-dire que l'on a une tension $v_d(t)$ à la sortie du comparateur de phase qui est périodique de fréquence $F - F_s$ et de valeur moyenne non nulle. Cette tension $v_d(t)$ située dans la bande passante du filtre passe-bas fait décroître l'écart $F - F_s$, la tension $v_d(t)$ de fréquence plus faible est moins atténuée par le filtre, donc nouvelle décroissance de $F - F_s$... La boucle se verrouille et l'on a $F_s = F$.

7.2. Avec le schéma-bloc du 2.2. on a :

$$F_s(p) = \frac{k_0 T_f(p)}{2\pi} V_d(p)$$

$$F_s(p) = \frac{k_0}{2\pi} \frac{1 + \tau p}{1 + a \tau p} V_d(p)$$

7.3. A la limite du verrouillage on a $F_s = f_C$ d'où :

$$f_C = \frac{k_0}{2\pi} \sqrt{\frac{1 + \omega_C^2 \tau^2}{1 + a^2 \omega_C^2 \tau^2}} V_{dMAX}$$

Pour la plage de capture $2f_C$ et avec $\omega_C^2 \tau^2 \gg 1$ on a :

$$2f_C \approx \frac{k_0}{\pi} \cdot \frac{V_{dMAX}}{a}$$

$$2f_C \approx \frac{k_0}{a\pi} k_d \frac{\pi}{2} = \frac{k_0 k_d}{2a} = \frac{T_0}{2a}$$

Or

$$\frac{T_0}{2} = 2f_L$$

ce qui entraîne

$$2f_C = \frac{2f_L}{a} \approx 2264 \text{ Hz}$$

SECONDE PARTIE

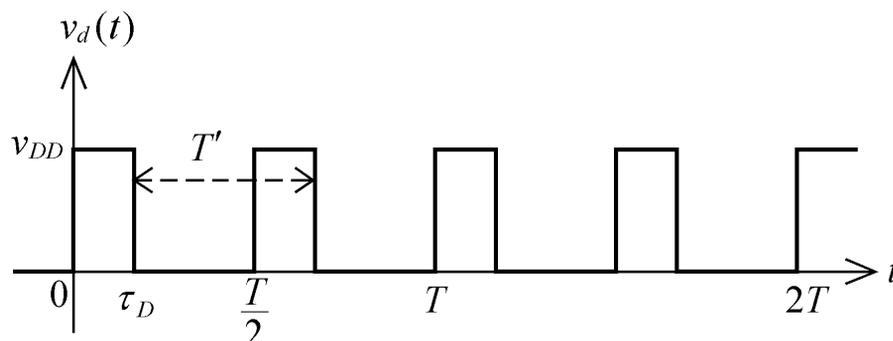
ÉTUDE STRUCTURELLE D'UN EXEMPLE DE BOUCLE À VERROUILLAGE DE PHASE

1. Étude du comparateur de phase.

1.1. Tableau de vérité de la porte «ou exclusif».

v_e	v_s	v_d
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1.2. 1.2.1.

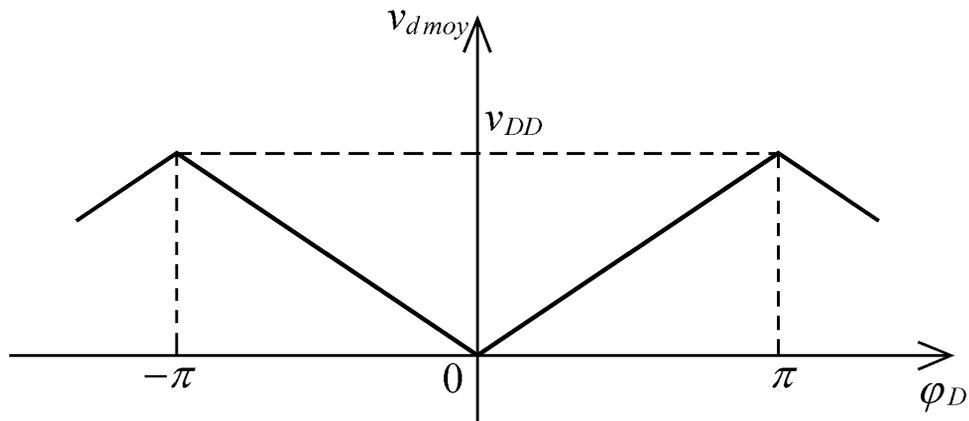


$$1.2.2. \quad V_{\text{dmoy}} = \frac{1}{T} \int_0^{T'} v_d(t) dt \quad T' = \frac{T}{2}$$

$$V_{\text{dmoy}} = \frac{2V_{\text{DD}}}{T} \tau_D \quad \tau_D = \frac{\phi_D}{2\pi} T$$

$$V_{\text{dmoy}} = \frac{V_{\text{DD}}}{\pi} \phi_D$$

1.3.



1.4.

$$0 < \phi_D < \pi \quad k_d = \frac{V_{\text{DD}}}{\pi} \approx 4,77 \text{ V/rd}$$

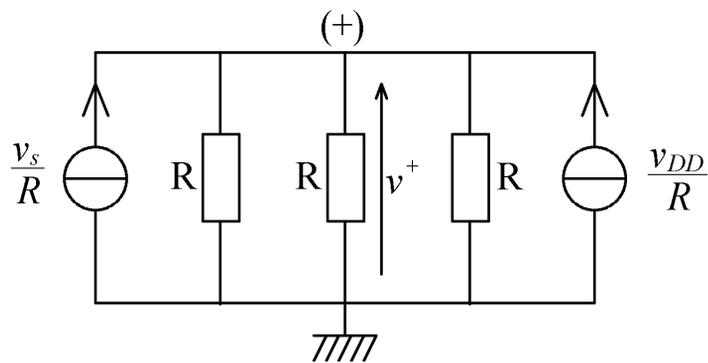
$$-\pi < \phi_D < 0 \quad k_d = -\frac{V_{\text{DD}}}{\pi} \approx -4,77 \text{ V/rd}$$

2. Étude de l'oscillateur commandé en tension.

2.1. Étude du comparateur à hystérésis.

2.1.1. $v_i = 0$. La valeur de v_s (0 ou V_{DD}) dépend du signe de $\varepsilon = v^+ - v_i$.

Calcul de v^+ : on utilise le théorème de Millman.



$$\frac{v_s}{R} + \frac{V_{\text{DD}}}{R} = \frac{3}{R} v^+$$

$$v^+ = \frac{v_s + V_{DD}}{3}$$

$\forall v_s$ on a $\varepsilon = v^+ - v_i > 0$ donc $v_s = V_{DD}$.

2.1.2.

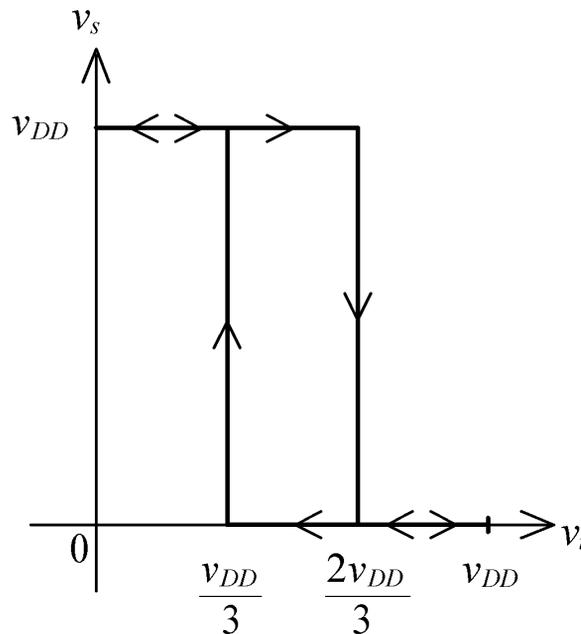
- $$\begin{cases} v_i \text{ croît à partir de } 0 \\ v^+ = \frac{2V_{DD}}{3} \end{cases}$$

v_s reste à V_{DD} tant que $\varepsilon = v^+ - v_i > 0$ $v_i < \frac{2V_{DD}}{3}$.

- $$\begin{cases} v_i \text{ décroît à partir de } V_{DD} \\ v^+ = \frac{V_{DD}}{3} \end{cases}$$

v_s reste à 0 tant que $\varepsilon = v^+ - v_i < 0$ $v_i > \frac{V_{DD}}{3}$.

2.1.3. Courbe $v_s = f(v_i)$



2.2. Étude de l'intégrateur.

2.2.1. L'amplificateur opérationnel est en fonctionnement linéaire donc $v^+ \approx v^-$.

$$i_1 = \frac{v_f - v^-}{2R} \approx \frac{v_f - v^+}{2R}$$

$$v^+ = \frac{v_f}{2} \quad (\text{division de tension})$$

on a donc :

$$i_1 \approx \frac{v_f}{4R}$$

2.2.2.

$$i_c = i_T - i_1$$

- $v_s = 0$ $i_T = 0$ (T bloqué)

$$i_c = -i_1 = -\frac{v_f}{4R}$$

- $v_s = V_{DD}$ (T est saturé)

$$i_T = \frac{v^-}{R} \approx \frac{v^+}{R} = \frac{v_f}{2R}$$

$$i_c = \frac{v_f}{2R} - \frac{v_f}{4R} = +\frac{v_f}{4R}$$

2.2.3. Équation différentielle :

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad \text{avec} \quad v_c = v_i - v^- \approx v_i - v^+ = v_i - \frac{v_f}{2}$$

On a donc :

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{dv_i}{dt}$$

- $v_s = 0$

$$i_c = -\frac{v_f}{4R} = C \frac{dv_i}{dt} \Rightarrow \frac{dv_i}{dt} = -\frac{v_f}{4RC}$$

- $v_s = V_{DD}$

$$i_c = +\frac{v_f}{4R} = C \frac{dv_i}{dt} \Rightarrow \frac{dv_i}{dt} = +\frac{v_f}{4RC}$$

2.3. Étude de l'ensemble.

2.3.1. • Valeur initiale V_{i_0} :

$$v_i = v^- + v_c \quad \left\{ \begin{array}{l} v^- \approx v^+ = \frac{v_f}{2} \\ v_c = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C déchargé à } t=0)$$

On a donc $V_{i_0} = \frac{v_f}{2}$.

- Calcul de $v_i(t)$ avec $v_s = V_{DD}$:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{v_f}{4RC}$$

$$v_i(t) = \frac{v_f}{4RC} t + V_{i_0} = \frac{v_f}{4RC} t + \frac{v_f}{2}$$

2.3.2. $v_i(t)$ est une tension croissante. On a donc basculement pour $v_i(t) = \frac{2V_{DD}}{3}$

$$\frac{2V_{DD}}{3} = \frac{v_f}{4RC} t_1 + \frac{v_f}{2}$$

$$t_1 = 4RC \left(\frac{2}{3} \frac{V_{DD}}{v_f} - \frac{1}{2} \right)$$

Juste après le basculement on a :

$$\begin{cases} v_s = 0 \\ v_i = \frac{2V_{DD}}{3} \end{cases}$$

Si $v_f = \frac{V_{DD}}{2}$ cela donne :

$$t_1 = 4RC \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{10}{3} RC \approx 28,3 \mu s$$

2.3.3. • Expression de $v_i(t')$.

On a $v_s = 0$ donc $\frac{dv_i}{dt'} = -\frac{v_f}{4RC}$

$$v_i(t') = -\frac{v_f}{4RC} t' + \frac{2V_{DD}}{3} \quad \text{avec } t' = t - t_1$$

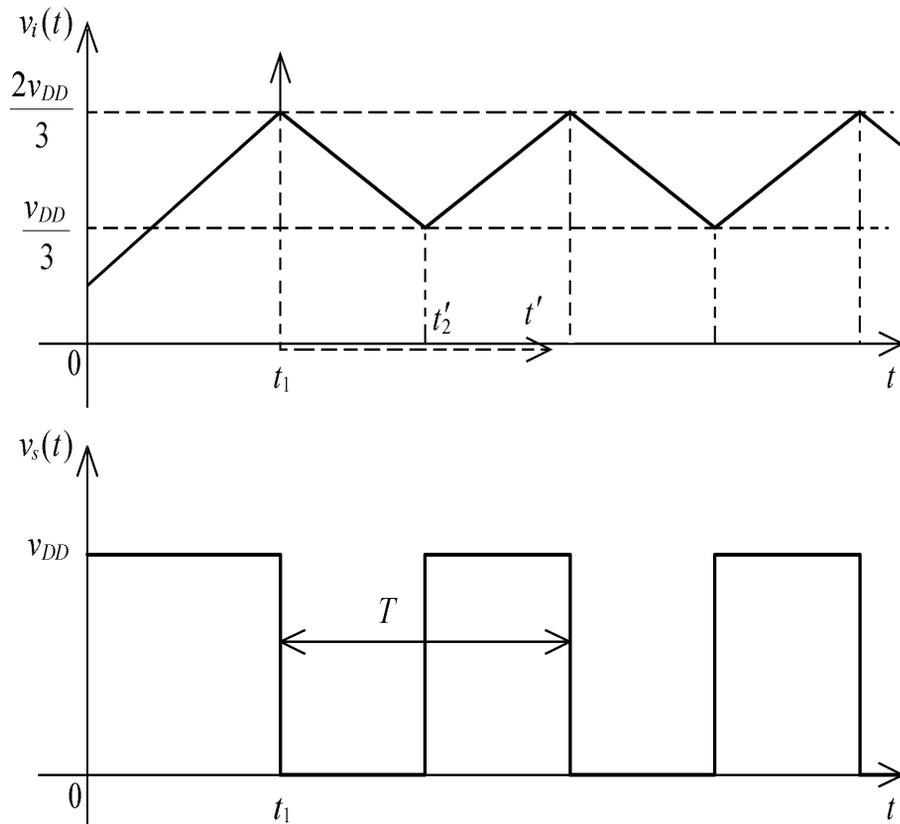
• Calcul de t'_2

$$\frac{V_{DD}}{3} = -\frac{v_f}{4RC} t'_2 + \frac{2V_{DD}}{3}$$

$$t'_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_{DD}}{v_f} RC$$

v_s passe à V_{DD} donc v_i croît, va atteindre $\frac{2V_{DD}}{3}$ ce qui entraîne un nouveau basculement du comparateur à hystérésis, v_s passe à 0, v_i décroît, nouveau basculement...

- On obtient les signaux suivants :



2.3.4. Fréquence des oscillations $T_s = 2t'_2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{V_{DD}}{v_f} RC$

$$F_s = \frac{1}{T_s} = \frac{3v_f}{8V_{DD} RC} \quad \text{avec} \quad v_f = \frac{V_{DD}}{2}$$

$$F_s \approx 22,1 \text{ kHz}$$

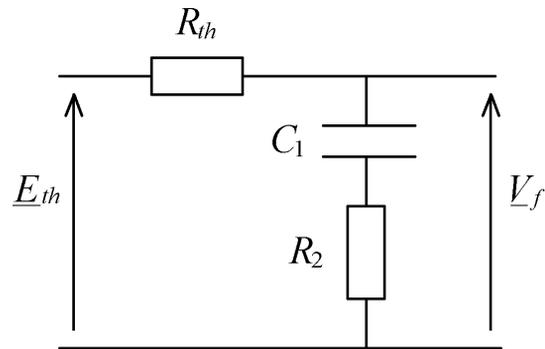
3. Étude du filtre.

3.1. Résistance d'entrée de l'intégrateur :

$$\begin{cases} i_e = i_1 + \frac{v_f}{2R} \\ i_1 = \frac{v_f}{4R} \end{cases} \Rightarrow R_e = \frac{v_f}{i_e} = \frac{4R}{3} \approx 66,7 \text{ k}\Omega$$

3.2. On utilise le théorème de Thévenin :

$$\underline{E}_{th} = \underline{V}_d \frac{R_e}{R_e + R'_1} \quad R_{th} = \frac{R_e R'_1}{R_e + R'_1} \approx 19,2 \text{ k}\Omega$$



$$\underline{V}_f = \underline{E}_{th} \frac{R_2 + \frac{1}{j C_1 \omega}}{R_{th} + R_2 + \frac{1}{j C_1 \omega}} \quad \underline{V}_f = \underline{E}_{th} \frac{1 + j R_2 C_1 \omega}{1 + j (R_2 + R_{th}) C_1 \omega}$$

$$\frac{\underline{V}_f}{\underline{V}_d} = \underline{T}_f = \frac{R_e}{R_e + R'_1} \cdot \frac{1 + j R_2 C_1 \omega}{1 + j (R_2 + R_{th}) C_1 \omega}$$

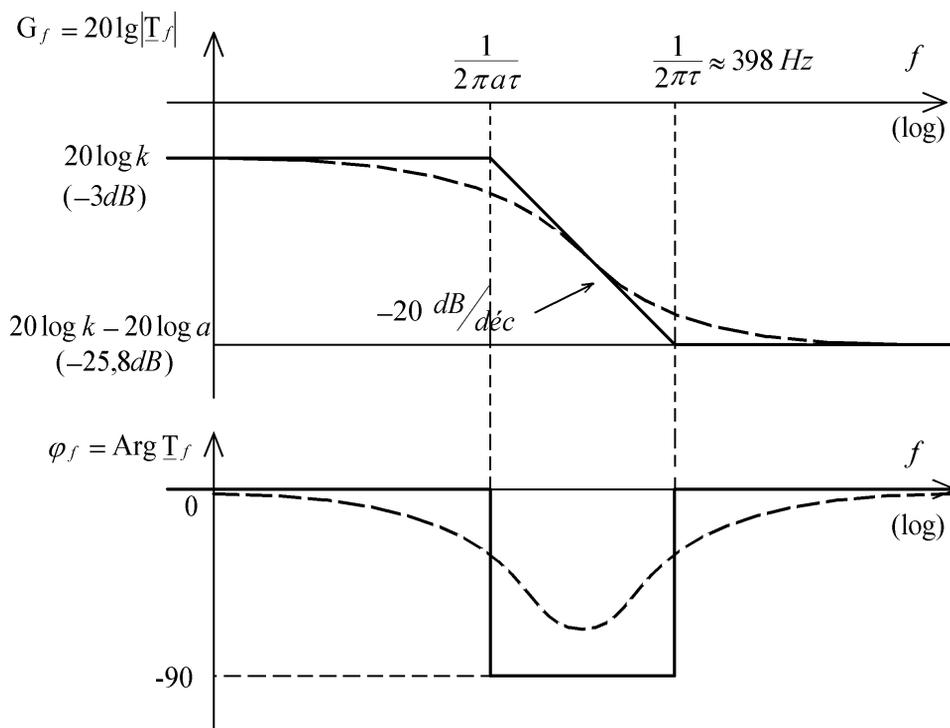
de la forme

$$\underline{T}_f = k \frac{1 + j \omega \tau}{1 + j a \omega \tau} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = \frac{R_e}{R_e + R'_1} \\ \tau = R_2 C_1 \\ a = \frac{R_2 + R_{th}}{R_2} \end{cases}$$

Application Numérique :

$$\begin{cases} k \approx 0,71 \\ \tau \approx 0,4 \text{ ms} \\ a \approx 13,8 \end{cases}$$

3.3. Diagramme de Bode de \underline{T}_f .



4. Étude du fonctionnement normal de la boucle à verrouillage de phase.

4.1. $v_d(t)$ est un signal périodique. Il est donc décomposable en série de Fourier et peut s'écrire :

$$v_d(t) = v_{\text{dmoy}} + A_1 \cos \Omega_d t + B_1 \sin \Omega_d t + \dots + A_k \cos k \Omega_d t + B_k \sin k \Omega_d t + \dots$$

D'autre part $v_d(t) - V_{\text{dmoy}}$ est un signal impair. On a donc uniquement des termes en sinus. De plus, il est alternatif ce qui entraîne que l'on a uniquement des harmoniques impairs.

Finalement on peut écrire :

$$v_d(t) = V_{\text{dmoy}} + V_{d_1} \sin \Omega_d t + V_{d_3} \sin 3\Omega_d t + \dots$$

$$4.2. \quad V_{\text{dmoy}} = \frac{V_{\text{DD}}}{2} = 7,5 \text{ V} \quad V_{dk} = \frac{2}{T_d} \int_0^{T_d} v_d(t) \sin k \Omega_d t dt = \frac{2V_{\text{DD}}}{k\pi}$$

$$V_{d1} = \frac{2V_{\text{DD}}}{\pi} \approx 9,55 \text{ V} \quad V_{d3} = \frac{2V_{\text{DD}}}{3\pi} \approx 3,18 \text{ V}$$

4.3. A la sortie du filtre $v_f(t) \approx V_{\text{fmoy}} + V_{f1} \sin \Omega_d t + V_{f3} \sin 3 \Omega_d t$.

$$\text{On a : } \begin{cases} V_{\text{fmoy}} = k V_{\text{dmoy}} = \frac{k V_{\text{DD}}}{2} \\ V_{f1} = \frac{k}{a} V_{d1} = \frac{2k V_{\text{DD}}}{a \pi} \\ V_{f3} = \frac{k}{a} V_{d3} = \frac{2k V_{\text{DD}}}{3a \pi} \end{cases} \quad \text{car } F_d = 2F_0 \gg \frac{1}{2\pi \tau} \quad \text{donc } T_f \approx \frac{k}{a}$$

$$4.4. \quad \frac{V_{f1}}{V_{\text{fmoy}}} = \frac{4}{\pi a} \approx 0,092$$

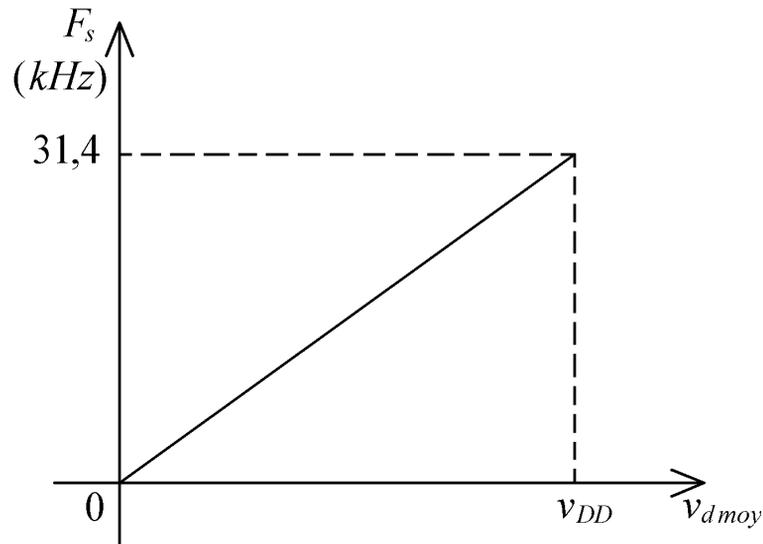
$$\frac{V_{f3}}{V_{\text{fmoy}}} = \frac{4}{3\pi a} \approx 0,03$$

On peut donc conclure que $v_f(t)$ est très peu différent de sa valeur moyenne V_{fmoy} .

4.5. Fréquence de l'oscillateur :

$$F_s = \frac{1}{2t_2} = \frac{3V_{\text{fmoy}}}{8V_{\text{DD}} RC} = \frac{3k}{8V_{\text{DD}} RC} = V_{\text{dmoy}}$$

4.6. Courbe F_s en fonction de V_{dmoy} :



$$k'_0 = \frac{\Delta F_s}{\Delta V_{dmoy}} = \frac{3k}{8V_{DD} RC} \approx 2090 \text{ Hz/V}$$

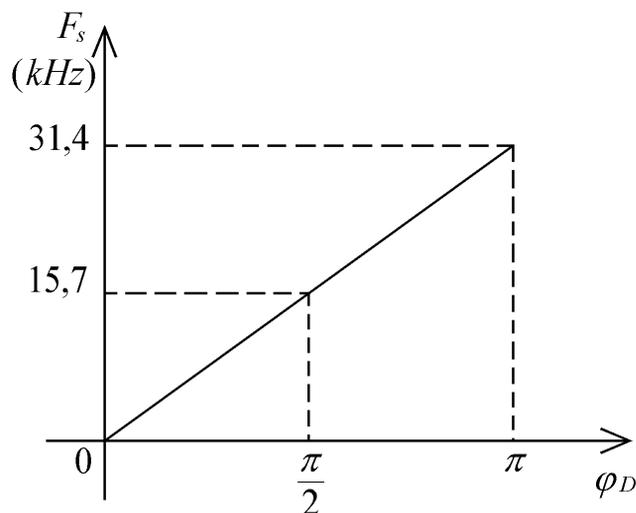
$$k_0 = \frac{\Delta \Omega_s}{\Delta V_{dmoy}} = \frac{3k \times 2\pi}{8V_{DD} RC} \approx 13100 \text{ rd/s.V}$$

4.7. Pour que la boucle soit stable $k_d k_0$ doit être > 0 car à une variation > 0 du déphasage doit correspondre une variation > 0 de la fréquence. Donc $k_d = 4,77 \text{ V/rd}$. Dans ces conditions v_s est en retard par rapport à v_e .

4.8. Courbe F_s en fonction de φ_D :

$$F_s = \frac{3k}{8V_{DD} RC} k_d \varphi_D$$

$$F_s = \frac{k_0}{2\pi} k_d \varphi_D$$



- 4.9. En l'absence de signal d'entrée, on a v_d qui a un rapport cyclique $\alpha = 0,5$ donc $V_{\text{dmoy}} = \frac{V_{\text{DD}}}{2}$. La fréquence d'oscillation dans ces conditions est donc :

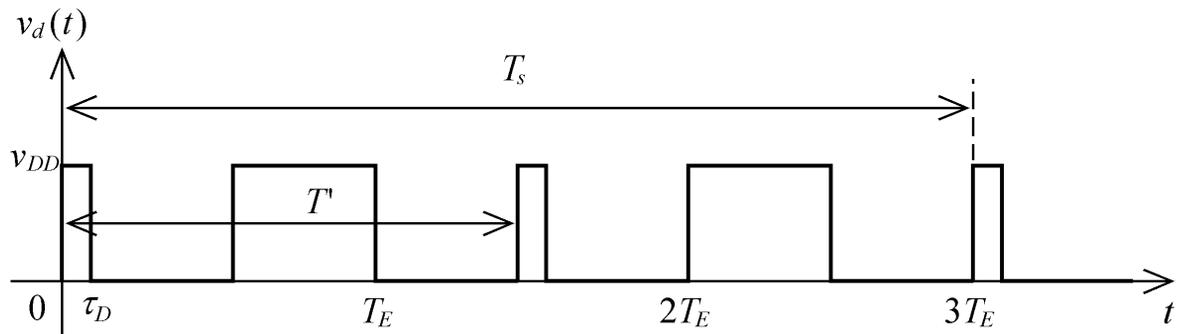
$$F_s = \frac{3k}{8V_{\text{DD}} RC} V_{\text{dmoy}} = \frac{3k}{16RC} \approx 15,7 \text{ kHz}$$

La boucle à verrouillage de phase oscille donc librement à la fréquence centrale $F_0 \approx 15,7 \text{ kHz}$.

5. Étude du verrouillage sur harmonique.

- 5.1. On a $F_E = 3F_s$.

5.1.1. Représentation de $v_d(t)$.



5.1.2. Calcul de la valeur moyenne :

$$V_{\text{dmoy}} = \frac{1}{T'} \int_0^{T'} v_d(t) dt = \frac{2}{T_s} \left(V_{\text{DD}} \tau_D + V_{\text{DD}} \frac{T_E}{2} \right)$$

$$V_{\text{dmoy}} = V_{\text{DD}} \left(\frac{2\tau_D}{T_s} + \frac{T_E}{T_s} \right)$$

$$V_{\text{dmoy}} = V_{\text{DD}} \left(\frac{\varphi_D}{\pi} + \frac{1}{3} \right)$$

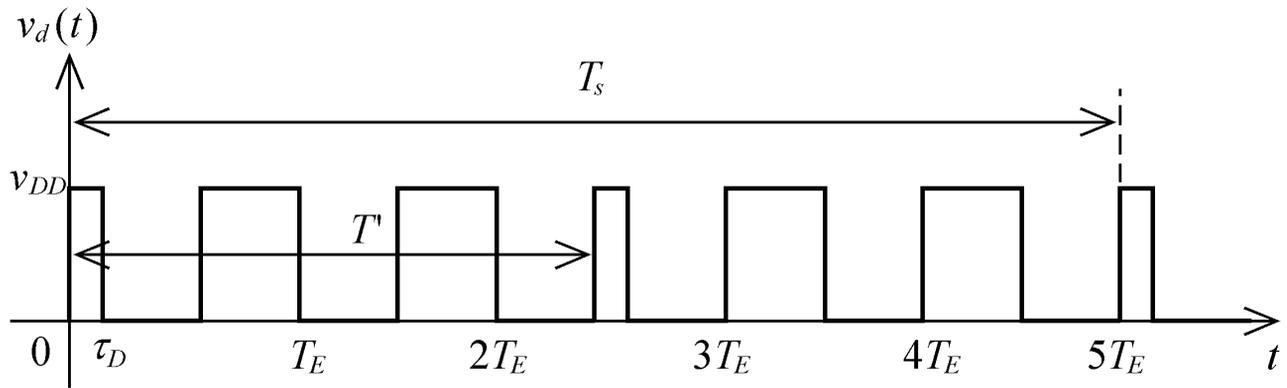
Pour avoir un verrouillage sur l'harmonique 3 qui soit possible on doit avoir $\tau_D < \frac{T_E}{2}$ donc :

$$\frac{\varphi_D}{2\pi} T_s < \frac{T_E}{2}$$

$$\varphi_D < \pi \frac{T_E}{T_s} = \frac{\pi}{3}$$

La valeur maximale de φ_D est donc $\frac{\pi}{3}$.

5.2. On a $F_E = 5 F_s$



$$V_{\text{dmoy}} = \frac{2}{T_s} \left(V_{\text{DD}} \tau_D + 2V_{\text{DD}} \frac{T_E}{2} \right) = V_{\text{DD}} \left(\frac{2\tau_D}{T_s} + \frac{2T_E}{T_s} \right)$$

$$V_{\text{dmoy}} = V_{\text{DD}} \left(\frac{\varphi_D}{\pi} + \frac{2}{5} \right)$$

On doit avoir $\tau_D < \frac{T_E}{2}$ donc :

$$\frac{\varphi_D T_s}{2\pi} < \frac{T_E}{2}$$

$$\varphi_D < \frac{\pi}{5}$$

5.3. Dans le cas où $F_E = (2n + 1) F_s$ on aura :

$$\begin{cases} V_{\text{dmoy}} = V_{\text{DD}} \left(\frac{\varphi_D}{\pi} + \frac{n}{2n+1} \right) \\ \varphi_D < \frac{\pi}{2n+1} \end{cases}$$

5.4. Plage de fréquence : $F_{\text{Emin}} < F_E < F_{\text{EMAX}}$

$$0 < \varphi_D < \frac{\pi}{2n+1}$$

$$V_{\text{DD}} \frac{n}{2n+1} < V_{\text{dmoy}} < V_{\text{DD}} \frac{n+1}{2n+1}$$

Or $F_s = k'_0 V_{\text{dmoy}} = \frac{k'_0}{2\pi} V_{\text{dmoy}}$. On a donc :

$$\frac{k'_0 n}{2n+1} V_{\text{DD}} < F_s < \frac{k'_0 (n+1)}{2n+1} V_{\text{DD}}$$

D'autre part $F_E = (2n + 1) F_s$ ce qui donne :

$$k'_0 n V_{\text{DD}} < F_E < k'_0 (n+1) V_{\text{DD}}$$

Application Numérique :

- Harmonique trois donc $n = 1$

$$k'_0 V_{DD} < F_E < 2k'_0 V_{DD}$$

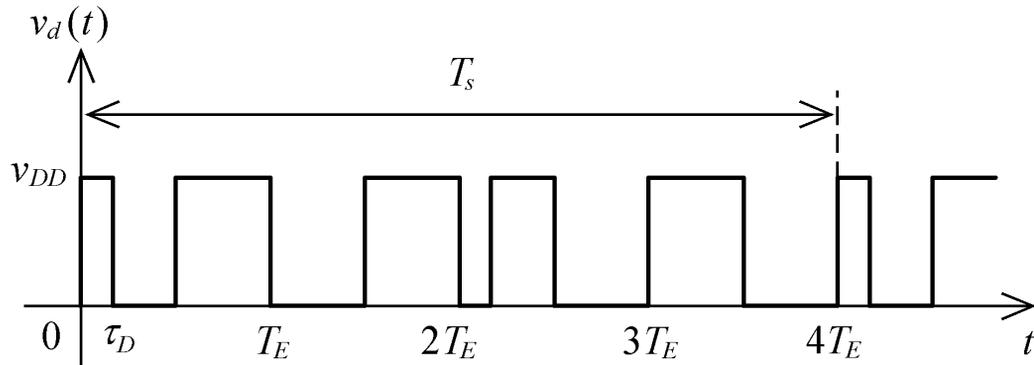
$$31,4 \text{ kHz} < F_E < 62,8 \text{ kHz}$$

- Harmonique cinq donc $n = 2$

$$2k'_0 V_{DD} < F_E < 3k'_0 V_{DD}$$

$$62,8 \text{ kHz} < F_E < 94,2 \text{ kHz}$$

5.5. On considère l'harmonique quatre par exemple.



$$V_{\text{dmoy}} = \frac{1}{T_s} \left[V_{DD} \tau_D + 3V_{DD} \frac{T_E}{2} + V_{DD} \left(\frac{T_s}{2} - \tau_D \right) \right]$$

$$V_{\text{dmoy}} = \frac{1}{T_s} \left(4V_{DD} \frac{T_E}{2} \right) = 2V_{DD} \frac{T_E}{T_s} = \frac{V_{DD}}{2}$$

- 5.6. • Généralement la fréquence du signal d'entrée varie et on désire avoir $F_s = F_E$ lorsque la boucle est verrouillée. On voit donc l'inconvénient d'avoir un risque de verrouillage sur harmonique lorsqu'il y a balayage de la fréquence d'entrée.
- Solution pour obtenir une impossibilité de verrouillage sur harmonique : remplacer le comparateur de phase à «ou exclusif» par un comparateur de phase séquentiel (à bascule «RS» par exemple).

SECOND PROBLÈME

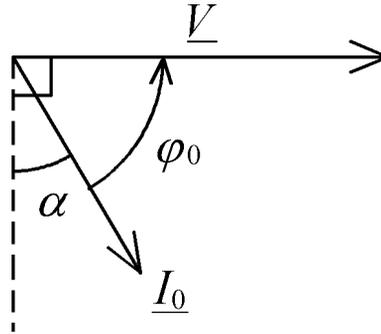
A. ÉTUDE DU PREMIER TRANSFORMATEUR T

1.1. I_0 , valeur efficace du courant sinusoïdal équivalent est donné par la relation :

$$S_0 = \sqrt{P_0^2 + Q_0^2} = \sqrt{3} U_1 I_0$$

$$I_0 = 0,15 \text{ A}$$

$$1.2. \quad \cos \varphi_0 = \frac{P_0}{\sqrt{3} U_1 I_0} = 0,114 \text{ AR} ; \quad \varphi_0 = 83,5^\circ.$$



$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_0$, angle d'écart hystérique est dû à la composante active du courant I_0 , liée aux pertes ferromagnétiques.

1.3. Vu le schéma monophasé équivalent proposé,

$$R_0 = \frac{P_0}{3I_0^2} = 8,73 \text{ k}\Omega$$

$$X_0 = \frac{Q_0}{3I_0^2} = 75,8 \text{ k}\Omega$$

1.4. Le transformateur est à noyaux coplanaires. La longueur des lignes de champs est plus grande pour les noyaux extrêmes que pour le noyau médian.

Le courant I_0 calculé en 1.1. est un courant efficace moyen (sinusoïdal équivalent).

1.5. 1.5.1. Les tôles à cristaux orientés permettent de travailler à des inductions B_m élevées. Les pertes ferromagnétiques y sont très faibles.

1.5.2. Les pertes dans le fer sont dues à deux phénomènes :

– *hystérésis* - $p_{FH} = k_H f B_m^\alpha$; en général $\alpha = 2$
(f : fréquence, k_H : coefficient dépendant du matériau, B_m : induction maximale) ;

– *courants de Foucault* - $p_{FF} = k_F f^2 \cdot B_m^2$.

L'ensemble pour un matériau donné, à fréquence donnée avant donc : $P_{\text{fer}} = K B_m^2$.

1.5.3. Vu la définition de la qualité d'une tôle,

$$\text{Masse} = \frac{P_{\text{fer}}}{q B_m^2} \approx 593 \text{ kg}$$

2.1.

$$N_1 = \frac{U_1}{4,44 f \cdot S \cdot B_m} = 2038 \text{ spires} \quad (\text{primaire en triangle})$$

$$N_2 = \frac{U_{20}/\sqrt{3}}{4,44 f \cdot S \cdot B_m} = 24 \text{ spires} \quad (\text{secondaire en étoile})$$

2.2. 2.2.1.

$$M = \frac{U_{20}}{U_1} = \frac{410}{20000} = 20,5 \cdot 10^{-3}$$

2.2.2.

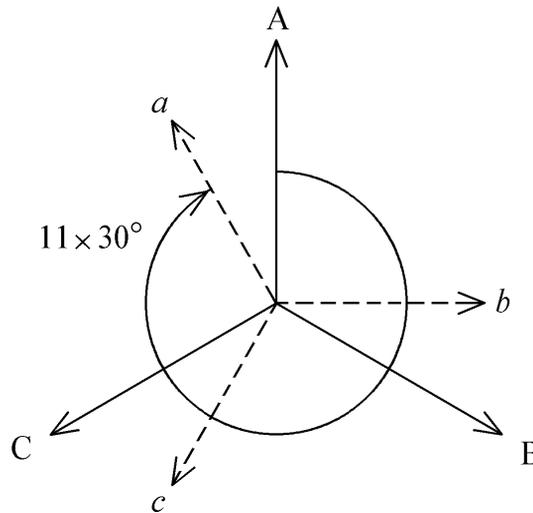
$$M = \frac{N_2 \sqrt{3}}{N_1}$$

2.3. $D_{yn} 11$ signifie :

- D : primaire en triangle,
- y : secondaire en étoile,
- n : neutre sortie au secondaire,
- 11 : indice horaire du transformateur (les deux tensions homologues primaire et secondaire sont déphasées entre elles de $11 \times 30 = 330^\circ$)

2.3.1.

2.3.2.



2.4.

$$I_{1 \text{ nom}} = \frac{S_{\text{nom}}}{\sqrt{3} U_1} = \frac{250000}{\sqrt{3} \cdot 20000} = 7,22 \text{ A}$$

$$I_{2 \text{ nom}} = \frac{S_{\text{nom}}}{\sqrt{3} U_{20}} = \frac{250000}{\sqrt{3} \cdot 410} = 352 \text{ A}$$

3.1. Courant à vide négligeable devant les intensités des courants primaire et secondaire (hypothèse de Kapp).

Impédances ramenées au secondaire.

Approximation sinusoïdale des courants.

3.1.1. R_0 : représente les pertes fer $3R_0I_0^2 = P_{\text{fer}}$.

X_0 : représente la puissance réactive magnétisante $3X_0I_0^2 = Q_0$.

R_s : représente la résistance totale ramenée au secondaire.

X_s : représente la réactance de fuite totale ramenée au secondaire.

M : rapport de transformation $M = \frac{U_{20}}{U_1}$.

V_1 , V_{20} , tensions simples.

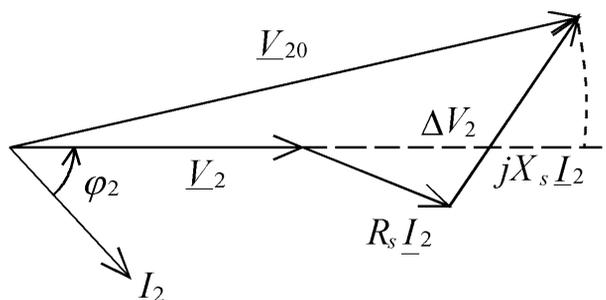
3.1.2.

$$R_s = \frac{P_{\text{cc}}}{3I_2^2} = \frac{1830}{3 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 352\right)^2} = 8,75 \text{ m}\Omega$$

$$Z_s = \frac{M \cdot U_{1\text{cc}}/\sqrt{3}}{\frac{3}{4} \cdot I_{2\text{nom}}} = \frac{0,0205 \cdot 600/\sqrt{3}}{\frac{3}{4} \cdot 352} = 26,9 \text{ m}\Omega$$

$$X_s = 25,4 \text{ m}\Omega$$

3.2. $V_{20} - V_2 = \Delta V_2$



3.2.1. Les longueurs $R_s I_2$ et $X_s I_2$ étant petites vis-à-vis de V_2 et V_{20} , l'angle θ est petit.

$$\cos \theta \approx 1 \rightarrow V_{20} \cos \theta \approx V_{20} = V_2 + R_s I_2 \cos \varphi_2 + X_s I_2 \sin \varphi_2$$

$$\Delta V_2 = (R_s \cos \varphi_2 + X_s \sin \varphi_2) I_2$$

3.2.2.

$$\Delta V_2 = (8,75 \cdot 0,8 + 25,4 \cdot 0,6) 10^{-3} \cdot 352 = 7,83 \text{ V}$$

$$\Delta U_2 = \sqrt{3} \Delta V_2 = 13,6 \text{ V}$$

3.2.3. La chute de tension à $I_{2\text{nom}}$ et $\cos \varphi_2 = 0,95$ vaut :

$$\Delta U_2 = \sqrt{3} \left[8,75 \cdot 0,95 + 25,4 \cdot \sqrt{1 - 0,95^2} \right] 10^{-3} \cdot 352 \approx 10 \text{ V}$$

d'où

$$U_2 = U_{20} - \Delta U_2 = 400 \text{ V}$$

La valeur de $\cos \varphi_{2\text{nom}}$ est donc $\approx 0,95$.

$$3.2.4. \quad \eta_{\text{nom}} = \frac{\sqrt{3} U_{2n} I_{2n} \cos \varphi_{2n}}{\sqrt{3} U_{2n} I_{2n} \cos \varphi_{2n} + 3R_s I_{2n}^2 + P_0} = 0,983$$

3.3. Le rendement maximal a lieu pour un courant secondaire tel que les pertes de fer soient égales aux pertes par effet Joule.

Soit
$$I_{2 \max} = \sqrt{\frac{P_0}{3R_s}} = 151,2 \text{ A}$$

Dans les conditions indiquées et pour ce débit, le rendement vaut :

$$\eta_{\text{max}} = \frac{\sqrt{3} U_2 I_{2 \max} \cos \varphi_{2 \text{ nom}}}{\sqrt{3} U_2 I_{2 \max} \cos \varphi_{2 \text{ nom}} + 2P_0} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} I_{2 \max} &= 151,2 \text{ A} \\ \cos \varphi_{2 \text{ nom}} &= 0,95 \\ U_2 &= 405,7 \text{ V} \end{aligned}$$

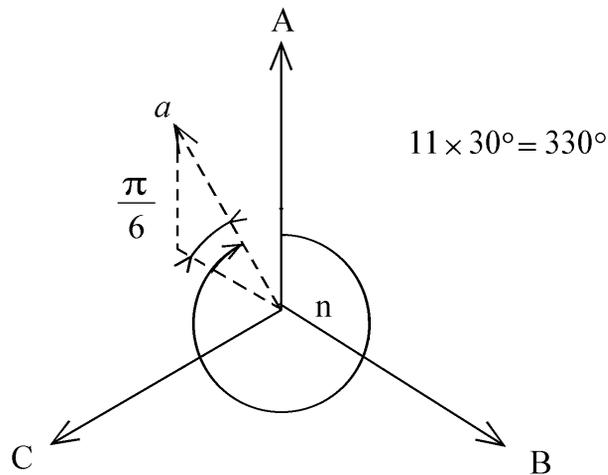
$$\left(U_2 = 410 - \sqrt{3} \left[8,75 \cdot 0,95 + 25,4 \cdot \sqrt{1 - 0,95^2} \right] 10^{-3} \cdot 151,2 \# 405,7 \text{ V} \right)$$

$$\eta_{\text{max}} \approx 0,988$$

B. ÉTUDE DE LA MISE EN PARALLÈLE DU TRANSFORMATEUR ÉTUDIÉ PRÉCÉDEMMENT ET D'UN DEUXIÈME TRANSFORMATEUR NOTÉ T'

4.1. 4.1.1.

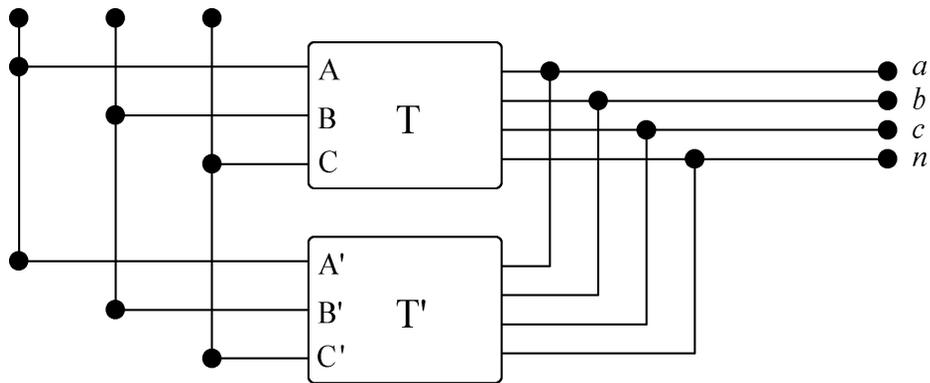
4.1.2.



4.1.3.

$$M' = \frac{U'_{20}}{U'_1} = \frac{\sqrt{3} V'_{20}}{\sqrt{3} V'_1} = \frac{V'_{20}}{V'_1} = \frac{2 \cdot \frac{N'_2}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}}{N'_1} = \frac{N'_2}{N'_1} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4.2. 4.2.1.

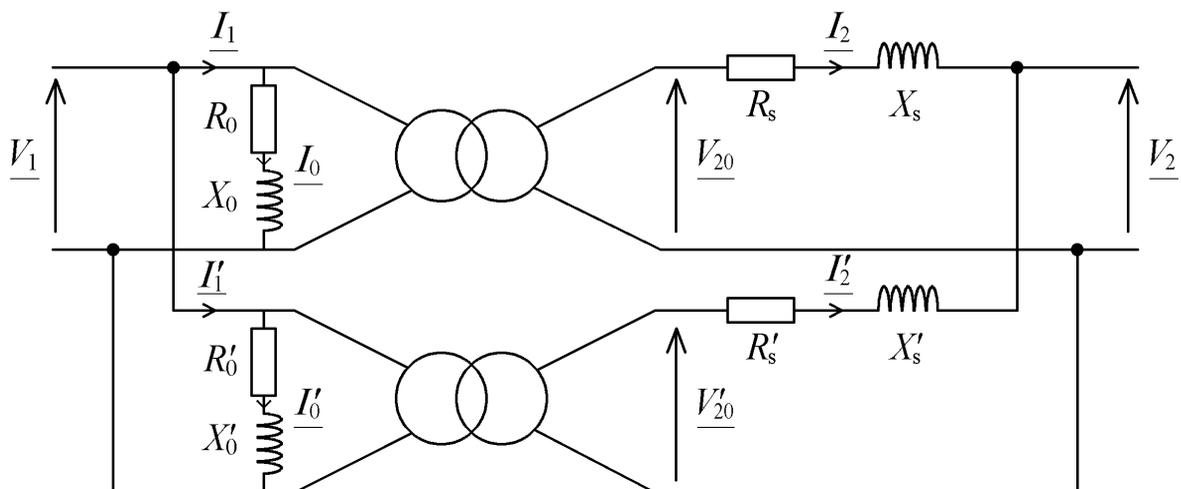
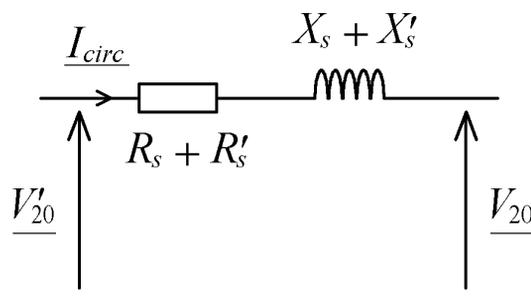


4.2.2. Les conditions sont ici :

- même tension d'alimentation,
- même tension secondaire à vide,
- même indice horaire,
- même ordre (direct ou inverse).

4.2.3. Les conditions sont respectées sur la prise 20 kV de T' ($M' = 0,0205$).

4.2.4.

4.2.5. La maille «secondaire» est alimentée par $\underline{V}'_{20} - \underline{V}_{20}$.

$$V'_{20} \text{ dans les conditions indiquées vaut } V'_{20} = M' \cdot \frac{20000}{19500} \cdot \frac{20000}{\sqrt{3}} = 242,8 \text{ V}$$

$$\text{d'où} \quad I_{\text{circulation}} = \frac{242,8 - 410/\sqrt{3}}{\sqrt{(8,75 + 36)^2 + (25,4 + 60)^2 \cdot 10^{-3}}} = 63,3 \text{ A}$$

(V_{20}' et V_{20} sont en phase vu l'égalité des indices horaires).

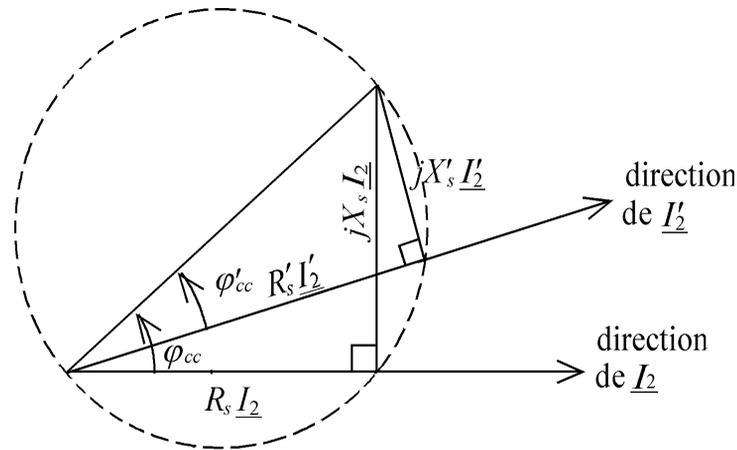
5.1. 5.1.1. Les chutes de tension dans les deux transformateurs ont même valeur :

$$Z_s I_2 = Z_s' I_2' \rightarrow \frac{I_2}{I_2'} = \frac{Z_s'}{Z_s}$$

$$\frac{I_2}{I_2'} = \frac{\sqrt{36^2 + 60^2} \cdot 10^{-3}}{26,9 \cdot 10^{-3}} = 2,6$$

5.1.2. $\underline{I}_{2c} = \underline{I}_2 + \underline{I}_2'$, les courants I_2 et I_2' n'étant probablement pas en phase.

5.1.3. Traçons les triangles de Kapp associés aux deux transformateurs en considérant que la chute de tension est commune.

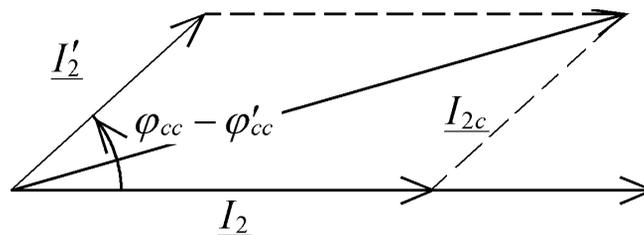


$$\varphi_{cc} = \text{Arc tan} \frac{X_s}{R_s}$$

$$\varphi'_{cc} = \text{Arctan} \frac{X'_s}{R'_s}$$

$$\varphi_{cc} = 71^\circ \quad \varphi'_{cc} = 59^\circ$$

\underline{I}_2' est en avance de 12° sur \underline{I}_2 d'où le diagramme des intensités et la relation que l'on en déduit.



$$I_{2c}^2 = I_2^2 + I_2'^2 + 2 I_2 I_2' \cos(\varphi_{cc} - \varphi'_{cc})$$

5.1.4. I_{2c} sera maximal à I_2' et I_2 donnés (en module) si ces deux courants sont en phase, donc si $\varphi_{cc} = \varphi_{cc}'$ (condition non réalisée ici).

5.2. 5.2.1.

$$I_2'/I_2 = 2,6$$

$$\frac{I_{2\text{nom}}}{I_2'} = 2,5$$

C'est donc T_2 qui atteindra le premier sa valeur nominale, T_2' n'étant alors parcouru que par $\frac{2,5}{2,6} I_2'$.

5.2.2.

$$S = 250 \text{ kVA} \quad I_2 = I_{2\text{nom}} = 352 \text{ A}$$

$$I_2' = \frac{352}{2,6} = 135,4 \text{ A}$$

$$I_{2c} = 485,26 \text{ A (cf. 5.1.3.)}$$

$$I_{2c} < (352 + 135,4) \text{ A}$$

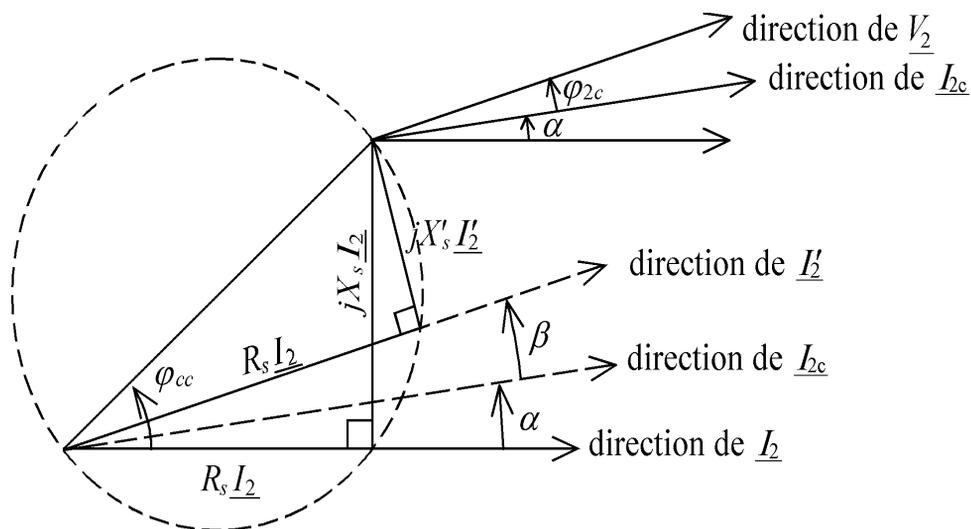
$$S_{T+T'} = \sqrt{3} U_{2c} I_{2c} = 344,6 \text{ kVA}$$

$$S_{\text{installée}} = 350 \text{ kVA}$$

5.3. 5.3.1. Le partage des courants est indépendant des facteurs de puissance de la charge.

Il faut connaître le facteur de puissance de chacun des transformateurs.

Sur le diagramme vectoriel suivant, des considérations géométriques montrent que les facteurs de puissance de chacun des transformateurs valent :



$$(\cos \varphi_2)_T = \cos (\varphi_{2c} + \alpha)$$

$$(\cos \varphi_2)_{T'} = \cos (\varphi_{2c} - \beta)$$

La chute de tension calculée pour le transformateur T vaut avec :

$$\alpha = 3,33^\circ, \quad \varphi_{2T} = \text{Arc cos } 0,9 + 3,33 = 29,17^\circ$$

$$\Delta U_2 = 12,2 \text{ V} \quad \text{soit} \quad 397,8 \text{ V.}$$

C'est bien sûr la même tension que celle aux bornes de T !

5.3.2.

$$\eta_T = \frac{\sqrt{3} U_2 I_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{3} U_2 I_2 \cos \varphi_2 + P_{\text{fer}} + P_{\text{joule}}} = 0,982$$

$$\eta_{T'} = \frac{\sqrt{3} U_2 I_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{3} U_2 I_2 \cos \varphi_2 + P_{\text{fer}} + P_{\text{joule}}} = 0,974$$

$$\eta_{\text{global}} = \frac{\sqrt{3} \cdot U_2 I_{2c} \cos \varphi_{2c}}{\sqrt{3} U_2 I_{2c} \cos \varphi_{2c} + \varepsilon P_{\text{fer}} + P_{\text{joule}}} = 0,980$$

C. ÉTUDE DU COMPORTEMENT DE T LORS D'UN COURT-CIRCUIT ACCIDENTEL

6.1. Les systèmes équilibrés direct, inverse et homopolaire s'écrivent respectivement :

$$\underline{V}_d, \quad a^2 \underline{V}_d, \quad a \underline{V}_d$$

$$\underline{V}_i, \quad a \underline{V}_i, \quad a^2 \underline{V}_i$$

$$\underline{V}_h, \quad \underline{V}_h, \quad \underline{V}_h$$

où $a = e^{j2\pi/3}$ est l'opérateur rotation de $2\pi/3$.

$a^2 \underline{V}$ est en retard de $2\pi/3$ sur \underline{V} .

$a \underline{V}$ est en avance de $2\pi/3$ sur \underline{V} .

6.2. Les trois relations de définition :

$$\underline{V}_{2a} = \underline{V}_{2h} + \underline{V}_{2d} + \underline{V}_{2i} \quad (1)$$

$$\underline{V}_{2b} = \underline{V}_{2h} + a^2 \underline{V}_{2d} + a \underline{V}_{2i} \quad (2)$$

$$\underline{V}_{2c} = \underline{V}_{2h} + a \underline{V}_{2d} + a^2 \underline{V}_{2i} \quad (3)$$

donnent par diverses combinaisons :

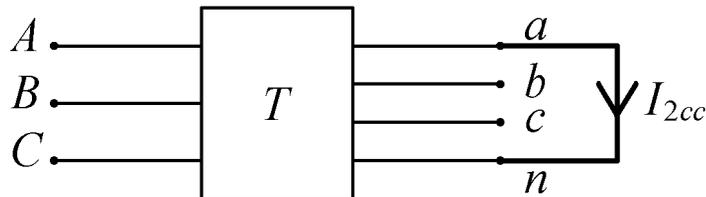
$$(1) + (2) + (3) \rightarrow \underline{V}_{2h} = \frac{1}{3} (\underline{V}_{2a} + \underline{V}_{2b} + \underline{V}_{2c})$$

$$(1) + a(2) + a^2(3) \rightarrow \underline{V}_{2d} = \frac{1}{3} (\underline{V}_{2a} + a \underline{V}_{2b} + a^2 \underline{V}_{2c})$$

$$(1) + a^2(2) + a(3) \rightarrow \underline{V}_{2i} = \frac{1}{3} (\underline{V}_{2a} + a^2 \underline{V}_{2b} + a \underline{V}_{2c})$$

d'où la forme matricielle demandée.

6.3.1.



6.3.2.

$$\underline{I}_{2a} = \underline{I}_{2cc} \quad \underline{I}_{2b} = 0 \quad \underline{I}_{2c} = 0$$

d'où

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_{2h} = \frac{1}{3} \underline{I}_{2cc} \\ \underline{I}_{2d} = \frac{1}{3} \underline{I}_{2cc} \\ \underline{I}_{2i} = \frac{1}{3} \underline{I}_{2cc} \end{array} \right\} \underline{I}_{2h} = \underline{I}_{2d} = \underline{I}_{2i} = \frac{1}{3} \underline{I}_{2cc}$$

6.3.3. L'étude se fait à l'aide des trois schémas monophasés, un pour chaque composante :

– le schéma direct est analogue au modèle habituel du transformateur :

$$\begin{array}{l} \underline{R}_{sd} = \underline{R}_s \quad \underline{X}_{sd} = \underline{X}_s \quad \underline{M}_d = \underline{M} \\ \underline{V}_{1d} = \underline{V}_A \quad \underline{V}_{20d} = \underline{M} \underline{V}_A \end{array}$$

– le schéma inverse est analogue mais le rapport de transformation tient compte du nouvel indice horaire :

$$\begin{array}{l} \underline{R}_{si} = \underline{R}_s \quad \underline{X}_{si} = \underline{X}_s \quad \underline{M}_i = \underline{M}_d^* \\ \underline{V}_{1i} = 0 \quad \underline{V}_{20i} = 0 \end{array}$$

– le schéma homopolaire prend en compte les couplages, triangle au primaire $\rightarrow \underline{I}_{1h} = 0$:

$$\begin{array}{l} \underline{V}_{1h} = 0 \quad \underline{V}_{20h} = 0 \\ \underline{R}_{sh} = \underline{R}_s \quad \underline{X}_{sh} = \underline{X}_s \end{array}$$

6.3.4. Les équations :

$$\underline{V}_{2d} = \underline{V}_{20d} - \underline{Z}_s \underline{I}_{2d}$$

$$\underline{V}_{2i} = -\underline{Z}_s \underline{I}_{2i}$$

$$\underline{V}_{2h} = -\underline{Z}_s \underline{I}_{2h}$$

et

$$\underline{V}_{20d} = M \underline{V}_A$$

donnent

$$\underline{V}_{2d} + \underline{V}_{2i} + \underline{V}_{2h} = \underline{V}_{2a} = 0 = M \underline{V}_A - (\underline{Z}_s \underline{I}_{2d} + \underline{Z}_s \underline{I}_{2h} + \underline{Z}_s \underline{I}_{2i})$$

$$= M \underline{V}_A - \underline{Z}_s \underline{I}_{2cc}$$

d'où

$$\underline{I}_{2cc} = M \cdot \frac{\underline{V}_A}{\underline{Z}_s}$$

Ce qui donne

$$\underline{I}_{2cc} = 0,0205 \cdot \frac{20000}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{26,9 \cdot 10^{-3}} = 8800 \text{ A}$$

C.A.P.E.S.
(Concours Interne)

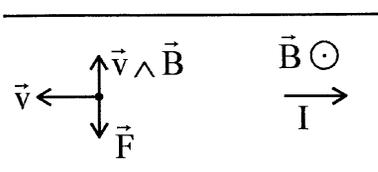
SECTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE
PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de Physique - Session : 1995

A. ÉLECTROMAGNÉTISME

A.1. Étude de l'effet Hall.

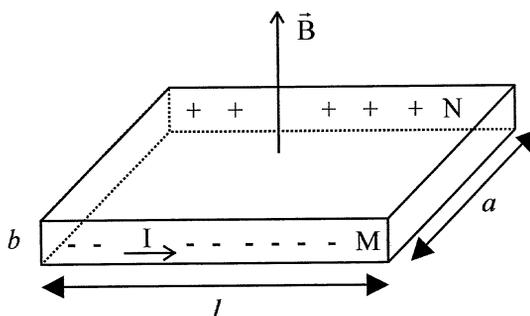
A.1.1. Vue de dessus de la plaquette :



\vec{v} = vitesse d'un électron en $t \leq 0$ (\vec{v} selon \vec{j} , vecteur densité de courant, en sens opposé puisque $q_e < 0$).

Un électron est soumis à la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{F}$
 $\vec{F} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$

A.1.2. Sous l'action de \vec{F} , les électrons se déplacent et vont s'accumuler sur la face avant, il y aura alors un défaut d'électrons sur la face arrière.



Cette dissymétrie de charges crée un champ électrique \vec{E}_H et une tension entre les faces avant et arrière de la plaquette.

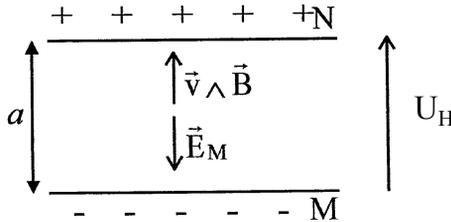
A.1.3. En régime permanent, le vecteur vitesse d'un électron libre est constant, donc la somme des forces s'exerçant sur un électron est nulle.

L'électron est soumis à :

- $q \vec{E} = q \frac{\vec{j}}{\gamma}$ (γ = conductivité),

- \vec{F}_1 exercée par le réseau métallique
($\vec{F}_1 + q\vec{E} = \vec{0}$. Bilan «habituel» en l'absence de champ magnétique),
- $q \vec{v} \wedge \vec{B}$,
- $q \vec{E}_H$,

d'où, en régime permanent, $\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.



$$U_H = \int_N^M (\vec{E} + \vec{E}_H) \cdot d\vec{l} = E_H a = v B a \quad \text{car } \vec{v} \perp \vec{B}.$$

Or :

$$I = j S = \underbrace{|\rho_m|}_{\text{densité volumique de charges mobiles } \rho_m = -ne} v a b$$

donc :

$$U_H = \frac{B a I}{n e a b} = \frac{B I}{n e b}$$

A.1.4. A.1.4.1. Un atome donne un électron libre.

$$n = \text{nombre d'atomes par unité de volume} = N \frac{S}{M}.$$

$$n = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot \frac{8,96 \cdot 10^3}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

A.1.4.2.

$$U_H = \frac{B I}{N \frac{S}{M} e b} = 7,36 \cdot 10^{-6} \text{ soit } 7,4 \mu\text{V}$$

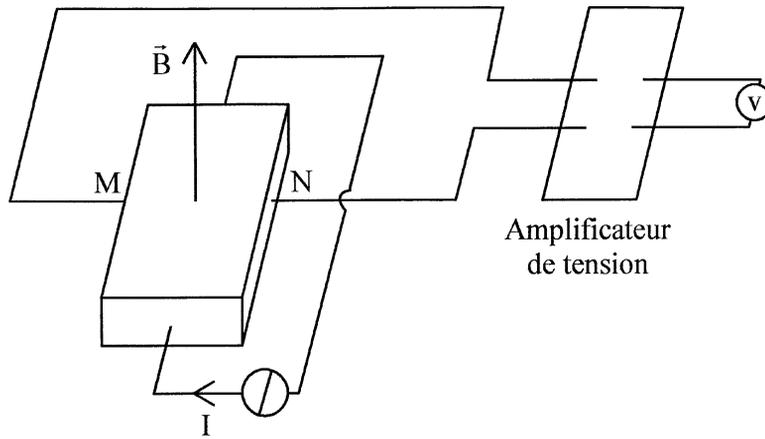
Attention : erreur dans l'énoncé $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = e$

A.2. Utilisation d'un teslamètre à effet Hall.

A.2.1. La source de courant permet de maintenir une intensité de courant constante dans la sonde.

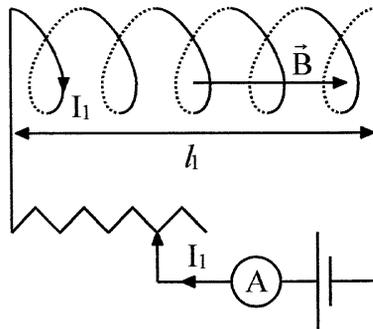
La sonde est l'élément sensible du dispositif : U_{MN} = tension de Hall proportionnelle à $\|\vec{B}\|$.

U_{MN} = quelque μV \rightarrow il est nécessaire d'amplifier cette tension pour obtenir une grandeur mesurable avec suffisamment de précision au voltmètre.



A.2.2. A.2.2.1. La direction de \vec{B} est selon l'axe du solénoïde. Un observateur d'Ampère, couché sur le fil, regarde le solénoïde et tend le bras gauche. Son bras gauche indique \vec{B} .

$$\|\vec{B}\| = \mu_0 N_1 \frac{I_1}{l_1}$$



A.2.2.2. $B = 2,14 \cdot 10^{-3} \text{ T}$

A.2.2.3. B étant proportionnel à U, $B_{\text{en T}} = 5 \cdot 10^{-3} U_{\text{en V}}$ d'où :

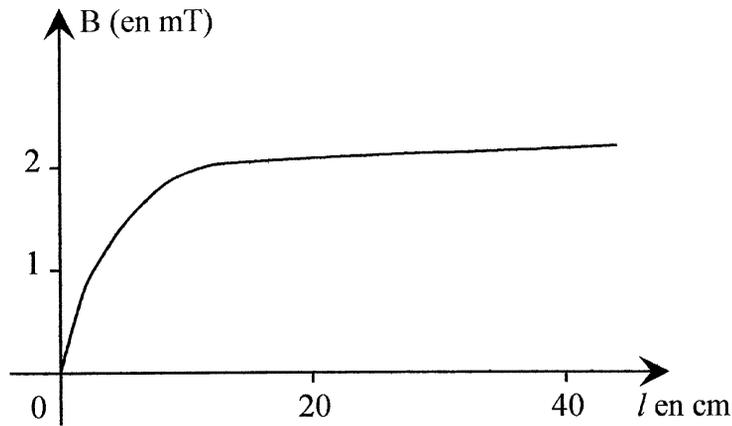
l (en cm)	41,2	28,8	20,6	12,4	8,2	4,1	2,1
U (en V)	0,43	0,43	0,42	0,40	0,38	0,28	0,17
B (en mT)	2,15	2,15	2,10	2,00	1,90	1,40	0,85

La donnée N permet seulement de vérifier que $\frac{N}{l} = \text{Cste}$ pour toutes les mesures.

$B = 2,15 \text{ mT}$ pour $l > 25 \text{ cm}$ environ, soit $l > 10 R$.

On a alors $B = \mu_0 N \frac{I_1}{l_1} =$ le solénoïde équivaut à un solénoïde infini.

En terminale, il faut bien indiquer les paramètres maintenus constants : $I_1, \frac{N_1}{l_1}$, la variable : l_1 .



On peut admettre $B = \mu_0 N \frac{I_1}{l_1}$ et le vérifier expérimentalement (connaissant μ_0) ; ou éventuellement se servir du T.P. pour «découvrir» l'ordre de grandeur de μ_0 .

On peut évaluer une précision qui serait :

$$\frac{B_{\text{mesuré}} - B_{\text{théorique}}}{B_{\text{mesuré}}} = \frac{2,15 - 2,14}{2,15} = 0,5 \%$$

Il y a une imprécision de mesure (due à la sonde et éventuellement à l'ampèremètre) et une erreur systématique due à la longueur finie du solénoïde.

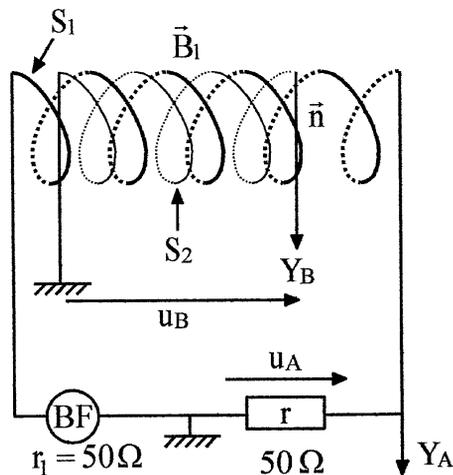
A.3. Étude d'une force électromotrice induite.

A.3.1. Loi de Lenz : la f.é.m. induite s'oppose par ses effets aux causes qui lui ont donné naissance.

A.3.2. La cause du phénomène d'induction dans S_2 est la variation d'intensité dans S_1 (à cause des signaux variables du B.F.), qui provoque en tout point une variation du champ magnétique créée par S_1 , donc une variation du flux magnétique à travers S_2 . La f.é.m. induite dans S_2 est

$$e = - \frac{d\phi}{dt}.$$

A.3.3.



+ = sens d'orientation de S_2 d'où on déduit \vec{n}

$u_B = e = \text{f.é.m. induite (S}_2 \text{ à vide)}$.

$$\phi = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{n} \pi R^2 = N_2 \pi R^2 B_1$$

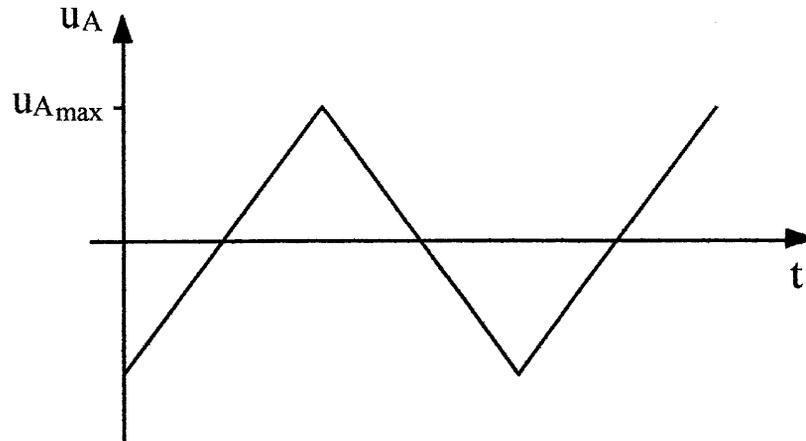
$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - N_2 \pi R^2 \frac{dB_1}{dt}$$

S_1 infini :

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l_1} = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} \frac{u_A}{r}$$

donc :

$$e = - N_2 \pi R^2 \mu_0 \frac{N_1}{l_1 r} \frac{du_A}{dt}$$



u_A fonction affine par morceaux $\rightarrow \frac{du_A}{dt}$ en créneaux.

u_B en créneaux : conforme à l'oscillogramme observé.

Pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$: $\frac{du_A}{dt} > 0 \Rightarrow e = u_B < 0$

Ceci est également conforme à l'oscillogramme.

Pour $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$: $\frac{du_A}{dt} = \frac{2 u_{A \max}}{\frac{T}{2}} = 4 u_{A \max} f$

donc : $e = - \frac{N_2 N_1 \pi R^2 \mu_0}{l_1 r} 4 u_{A \max} f$

$$e = - \frac{200 \cdot 140 \pi (0,025)^2 4 \pi 10^{-7} \cdot 4 \cdot 1,75 \cdot 2 \cdot 10^3}{0,412 \cdot 50} = - \mathbf{0,047 \text{ V}}$$

De même : $e = + 0,047 \text{ V}$ pour $t \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$

A.3.4.

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \vec{n}$$

à travers S_1 $\phi_1 = N_1 \vec{B}_1 \cdot \vec{n} \pi R^2$: flux propre

l'auto-inductance est :
$$L = \frac{\phi_1}{i_1} = \mu_0 \frac{N_1^2 \pi R^2}{l_1} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

$$2 f L = 0,96 \Omega \ll r_1 + r = 60 \Omega$$

Or comme $i_2 = 0$ dans S_2 , $M \frac{di_2}{dt} = 0$ (*non demandé au candidat*)

M = coeff d'inductance mutuelle S_1/S_2 (*non demandé au candidat*)

donc la loi des mailles dans le circuit contenant S_1 est : $e_{BF} = L \frac{di_1}{dt} + (r + r_1) i_1$.

e_{BF} : signal triangulaire.

Pour que i_1 soit aussi triangulaire, il faut que $\left| L \frac{di_1}{dt} \right| \ll (r + r_1) i_1$

d'où :
$$L \frac{i_{1 \max}}{\frac{T}{2}} \ll (r + r_1) i_{\max}$$

$$2 f L \ll r + r_1$$

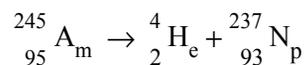
B. RADIOACTIVITÉ

B.1. B.1.1. 241 est le nombre de masse A , soit le nombre total de nucléons du noyau.

B.1.2. C'est un noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$.

B.1.3. C'est le temps au bout duquel la moitié de l'échantillon présent initialement s'est désintégré.

B.1.4. On trouve dans le tableau périodique que l'américium a 95 protons.



lors d'une désintégration radioactive il y a :

- conservation du nombre total de nucléons,
- conservation du nombre de charges,
- conservation de l'énergie,
- conservation de la quantité de mouvement.

B.1.5. On calcule d'abord l'énergie libérée par la réaction.

$$\Delta E = E_{0A_m} - (E_{0\alpha} + E_{0N_p}) \quad \text{avec : } E_0 = mc^2$$

Soit en Mev :
$$\Delta E = [241,0567 - (4,0015 + 237,0480)] \times 931,5$$

$$\Delta E = 6,70 \text{ Mev}$$

On vérifie ici qu'aucune particule ne sera relativiste puisque la plus légère d'entre elles a déjà une énergie au repos bien supérieure à ΔE .

En effet :
$$E_{0\alpha} = 4,0015 \times 931,5 = 3726 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad 6,70 \ll 3726$$

on pourra s'en persuader plus loin en comparant v_α à 3.10^8 m.s^{-1} mais on peut justifier dès maintenant un traitement par la mécanique classique.

$$\Delta E = E_{c\alpha} + E_{cf} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_f v_f^2 \quad (1)$$

$$0 = p_\alpha + p_f = m_\alpha v_\alpha + m_f v_f \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow v_f = -v_\alpha \frac{m_\alpha}{m_f}$$

$$(1) \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\alpha^2}{m_f} v_\alpha^2 = E_{c\alpha} \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_f} \right)$$

$$\begin{cases} E_{c\alpha} = \frac{\Delta E}{1 + \frac{m_\alpha}{m_f}} \\ E_{cf} = \Delta E - E_{c\alpha} \end{cases}$$

Application Numérique :

$E_{c\alpha} = 6,59 \text{ MeV}$ $E_{cf} = 0,11 \text{ MeV}$
--

Calcul des vitesses :

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2 E_{c\alpha}}{m_\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,59 \times 1,610^{-13}}{4,0015 \times 1,6610^{-27}}} = 1,78 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1}$$

$$v_{Np} = \sqrt{\frac{2 E_{cf}}{m_f}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,11 \times 1,610^{-13}}{237,0480 \times 1,6610^{-27}}} = 2,99 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}$$

B.1.6. ${}^4_2\text{He} + {}^9_4\text{Be} \rightarrow {}^{13}_6\text{X}$ il s'agit de carbone 13.

B.1.7. Le rayonnement γ fait partie des ondes électromagnétiques, leur fréquence est très élevée, leur énergie est de l'ordre du MeV.

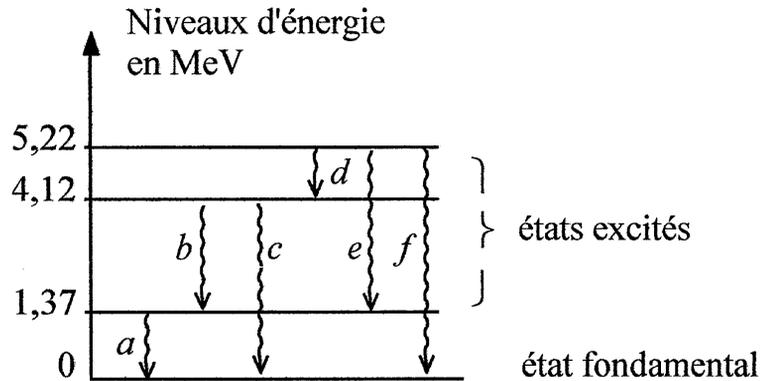
B.1.8. L'Américium a une période très longue et le Béryllium 9 est un noyau stable. Ce qui permet d'avoir les «réactifs» en présence sur une très longue durée.

B.2. B.2.1. ${}^{23}_{11}\text{Na} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{24}_{11}\text{Na}$ le nombre de protons ne varie pas.

B.2.2.
$${}^{24}_{11}\text{Na} \rightarrow {}^0_{-1}\text{e} + {}^{24}_{12}\text{Mg} + \bar{\nu}$$

↓ antineutrino

B.2.3. B.2.3.1.



Les rayons γ proviennent des réarrangements des nucléons ayant subi une excitation par rapport, à leur état fondamental lors du départ d'un électron.

Le retour à des niveaux moins excités, puis vers le fondamental se traduit par l'émission de photons γ .

B.2.3.2. Six photons γ peuvent être émis.

Le principe du calcul, si on appelle ΔE l'énergie mise en jeu dans la transition, consiste à écrire :

$$h\nu = \Delta E$$

soit :

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}$$

Application Numérique :

$$\nu_a = \frac{1,37 \times 1,602 \cdot 10^{-13}}{6,626 \cdot 10^{-34}} = 3,31 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$$

Les autres pouvant être trouvées par simples proportionnalité :

– $\nu_b = 6,64 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$,

– $\nu_c = 9,96 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$,

– $\nu_d = 2,66 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$,

– $\nu_e = 9,30 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$,

– $\nu_f = 12,6 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$.

C. ONDES ULTRASONORES

C.1. Sources et détecteurs d'ultrasons.

C.1.1. La gamme des fréquences audibles est située entre 20 et 20 000 Hz, les ultrasons ayant une fréquence supérieure à 20 000 Hz.

C.1.2. C.1.2.1. On observe une résonance de l'amplitude des vibrations mécaniques (la tension et l'amplitude étant proportionnelles).

On situe la bande passante comme étant l'intervalle de fréquence délimité par l'intersection de la droite d'équation $\frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$ avec la courbe de résonance en tension de l'oscillateur électrique. Cette bande passante sera identique à celle de l'oscillateur mécanique du fait de la proportionnalité $U_{\max} = 50 \text{ mV}$.

$$\frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = 35,4 \text{ mV}$$

$$\Delta N \approx 3 \text{ kHz}$$

C.1.2.2. $Q = \frac{N_0}{\Delta N}$ N_0 est la fréquence de résonance.

$$N_0 \approx 40 \text{ kHz}$$

$$Q = \frac{40}{3} = 13,3$$

c'est une résonance aiguë.

C.1.2.3. On a $\lambda = \frac{c}{N_0}$ avec $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

soit dans l'air : $\lambda = \frac{1}{40 \cdot 10^3} \times \sqrt{\frac{1,41 \times 8,32 \times 298}{29 \cdot 10^{-3}}}$ $\lambda = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

C.1.3. C.1.3.1. La puissance de l'onde sonore détectée est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration mécanique perçue par le transducteur.

Ainsi P est proportionnelle au carré de U_{\max} .

Si on a $P_1 = \frac{P_0}{2}$ alors $U_1^2 = \frac{U_0^2}{2}$ et $U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$

sur la courbe on lit : $U_0 = 125 \text{ mV}$ $U_1 = 88,4 \text{ mV}$

Ce qui détermine une intersection avec la droite $U_1 = 88,4 \text{ mV}$ à $\alpha = \pm 13^\circ$ environ.

On réceptionne donc la moitié de la puissance maximale dans un cône de 26° d'ouverture.

C.1.3.2. La surface émettrice de la coupelle est une source étendue. Si le diamètre de la source augmente elle deviendra plus directive, la largeur des pics s'amointrira et ceux-ci se rapprocheront.

C.1.4. C.1.4.1. Diverses réponses sont possibles, un montage amplificateur inverseur ou non pouvant convenir.

C.2. Quelques propriétés des ondes ultrasonores.

C.2.1. La réflexion.

C.2.1.1. Le trajet accompli par l'onde pour obtenir le premier écho est $2d$ (un aller et retour) la célérité de l'onde dans le milieu marin est ici :

$$C = \lambda N_0$$

on a donc :

$$\frac{2d}{\Delta t} = \lambda N_0$$

Soit :

$$d = \frac{\lambda N_0 \Delta t}{2}$$

Application Numérique : $d = 75$ m.

C.2.1.2. L'onde qui arrive sur le récepteur rencontre la coupelle sur laquelle elle se réfléchit, les rayons étant très faiblement inclinés, il peut y avoir réception du rayon doublement réfléchi, d'autant plus facilement si le bateau se déplace très lentement.

Le milieu de propagation absorbe de l'énergie si bien que les échos se trouvent de plus en plus amortis.

C.2.1.3. Il ne faut pas que e_0 s'enchevêtre avec le train d'onde de durée T_1 .

Au minimum Δt sera ici de $\frac{2d}{\lambda N_0}$ et précisément si $T_1 < \Delta t$ on aura toujours une bonne séparation des signaux.

Soit :

$$T_1 < 0,13 \text{ s}$$

C.2.2. La réfraction.

C.2.2.1. Les candidats peuvent travailler comme on le ferait en optique en écrivant directement la loi de Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

n_1 et n_2 étant les indices «sonores» de réfraction avec $\frac{n_1}{n_2} = \frac{c_1}{c_2}$ puisqu'il s'agit de couches d'air on aura :

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

et :

$$\frac{\sin i_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{\sin i_2}{\sqrt{T_2}}$$

un milieu chaud sera moins réfringent qu'un milieu froid.

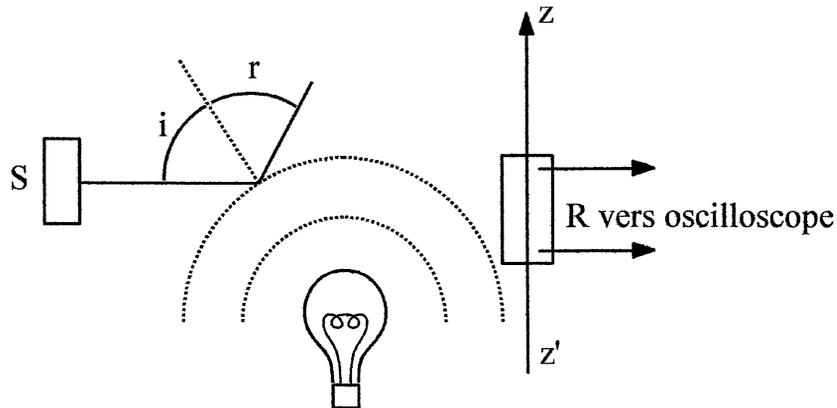
Il pourra y avoir réflexion totale si le rayon incident passe d'un milieu froid vers un

milieu chaud et que $\sin i_1 > \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$.

Application Numérique : $i_1 = 30^\circ$ $i_2 = 33^\circ$

si $i_1 = 80^\circ$ le rayon se réfléchit totalement, la valeur limite étant $66,2^\circ$.

C.2.2.2. L'air se trouve localement chauffé par l'ampoule. Le milieu chaud se trouve être moins réfringent.

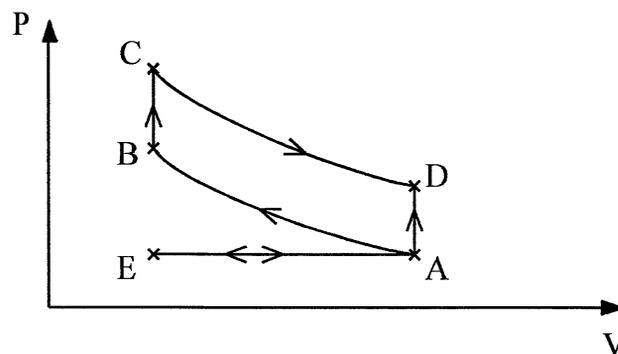


Les rayons seront :

- soit réfléchis totalement vers le haut par les couches d'air plus chaudes,
- soit éloignés de leur parcours horizontal vers le haut du fait de l'augmentation de i_2 par rapport à i_1 , dans les deux cas il faudra monter le récepteur pour retrouver davantage d'intensité.

D. THERMODYNAMIQUE

D.1.



Attention : erreur dans l'énoncé
cycle EABCDE au lieu de EABCD AE.

D.2. $4(V_A - V_B) = 1390 \text{ cm}^3$ $\frac{V_A}{V_E} = 9,5$.

On en déduit : $V_A = 388,4 \text{ cm}^3$ $V_B = 40,9 \text{ cm}^3$

D.3. D.3.1. En cinquième vitesse, on lit dans la notice technique que :

$$v_1 = 32,049 \text{ km/h} \quad \text{à : } \omega_1 = 1000 \text{ tr/min}$$

$$\text{à : } v = 90 \text{ km/h} \quad \omega = \omega_1 \frac{v}{v_1} = \mathbf{2808 \text{ tr/min}}$$

D.3.2. Un cycle correspond à deux tours d'arbre et à quatre temps.

BC étant quasi instantané, la durée de AB est égale à la durée d'un demi-tour d'arbre :

$$\frac{1}{2} \frac{60}{2808} = \mathbf{0,011 \text{ s}}$$

Cette durée étant très faible, il y aura peu de transfert de chaleur du gaz vers les parois, on peut ainsi considérer que pendant BC, le gaz subit une transformation **adiabatique**.

D.4. La durée de la compression AB est $t = 0,011 \text{ s}$.

La course du piston est $d = 77 \text{ mm}$.

La vitesse moyenne du piston est donc $\frac{d}{t} = \mathbf{7,2 \text{ ms}^{-1}}$.

En assimilant l'air à un gaz parfait diatomique, l'énergie cinétique moyenne d'une molécule est $\frac{5}{2} kT = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$:

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{5 kT}{m}} = \sqrt{\frac{5 RT}{M}} = 708 \text{ ms}^{-1}$$

$\langle \|\vec{v}\rangle \rangle$ a le même ordre de grandeur que $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$; cette valeur est beaucoup plus grande que la vitesse moyenne du piston. Le piston se déplace donc très lentement vis-à-vis des molécules, on peut ainsi considérer la transformation comme quasi statique. En négligeant les frottements, on pourra donc dire que la transformation est mécaniquement réversible.

Comme AB est adiabatique, que le gaz est parfait avec $\gamma = \text{cste}$, on pourra dire que $P \cdot V^\gamma = \text{cste}$ au cours de AB (de même pour CD).

D.5.

$$P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^\gamma = P_A a^\gamma = \mathbf{23,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

$$T_B = T_A a^{\gamma-1} = \mathbf{861 \text{ K}} \quad (t_B = 588^\circ\text{C})$$

D.6. D.6.1. A 90 km/h, la consommation de carburant est 5,1 L pour 100 km. En cinquième vitesse, la durée du cycle est $4 \cdot 0,011 = 0,043 \text{ s}$. Pendant un cycle, la voiture parcourt :

$$\frac{90}{3600} \cdot 0,043 = 1,07 \cdot 10^{-3} \text{ km}$$

d'où une consommation de $\frac{5,1}{100} \cdot 1,07 \cdot 10^{-3} = \mathbf{5,45 \cdot 10^{-5} \text{ L}}$

Soit : $7,20 \cdot 5,45 \cdot 10^{-5} = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ g}$

donc :
$$\frac{3,9 \cdot 10^{-2}}{114} \text{ mol} = 0,344 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

Cette quantité correspond à quatre cylindres, on a donc : $\frac{0,344 \cdot 10^{-3}}{4} = 8,60 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$ pour un cylindre.

D.6.2. La combustion du carburant dégage 5504 kJ/mol donc :

$$Q_{BC} = 5504 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,344 \cdot 10^{-3}}{4} = 474 \text{ J}$$

$Q_{BC} = n C_v (T_C - T_B)$: rappelé dans l'énoncé.

D.6.3. Or $n = \frac{P_A V_A}{R T_A}$ $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ (capacité calorifique molaire isochore)

donc :
$$T_C = T_B + \frac{Q_{BC}}{\frac{P_A V_A}{T_A (\gamma - 1)}}$$

$$T_C = 861 + \frac{474}{\frac{10^5 \cdot 388,4 \cdot 10^{-6}}{350 \cdot 0,4}} = 2568 \text{ K} \rightarrow 2295^\circ\text{C}$$

BC étant isochore, $P_C = P_B \frac{T_C}{T_B} = 69,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

D.7.
$$P_D = \frac{P_C}{a^\gamma} = 3,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_D = \frac{T_C}{a^{\gamma-1}} = 1043 \text{ K} \rightarrow 770^\circ\text{C}$$

D.8. • $Q_{AB} = 0$ (adiabatique) :

$$V_{AB} = \Delta U_{AB} - Q_{AB} = \frac{R}{\gamma - 1} n (T_B - T_A) = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1}$$

$$W_{AB} = 141,9 \text{ J}$$

$W_{AB} > 0$ (normal pour une compression. Cette dépense est en fait «prélevée» sur Q_{BC}).

• BC isochore :

$$W_{BC} = 0 \quad Q_{BC} = 474 \text{ J} \quad (\text{voir 6}).$$

$Q_{BC} > 0$: reçue par l'air grâce à la combustion du carburant.

- CD adiabatique :

$$Q_{CD} = 0 \quad W_{CD} + \frac{P_D V_D - P_C V_C}{\gamma - 1} = \frac{P_D V_A - P_C V_B}{\gamma - 1} = -423 \text{ J}$$

$W_{CD} < 0$ ($-W_{CD} > 0$) ; $-W_{CD}$ est le travail donné par le gaz au piston ; c'est la grandeur énergétique utile pour le moteur).

- DA isochore :

$$W_{DA} = 0 \quad Q_{DA} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_A - T_D) = \frac{P_A V_A}{T_A (\gamma - 1)} (T_A - T_D)$$

$Q_{DA} = -192 \text{ J}$ ($Q_{DA} < 0$) ; durant DA, le gaz donne de la chaleur à l'extérieur. Ceci est une perte énergétique (inévitabile selon le deuxième principe de la thermodynamique) pour le moteur).

Remarque : vérification : $\Sigma Q + \Sigma W = 142 + 474 - 423 - 192 = 0 = \Delta U \text{ cycle}$.

D.9. D.9.1. Le rendement thermodynamique du cycle est :

$$\eta = \frac{\text{«gain»}}{\text{«dépense»}} = \frac{\text{travail fourni par le gaz}}{\text{chaleur fournie par la combustion}}$$

$$\eta = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{BC}} = -\frac{(142 - 423)}{474} = 59 \%$$

D.9.2. Cherchons une expression littérale de η :

$$W_{\text{cycle}} = W_{AB} + W_{CD} = n C_V (T_B - T_A + T_D - T_C)$$

$$Q_{BC} = n C_V (T_C - T_B)$$

donc :

$$\eta = -\frac{T_B - T_A + T_D - T_C}{T_C - T_B} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

D.9.3.

$$T_B = T_A a^{\gamma-1} \quad T_C = T_D a^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{(T_D - T_A) a^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}} = \frac{1}{(9,5)^{0,4}} = 59 \%$$

D.10. $W_{\text{cycle}} = 142 - 423 = -281 \text{ J}$ pour un cylindre, soit -1124 J pour quatre cylindres.

La durée d'un cycle est 0,043 s, donc la puissance moyenne est :

$$P = \frac{1124}{0,043} = 26,3 \cdot 10^3 \text{ W}$$

Cette puissance est à peu près deux fois plus faible que la puissance maximale : 57,5 kW ; mais les conditions sont très différentes : 2808 au lieu de 5750 tr/min. Sur la courbe $P(\omega)$ à 2808 tr/min on lit : environ **30 kW**.

La valeur pratique et théorique sont donc voisines. Il est un peu étonnant de trouver une puissance théorique plus petite que la puissance réelle ; mais la consommation réelle du carburant est certainement un peu plus grande que la consommation optimale donnée dans la notice.

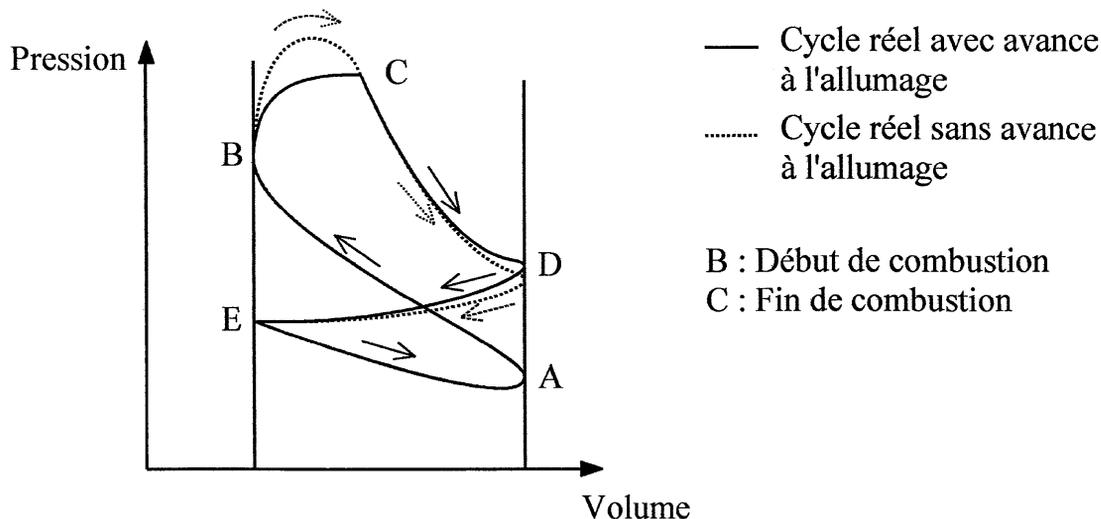
Une plus grande consommation augmente Q_{BC} et donc aussi $P_{théorique}$ (il se peut aussi que le pouvoir calorifique du carburant soit plus grand que celui de l'énoncé).

Le moment moyen du couple est $\frac{P}{\omega} = \frac{26,3 \cdot 10^3}{2808 \cdot \frac{2\pi}{60}} = 89 \text{ Nm}$.

La notice donne le couple maximal : 106 N/m à 2750 tr/min.

La courbe $C(\omega)$ donne à 2808 tr/min : environ **100 Nm**. Là encore, les valeurs pratique et théorique sont voisines.

D.11.



Pour le cycle réel, BC et DA ne sont pas isochores.

A cause de la viscosité des gaz, AE et EA ne sont pas deux trajets confondus.

Pour obtenir une puissance plus grande, on effectue une avance à l'allumage (la combustion n'étant pas instantanée).

C.A.P.E.S.

(Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de Chimie - Session : 1995

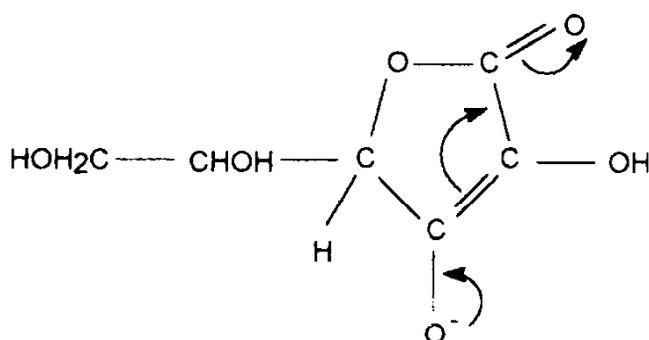
I. A. ETUDE GENERALE:

I.A.1. $M = 176 \text{ g.mol}^{-1}$.

I.A.2. Fonctions ester (ou lactone), alcool,énoI.

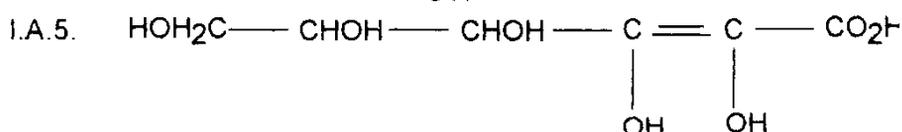
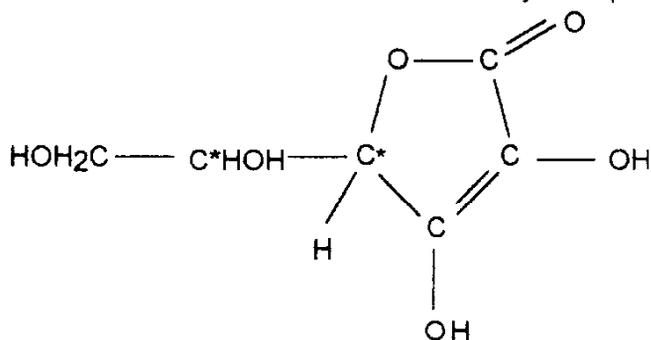
I.A.3.a. $-\text{CO}_2\text{H}$

I.A.3.b. Stabilisation de l'anion par délocalisation électronique:



I.A.4.a. Isomérisation de configuration : les deux stéréoisomères ne sont pas superposables l'un à l'autre ; ils peuvent être images l'un de l'autre dans un miroir (énantiomères) ou non (diastéréoisomères). Ils possèdent souvent une activité optique (dextrogyre ou lévogyre) mais pas systématiquement (diastéréoisomères méso optiquement inactifs). La présence de carbone asymétrique révèle l'existence de stéréoisomères mais le phénomène dépasse largement le cadre de la chimie organique (ammoniums quaternaires chiraux, complexes minéraux chiraux,...). Rappelons qu'une structure est chirale si elle ne possède pas d'axe alternant d'ordre n ; en pratique l'absence de plan de symétrie et de centre de symétrie suffit en général pour s'assurer de la chiralité d'une structure.

I.A.4.B. oui; existence de 2 carbones asymétriques juxtaposés (1 dans le cycle et 1 en α du cycle).



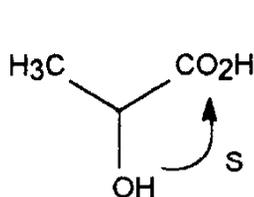
I.A.6.1. Acide 2 - hydroxypropanoïque

I.A.6.2. $\text{CH}_3-\text{C}^*\text{HOH}-\text{CO}_2\text{H}$

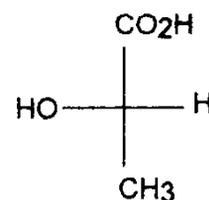
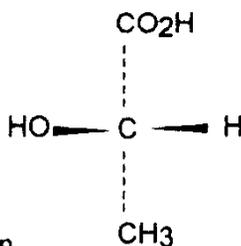
Règles de priorité: ordre décroissant des numéros atomiques des atomes directement liés.

- On place le substituant classé dernier (- H) à l'arrière de la représentation de Cram-Newmann.

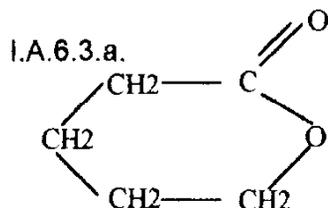
- On place l'oeil en avant de la liaison C - H et on doit voir défiler les différents substituants classés dans l'ordre inverse des aiguilles d'une montre => configuration (S).



Configuration (S) Newmann



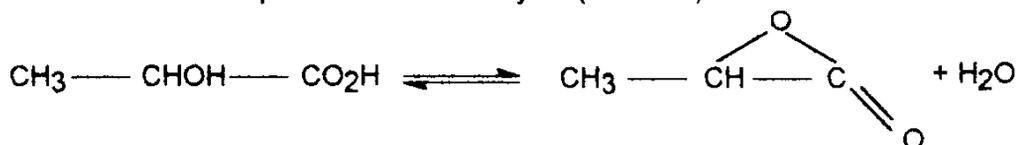
Représentation de Fischer



Peu de tensions dans le cycle (α de l'ordre de 109°)

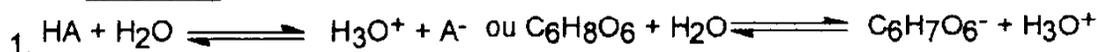
Cyclisation aisée.

I.A.6.3.b. Tensions plus fortes dans le cycle ($\alpha \approx 60^\circ$).



I.B. DOSAGE ACIDOBASIQUE:

I.B.1. CORRIGE:



HA est un acide faible (Cf. allure de la courbe de dosage possédant une zone tampon pour $v_b \approx v_{be}/2$ et pH supérieur à 7 à l'équivalence).

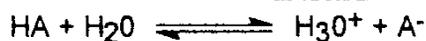
2.1. $pH = pK_a + \log [A^-] / [HA]$. A la demi équivalence, $[A^-]$ formé = $[HA]$ restant $\Rightarrow pH = pK_a$
 $v_{be} = 9,5 \text{ mL} \Rightarrow v_{bl} \approx 4,75 \text{ mL} \Rightarrow pH = pK_a \approx 4,0$.

2.2. Au point E, $n \text{ OH}^-$ ajouté = $n \text{ HA}$ initial $\Rightarrow C_a V_a = C_b V_b$

$$C_a = C_b V_{be} / V_a = 2,85 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$n_A = 2,85 \cdot 10^{-3} \text{ mol dans } 100 \text{ mL}; M_{C_6H_8O_6} = 176 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$m_A = 2,85 \cdot 10^{-3} \times 176 = \underline{0,502 \text{ g}}$$



Inventaire: H_3O^+ , OH^- , HA, A^- , H_2O

$$[H_3O^+] = 1,6 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[OH^-] = 6,3 \times 10^{-12} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$E.N. \Rightarrow [H_3O^+] = [OH^-] + [A^-] \Rightarrow [A^-] = [C_6H_7O_6^-] \approx [H_3O^+]$$

$$[C_6H_7O_6^-] \approx [H_3O^+] = 1,6 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$C.M. \Rightarrow [HA]_0 = [HA]_r + [HA]_f \Rightarrow [HA]_r = [C_6H_8O_6] = C_0 - [A^-]_f$$

$$[C_6H_8O_6] = 2,85 \times 10^{-2} - 1,6 \times 10^{-3} \approx 2,7 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1};$$

$$3.2. K_a = [H_3O^+][A^-] / [HA] = 9,5 \times 10^{-5}; pK_a = -\log K_a \approx 4,0$$

$$4. \alpha = [A^-] / [HA]_0 = 0,056 = 5,6 \%$$

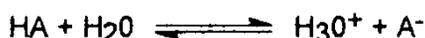
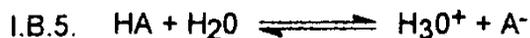
L'acide ascorbique est bien un acide faible.

I.B.2. On verse environ 50 mL d'eau distillée dans une fiole jaugée de 100 mL puis le comprimé à dissoudre (pilé si nécessaire). Agitation pour dissolution complète; complément d'eau distillée jusqu'au trait de jauge. Agitation pour homogénéiser.

Remarque : l'emploi d'une fiole jaugée n'est pas indispensable puisque, par la suite, on dose la totalité de la solution sans effectuer de prélèvement.

I.B.3. Tout indicateur coloré dont le pKa du couple HI / I⁻ est voisin de 8 : Phénolphthaléine, Bleu de thymol (2ème virage).

I.B.4. " Vitascorbol 500 " => le comprimé contient environ 500 mg de vitamine C par comprimé.



$$\text{C-h} \qquad \qquad \qquad h \qquad h \quad [\text{H}_3\text{O}^+] = h; [\text{A}^-] \approx h; [\text{HA}] \approx \text{C} - h$$

$$\text{Ka} = h^2 / \text{C} - h; \text{ si } h \ll \text{C} \Rightarrow \text{Ka} \approx h^2 / \text{C} \text{ et } h = \sqrt{\text{KaC}}$$

$$\text{pH} = 1/2 \text{ pKa} - 1/2 \log \text{C}$$

A.N. On retrouve pour $v = 0$ $\text{pH} \approx 2,8$.

Limite de validité : $h / \text{C} < 1 / 10 \Rightarrow \text{pKa} - \text{pC} > 2$

Il faut aussi que HA soit l'espèce prédominante soit $\text{pH} < \text{pKa} - 1$

I.B.6. Si les 2 solutions sont diluées 100 fois, vb éq reste inchangé.

- Au départ ($v = 0$), l'approximation devient discutable : par contre $[\text{H}_3\text{O}^+] \approx [\text{A}^-]$

$$\text{Ka} = h^2 / \text{C}' - h \Rightarrow h^2 + \text{Ka} h - \text{Ka} \text{C}' = 0 \Rightarrow h = \frac{-\text{Ka} + \sqrt{\text{Ka}(\text{Ka} + 4\text{C}')}}{2}$$

$$\text{avec } \text{Ka} = 9,5 \times 10^{-5} \text{ et } \text{C}' = 2,85 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow h = 1,24 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

et $\text{pH} \approx 3,9$. (avec l'approximation précédente, nous aurions obtenu $\text{pH} \approx 3,77$).

- A la demi-équivalence, le pH est légèrement supérieur à pKa.

$$\text{E.N.} \Rightarrow [\text{Na}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{A}^-] \Rightarrow \text{C}' \text{Va} / 2 (\text{Va} + \text{Vb}) + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{A}^-]$$

$$\text{C.M.} \Rightarrow [\text{A}^-] + [\text{HA}] = \text{C}' \text{Va} / (\text{Va} + \text{Vb}) = 2,7 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} = \text{C}''$$

$$\text{Ka} = [\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+] / [\text{HA}] \Rightarrow [\text{HA}] = (\text{C}'' / 2) - h; [\text{A}^-] = (\text{C}'' / 2) + h$$

$$2h^2 + h \times (\text{C}'' + 2 \text{Ka}) - \text{Ka} \text{C}'' = 0$$

A.N. $\text{pH} \approx 4,3$.

- A l'équivalence, la relation $\text{pH} = 1/2 \text{ pKe} + 1/2 \text{ pKa} + 1/2 \log \text{C}$ n'est plus applicable car le pH est voisin de 7; $[\text{H}_3\text{O}^+]$ n'est plus négligeable.



$$\text{On a } [\text{OH}^-] = [\text{HA}] + h \text{ et } [\text{OH}^-] = \text{Ke} / h = [\text{HA}] + h$$

$$\text{Avec Ka, } \text{Ke} / h = (h [\text{A}^-] / \text{Ka}) + h \approx (h \text{C}' / \text{Ka}) + h$$

$$h^2 = \text{Ke} / 1 + \text{C}' / \text{Ka} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{\text{Ke}}{1 + \frac{\text{C}'}{\text{Ka}}}} \quad \text{A.N. } \text{C}' = 2,6 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \text{ (dilution) et}$$

$$h = \sqrt{\frac{\text{Ke}}{1 + 2,6}} = 7,28 \approx 7,3$$

- Après l'équivalence, on a un excès d'ions OH⁻ de concentration initiale 10⁻⁴ mol.L⁻¹. Le pH va tendre vers 10.

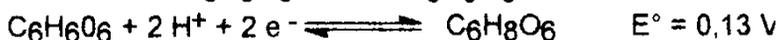
L'allure de la courbe $\text{pH} = f(vb)$ se trace alors facilement.

I.C. DOSAGE D'OXYDO-REDUCTION:

I.C.1.1. $M(\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}) = 248 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \Rightarrow m = 0,05 \times 248 \times 0,1 = 1,24 \text{ g}$

I.C.1.2. On pèse 0,010 mole de diiode solide à la balance électronique (coupelle de pesée, tarage de la balance). On dissout cette quantité dans une solution d'iodure de potassium $\text{K}^+ + \text{I}^-$ de concentration $\approx 0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ introduite dans une fiole jaugée de 100 mL. On ajuste au trait de jauge puis on agite pour homogénéiser.

I.C.2.1. Ox = $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6$; Red = $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6$.



I.C.2.2.1. $E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) > E^\circ(\text{Ox}/\text{Red}) \Rightarrow \text{I}_2 + \text{Red} \rightarrow \text{Ox} + 2\text{H}^+ + 2\text{I}^-$

Note: On devrait plutôt écrire le couple I_3^-/I^- mais on écrira I_2 par la suite pour simplifier.

I.C.2.2.2. Teinte bleue de la solution $\Rightarrow \text{I}_2$ (ou I_3^-) en excès.

I.C.2.3. $E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) > E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) \Rightarrow \text{I}_2 + 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-} \rightarrow \text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2\text{I}^-$

I.C.2.4. Dosage indirect (trop souvent appelé à tort dosage en retour).

I.C.2.5. $n \text{ S}_2\text{O}_3^{2-} \text{ versé} = 2n \text{ I}_2 \text{ restant} = 2 \times (n \text{ I}_2 \text{ initial} - n \text{ Red})$

$$C_2 V_2 = 2 \times (C_3 V_3 - C' V') \text{ ou } C' V' = C_3 V_3 - C_2 V_2 / 2$$

I.C.2.6. $C' = 2,85 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; $n' = 2,85 \times 10^{-3} \text{ mol}$ et $m = 0,500 \text{ g} \Rightarrow \text{Vitascorbol 500}$

I.C.2.7. L'acide ascorbique étant un réducteur modéré, il empêchera, en tant qu'additif, certaines oxydations. Il réagira surtout comme anti-oxygène.

I.C.3.1. Cette question est assez ouverte; il y a plusieurs façons convenables de réaliser ce dosage.

Exemple: On ne dose que 5 mL de solution S3. On ajoute un volume d'eau distillée $V_{\text{eau}} = 15 \text{ mL}$.

Burette jaugée de 25 mL. Electrode au calomel saturé (référence). Electrode de platine.

Millivoltmètre électronique (grande impédance d'entrée). Eau distillée. Bécher 100 mL.

Agitation magnétique.

L'eau distillée ajoutée sert à immerger les électrodes (surtout au début du dosage).

I.C.3.2. $\text{I}_2 + 2\text{S}_2\text{O}_3^{2-} \rightarrow \text{S}_4\text{O}_6^{2-} + 2\text{I}^-$

A l'équivalence redox, on a $V_2 \text{ eq} = 2 C_3 V_3 / C_2$

- Avant le point d'équivalence, on doit considérer le couple redox I_2/I^- (ou I_3^-/I^-)

On a : $U = E_{\text{mes}} - E_{\text{ref}}$ avec $E_{\text{mes}} = 0,53 + 0,03 \log [\text{I}_2] / [\text{I}^-]^2$

soit $U = 0,275 + 0,03 \log [\text{I}_2] / [\text{I}^-]^2$

Quand V_2 augmente, $[\text{I}_2]$ diminue et $[\text{I}^-]$ augmente. Si on considère faible l'influence de la dilution devant les variations de concentrations, on peut en déduire que U est une fonction décroissante de V_2 . Pourtant le terme multiplicatif étant très faible (0,03) et la fonction étant logarithmique, on peut en déduire que l'allure $U = f(V_2)$ sera pratiquement un palier très légèrement décroissant autour de $U = 0,27 \text{ V}$.

- Après le point d'équivalence, la totalité du diiode a pratiquement disparu. L'ion thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ est en excès.

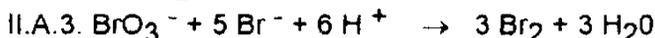
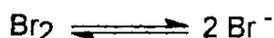
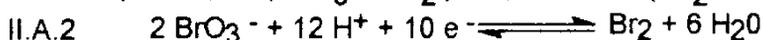
On a $U = -0,165 + 0,03 \log [\text{S}_4\text{O}_6^{2-}] / [\text{S}_2\text{O}_3^{2-}]^2$

Quand V_2 augmente, $[\text{S}_4\text{O}_6^{2-}]$ diminue (dilution) et $[\text{S}_2\text{O}_3^{2-}]$ augmente. U est donc une fonction décroissante de V_2 . Pour les mêmes raisons qu'auparavant, on obtiendra un palier légèrement décroissant autour de $-0,165 \text{ V}$.

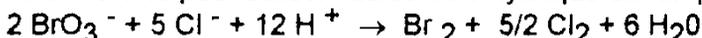
L'allure de la courbe $U = f(V_2)$ se trace assez facilement : on obtiendra une chute de potentiel de $0,25\text{V}$ à $-0,15\text{V}$ pour $V_2 = V_2 \text{ eq} = 2 C_3 V_3 / C_2$.

II DEUXIEME PARTIE : ETUDE D'UNE CINETIQUE

II.A.1. A pH = 0, $E^\circ (\text{BrO}_3^- / \text{Br}_2) = 1,49 \text{ V} > E^\circ (\text{Br}_2 / \text{Br}^-) = 1,07 \text{ V}$



II.A.4. On ne peut utiliser l'acide chlorhydrique car on pourrait avoir la réaction redox :



II.A.5. Le pH doit être acide (pH < 3) sinon Br_2 de dismute en BrO_3^- et Br^- . Le flacon doit être conservé à l'abri de la chaleur (dibrome volatil et toxique) et de la lumière (verre teinté).

II.B.1. $n^\circ \text{BrO}_3^- = 1,000 \times 10^{-4} \text{ mol}$ $n^\circ \text{H}^+ = 5 \times 10^{-3} \text{ à } 10^{-2} \text{ mol}$
 $n^\circ \text{Br}^- = 10^{-3} \text{ à } 0,1 \text{ mol}$

On peut utiliser du bromate et bromure de sodium ou de potassium et de l'acide sulfurique.

II.B.2. Si cette réaction a un ordre, on peut écrire:

$$v = -d[\text{BrO}_3^-] / dt = k' [\text{BrO}_3^-]^\alpha [\text{Br}^-]^\beta [\text{H}^+]^\gamma \quad \text{ordre total} = \alpha + \beta + \gamma$$

Si Br^- et H^+ sont en grand excès, $[\text{H}^+] \approx \text{cste}$ et $[\text{Br}^-] \approx \text{cste}$: on a alors

$$v = (k' [\text{Br}^-]^\beta [\text{H}^+]^\gamma) [\text{BrO}_3^-]^\alpha \approx k [\text{BrO}_3^-]^\alpha$$

II.B.3.1. Voir graphe $[\text{BrO}_3^-] = f(t)$

II.B.3.2. Quand $[\text{BrO}_3^-]$ augmente, la vitesse v diminue : la vitesse de réaction diminue quand la concentration des réactifs diminue.

II.B.3.3. En traçant les tangentes à la courbe et en calculant les coefficients directeurs, on trouve:

$$v_0 \approx 6 \times 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$$

$$v_{1000} \approx 2,8 \times 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$$

II.B.3.4. Sur la courbe, on a $t = t_{1/2}$ quand $[\text{BrO}_3^-] = [\text{BrO}_3^-]_0 / 2$

soit $t_{1/2} \approx 1730 \text{ s}$.

II.B.4.1. Réaction d'ordre 1 si: $-d[\text{BrO}_3^-] / dt = k [\text{BrO}_3^-]$ ou $-d[\text{BrO}_3^-] / [\text{BrO}_3^-] = k dt$

$\text{Ln} \frac{[\text{BrO}_3^-]_0}{[\text{BrO}_3^-]} = kt$. On trace le graphique $\text{Ln} \frac{[\text{BrO}_3^-]_0}{[\text{BrO}_3^-]} = f(t)$ avec le tableau suivant:

t (en s)	0	100	200	500	1000	1500	2000
$[\text{BrO}_3^-]$ en 10^{-4} mol.L^{-1}	10,00	9,61	9,24	8,20	6,73	5,56	4,53
$\text{Ln} \frac{[\text{BrO}_3^-]_0}{[\text{BrO}_3^-]}$	0	$4,0 \times 10^{-2}$	$7,9 \times 10^{-2}$	$19,8 \times 10^{-2}$	$39,6 \times 10^{-2}$	$58,7 \times 10^{-2}$	$79,2 \times 10^{-2}$

Le graphe obtenu est une fonction linéaire: la cinétique est d'ordre 1 par rapport à $[\text{BrO}_3^-]$.

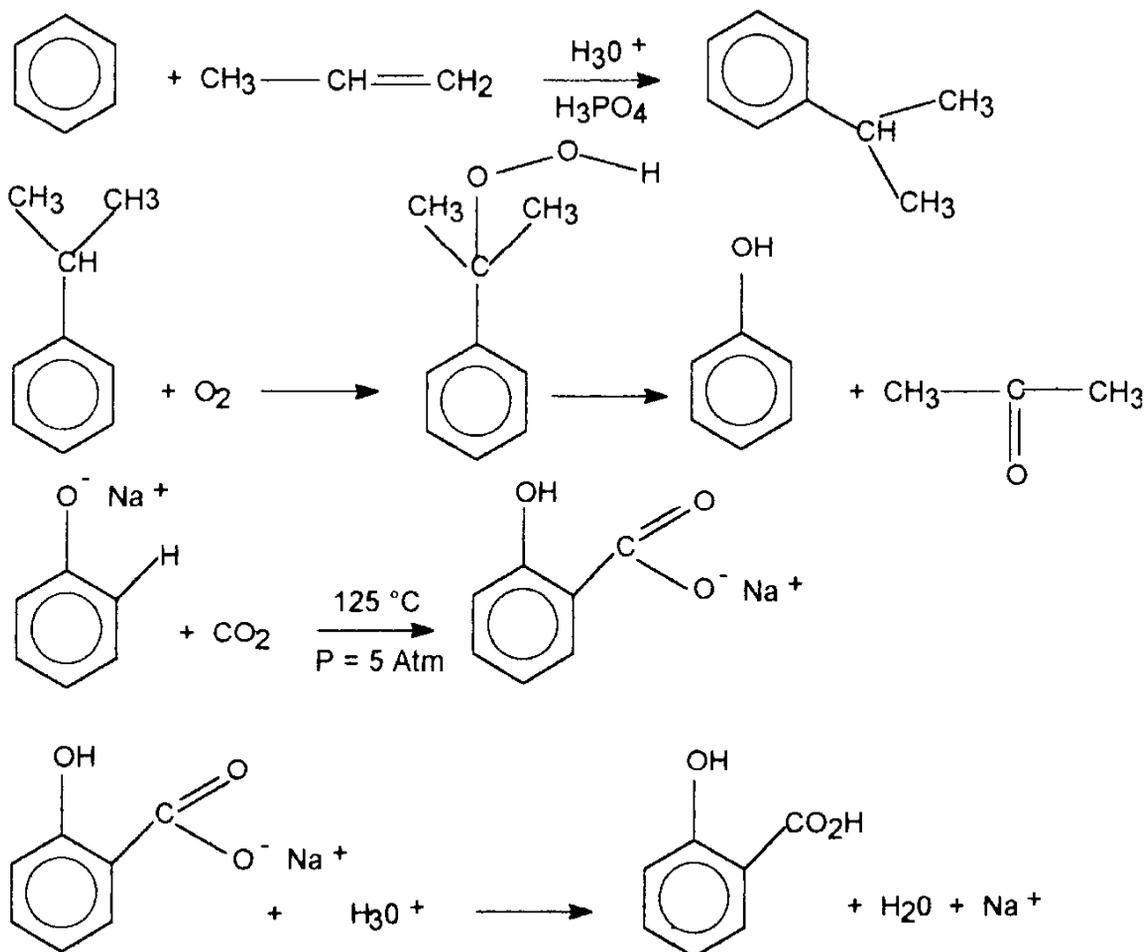
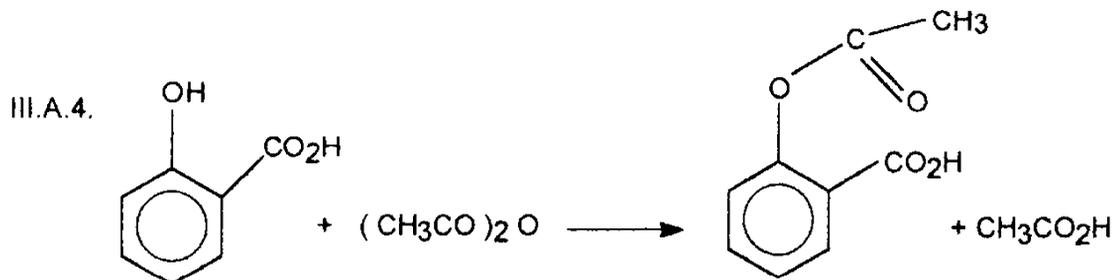
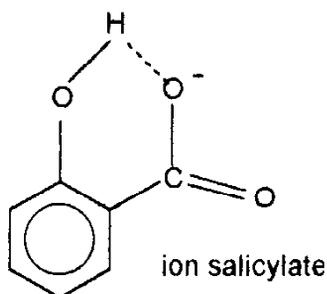
II.B.4.2. $k = \frac{1}{t} \text{Ln} \frac{[\text{BrO}_3^-]_0}{[\text{BrO}_3^-]} \approx 0,4 / 1000 = 4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

II.B.5. $\text{Ln} \frac{[\text{BrO}_3^-]_0}{[\text{BrO}_3^-]} = \text{Ln} 1 / 0,1 = \text{Ln} 10 = kt \Rightarrow t = \text{Ln} 10 / k$

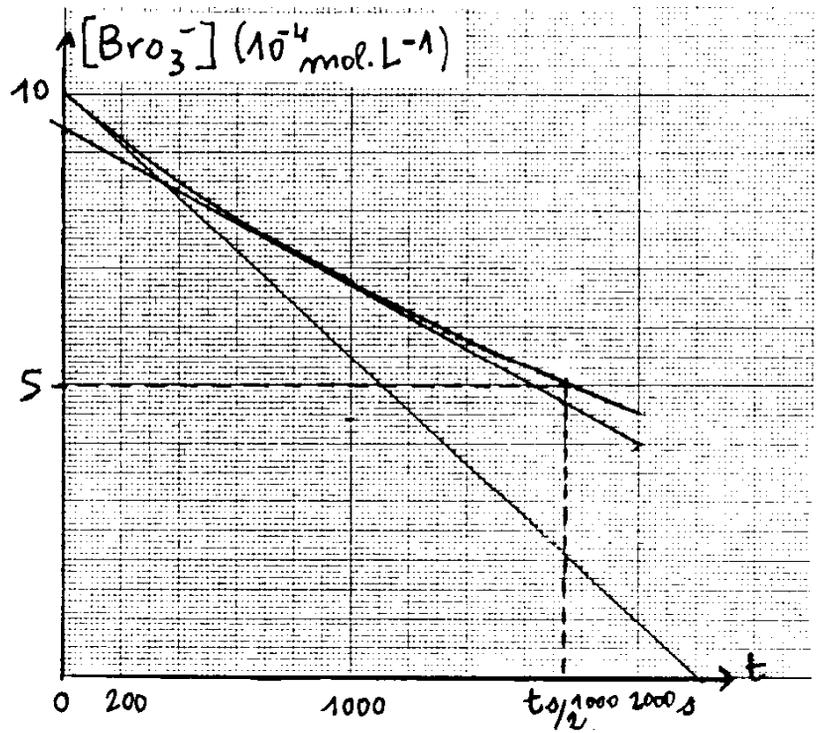
A.N. $t = 2,30 / 4 \times 10^{-4} \approx 5750 \text{ s} = 1 \text{ h } 36 \text{ min}$.

PARTIE III : PREPARATION DU SALICYLATE DE METHYLE:

III.A.1.

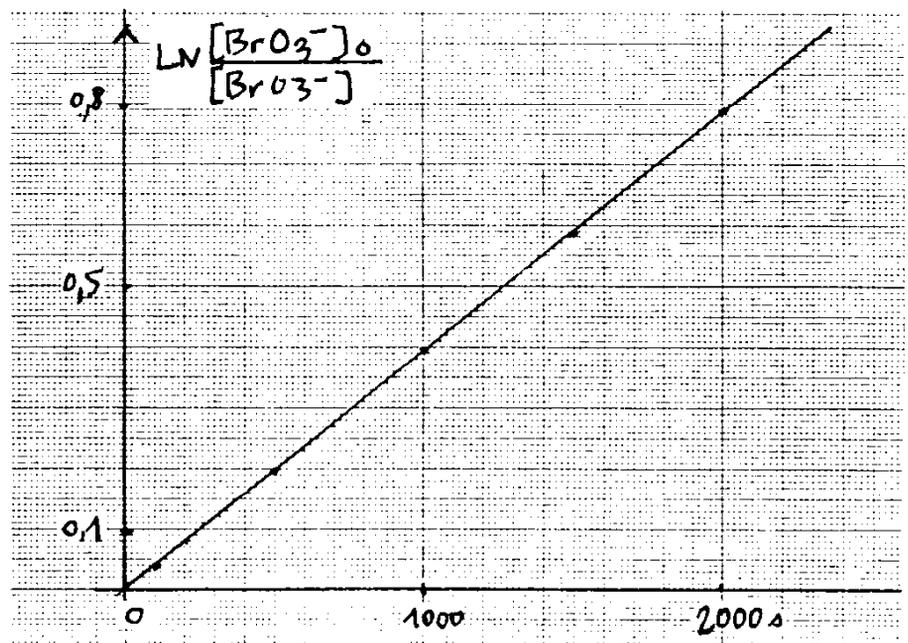
III.A.2. A : isopropylbenzène ou cumène $C_6H_5-CH(CH_3)_2$ B : Acétone ou propanone $CH_3-CO-CH_3$ III.A.3 Liaisons hydrogène intramoléculaires dans l'isomère ortho \Rightarrow stabilisation relative de ce composé.

Annexe 1



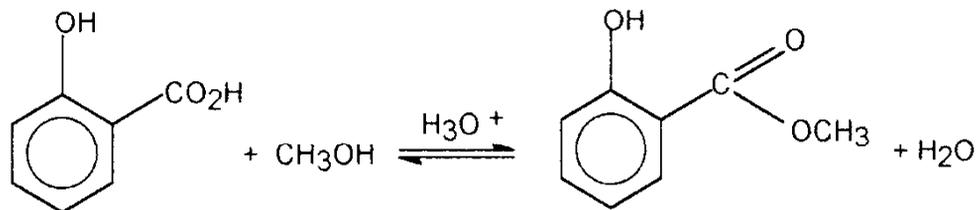
Annexe 2

t (s)	0	100	200	500	1000	1500	2000
$[\text{BrO}_3^-] (10^{-4} \text{ mol L}^{-1})$	10,00	9,61	9,24	8,20	6,73	5,56	4,53
$\text{LN} \frac{[\text{BrO}_3^-]_0}{[\text{BrO}_3^-]}$	0	$4,0 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-2}$	$19,8 \cdot 10^{-2}$	$39,6 \cdot 10^{-2}$	$58,7 \cdot 10^{-2}$	$79,2 \cdot 10^{-2}$



III.B. QUESTIONS:

III.B.1.



III.B.2. Réaction limitée, lente et athermique

On augmente la limite d'estérification de plusieurs façons:

- Excès d'un des réactifs
- Séparation de l'ester et de l'eau (Déshydratant P_4O_{10} ou distillation fractionnée)

Ici la distillation fractionnée n'est pas intéressante car $\theta_{\text{éb}} \text{CH}_3\text{OH} = 65^\circ\text{C} < \theta_{\text{éb}} \text{H}_2\text{O} = 100^\circ\text{C}$ (sous 1 bar) et CH_3OH est un des réactifs.

III.B.3. n acide sal. = $30 / 138 = 0,217$ mol ; n $\text{CH}_3\text{OH} = 70,0 / 32 = 2,19$ mol

(Note: 10 mL d'acide sulfurique => 18,3 g (à 96 %) => $m \text{H}_2\text{SO}_4 = 17,6$ g et $n \text{H}_2\text{SO}_4 = 0,180$ mol)

III.B.4. CH_3OH est en excès. La réaction sera plus quantitative et CH_3OH est moins onéreux que l'acide salicylique.

III.B.5. La température est un facteur cinétique.

L'acide sulfurique est un catalyseur (H_3O^+).

III.B.6. Phase aqueuse supérieure = eau + acide sulfurique + ε acide salicylique + ε méthanol restant

Phase organique inférieure = acide salicylique + salicylate de méthyle + ε méthanol restant + acide sulfurique.

III.B.7. HCO_3^- sert à neutraliser le milieu réactionnel : réaction de l'acide sulfurique restant ainsi que de l'acide salicylique qui n'a pas réagi => Transformation en salicylate de sodium soluble en phase aqueuse.

III.B.8. On ne pourrait pas utiliser une solution de soude à 5 % => réaction de la fonction phénol en phénolate de sodium et surtout saponification de l'ester.

III.B.9. On transvase la phase organique dans un erlenmeyer bouché où l'on a introduit préalablement le sulfate de magnésium anhydre. On agite énergiquement. La filtration permet d'éliminer l'agent desséchant.

III.B.10. Schéma avec : chauffe-ballon électrique + colonne Vigreux + Thermomètre + réfrigérant descendant à eau + ballon recette . L'ensemble doit être étanche et relié à une trompe à eau.

La distillation sous pression réduite sert à abaisser la température d'ébullition de l'ester.

III.B.11. 1 mole acide \rightarrow 1 mole ester

On devrait donc obtenir 0,217 mol ester soit $0,217 \times 152 \approx 33,0$ g ester.

III.B.12. Rendement $R = 24 / 33 = 0,73 = 73\%$

III.B.13. Acide sulfurique concentré = déshydratant puissant et acide fort
Méthanol = inflammable - Vapeurs très toxiques.

C.A.P.E.S.**(Concours Interne)****SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE**

Composition d'électricité appliquée - Session : 1995

A : ELECTRONIQUE**Etude d'un générateur de fonctions à signaux numérisés****1) Génération de signaux numérisés:****1.1) Etude de l'horloge:**1.1.1) Equation différentielle donnant l'évolution de la tension $u_f(t)$ durant l'état instable

$$R_f C_f \frac{du_f}{dt} + u_f(t) = V_{CC}$$

Expression de la tension $u_f(t)$

$$u_f(t) = V_{CC} (1 - e^{-t/\theta}) \quad \theta = R_f C_f$$

Expression de la durée t_0 il y a basculement du comparateur quand $u_f(t)$ atteint $3/2 V_{CC}$.

$$t_0 = \theta \ln(3) = 1.09 \theta \quad \text{Applic num. } t_0 = 35 \mu\text{s}$$

1.1.2) Description du fonctionnement du convertisseur à partir de l'instant $t=0$ Quand la tension u_c , qui est décroissante, devient légèrement inférieure à V , la sortie du comparateur passe au niveau haut.1.1.3) Equation différentielle donnant l'évolution de la tension $u_c(t)$ pendant la durée t_0

$$I = C \frac{du_c}{dt} + u_c(t)/R$$

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c(t) = RI \quad \tau = RC$$

Expression de la tension $u_c(t)$

$$u_c(t) = RI + (V - RI) e^{-t/\tau} \quad \text{car conditions initiales } u_c(t=0) = V$$

Expression approchée de la tension $u_c(t)$

$$u_c(t) \approx V + (RI - V) (t/\tau) = V [1 + ((RI/V) - 1) (t/\tau)]$$

Valeur littérale de la tension $u_c(t)$ à l'instant t_0

$$u_c(t_0) \approx V [1 + ((RI/V) - 1) (t_0/\tau)]$$

Applic. num. $u_c(t_0) - V \approx V ((RI/V) - 1) (t_0/\tau) = 3.06 \text{ mV} \quad (V = 5.0 \text{ V})$ 1.1.4) Equation différentielle donnant l'évolution de la tension $u_c(t)$ pendant la deuxième phase

$$RC \frac{du_c}{dt} - u_c(t) = 0 \quad \tau = RC$$

Expression de la tension $u_c(t)$ (nouvelle origine des temps en t_0)

$$u_c(t) = V [1 - ((RI/V) - 1) (t_0/\tau)] e^{-t/\tau} \quad \text{car cond. init. } u_c(t=0) = V - (V - RI) (t_0/\tau)$$

Durée t_1 de cette phase ($u_c(t=t_1) = V$)

$$t_1 = \tau \ln[1 - ((RI/V) - 1) (t_0/\tau)]$$

Expression approchée de t_1 sachant que $[(RI/V) - 1] t_0/\tau \ll 1$

$$t_1 \approx ((RI/V) - 1) t_0$$

1.1.5) Expressions de la période T_c et de la fréquence F_c de $u_c(t)$

$$T_c = t_1 + t_2 \approx (RI/V) t_0$$

$$F_c \approx (1/(RI t_0)) V$$

fréquence d'oscillation proportionnelle à la tension de commande V : VCO

Applic num pour $V = 5,0 \text{ V}$

$$F_c = 10,1 \text{ kHz}$$

Graphes des tensions $u_c(t)$ et $v_s(t)$ (tension de sortie du convertisseur).

1.1.6) Graphe de $v_h(t)$ tension de sortie de la bascule

Fonction réalisée par la bascule D rebouclée
diviseur de fréquence par 2

Intérêt

signal carré de rapport cyclique 1/2

Expression de la fréquence F_h de $v_h(t)$ en fonction de V

$$F_h \approx (1/(2 R I t_0)) V$$

Applic num pour $V = V_{\max} = 10 \text{ V}$

$$F_h \approx 10,1 \text{ kHz}$$

1.2) Etude de la mémoire EPROM :

1.2.1) Nombre d'octets contenus par la mémoire EPROM

$$2048 \text{ octets} = 2^{11} \text{ octets}$$

Nombre N de broches d'adresses A_0, A_1, \dots, A_{N-1}

$$N = 11$$

1.2.2) Nombre de types de signaux différents que peut contenir cette mémoire
pour un signal: 128 octets = 2^7 octets

$$\text{nombre de types de signaux } 2^{11}/2^7 = 2^4 = 16$$

Répartition des broches d'adresses

$n = 7$ broches liées aux adresses de poids faible A_0, A_1, \dots, A_6

$N-n = 4$ broches liées aux adresses de poids fort A_7, A_9, A_{10}, A_{11}

1.3) Etude du générateur d'adresses:

1.3.1) Mode de fonctionnement des circuits

broche UP/DOWN connectée à V_{Logic} : compteur

broche BIN/DEC connectée à V_{Logic} : binaire

Condition nécessaire pour que le 2^{ème} circuit compte

le 2^{ème} circuit comptera quand la broche CE sera à l'état bas c'est-à-dire quand la broche TC du 1^{er} circuit sera à l'état bas pour indiquer une retenue après avoir compté 16 fronts montants à l'entrée CP

Condition entraînant la ré-initialisation et valeur chargée.

après un régime transitoire, le condensateur C ($10 \mu\text{F}$) est chargé. Il y aura chargement parallèle de la valeur 0000 0000 quand PL sera à l'état haut c'est-à-dire quand le mot binaire associé à l'état des sorties parallèles sera 0110 0100 : valeur décimale 100

1.3.2) Valeurs extrêmes entre lesquelles évolue le nombre associé à l'état logique des sorties // le nombre associé à l'état logique des sorties // évolue entre 0 et 99; dès que la valeur 100 est affichée en sortie, il y a remise à zéro du compteur.

Sorties sélectionnées par le générateur d'adresses dans un espace-mémoire de 128 positions dans un espace de 128 positions mémoire, seules les 100 premières positions sont utilisées.

1.4) Etude du convertisseur numérique-analogique:

1.4.1) Valeurs extrêmes de la tension V_{s1} suivant la valeur du nombre binaire affiché en entrée

$$V_{s1} \text{ évolue entre } 0 \text{ V et } -(255/256) V_{\text{ref}}$$

1.4.2) Expression de la tension de sortie V_{s2} de l'amplificateur opérationnel AO2

$$V_{s2} = -2 V_{s1} - V_{\text{ref}}$$

Valeurs limites entre lesquelles peut varier la tension V_{s2}

V_{s2} évolue entre $-V_{ref}$ et $+(255/256) V_{ref}$

Valeur V_{s2} quand le nombre binaire est %1000 0000

$V_{s2} = 0$ V

1.4.3) Amplitude de la tension de sortie $V_{s2}(t)$ quand le système régénère ce signal

V_{s2} évolue entre $-(255/256) V_{ref}$ et $+(255/256) V_{ref}$.

signal sinusoïdal centré sur 0 et d'amplitude $(255/256) V_{ref}$

Défauts apparaissant sur ce signal de sortie d'allure sinusoïdale

le mot binaire affiché à l'entrée du CNA est présent pendant une durée T_h ; le signal de sortie est constant pendant cette durée; le signal généré est une sinusoïde présentant des paliers de durée T_h .

2) Filtrage de signaux:

2.1) Spectre du signal d'entrée du premier filtre:

Construction du spectre du signal $v(t)$

fréquence des raies: $f_0=100$ Hz et les couples nF_e-f_0 et nF_e+f_0

dessin

2.2) Réponse en fréquence du premier filtre :

Transmittance $T_1 = \frac{V_2}{V_1}$

$T_1 = 1/(1 + j\omega/\omega_1)$

Valeur du gain G_1

pour $\omega \ll \omega_1$ $G_1 = 0$ dB

pour $\omega = \omega_1$ $G_1 = -3$ dB

Expression approchée du gain G_1 pour $\omega \gg \omega_1$

$G = -20 \log(\omega/\omega_1)$

Pente de l'asymptote oblique exprimée en dB/octave

penne = -6 dB/octave

Fonction réalisée par ce filtre

filtre passe-bas du premier ordre

2.3) Réponse en fréquence du second filtre :

Amplification en continu de ce filtre $A = 1$

Transmittance $T_2 = \frac{V_3}{V_2}$

$T_2 = 1/[1 + j 2m \omega/\omega_1 + (j\omega/\omega_1)^2]$

Valeur du gain G_2

pour $\omega \ll \omega_1$: $G_2 = 0$ dB

pour $\omega = \omega_1$: $G_2 = -6$ dB

Expression approchée du gain G_2 pour $\omega \gg \omega_1$

$G_2 = -40 \log(\omega/\omega_1)$

Pente de l'asymptote oblique exprimée en dB/octave

penne = -12 dB/octave

Fonction réalisée par ce filtre

filtre passe-bas du second ordre

2.4) Réponse en fréquence de l'ensemble des 2 filtres :

Expression du gain total G_t de l'ensemble

$G_t = G_1 + G_2$

Tracé de la courbe de gain**diagramme asymptotique**pour $\omega \ll \omega_1$: $G_t = 0$ dBpour $\omega \gg \omega_1$: $G_t = -60 \log(\omega/\omega_1)$ **courbe réelle**pour $\omega = \omega_1$: $G_2 = -9$ dB

Valeur de R pour obtenir une fréquence de coupure de 5kHz

$$|T_t| = 1/[1 + (\omega_c/\omega_1)^2]^{3/2} = 1/\sqrt{2}$$

$$[1 + (\omega_c/\omega_1)^2] = 2^{1/3} = 1,26$$

$$\omega_c/\omega_1 = 0,51 \quad f_1 = 9807 \text{ Hz} \quad R = 1/(C\omega_1) = 3453 \Omega$$

2.5) Spectre du signal de sortie du second filtre:

Rapport de l'amplitude après filtrage sur l'amplitude avant filtrage

- du fondamental du signal de fréquence 100 Hz $R_{100} = 1$ - d'un harmonique de fréquence voisine de 10 kHz $R_{10k} = 1/7,94$

Comparaison qualitative du taux de distorsion des signaux d'entrée et de sortie du filtre

taux de distorsion plus faible en sortie qu'en entrée (harmoniques atténués en sortie).

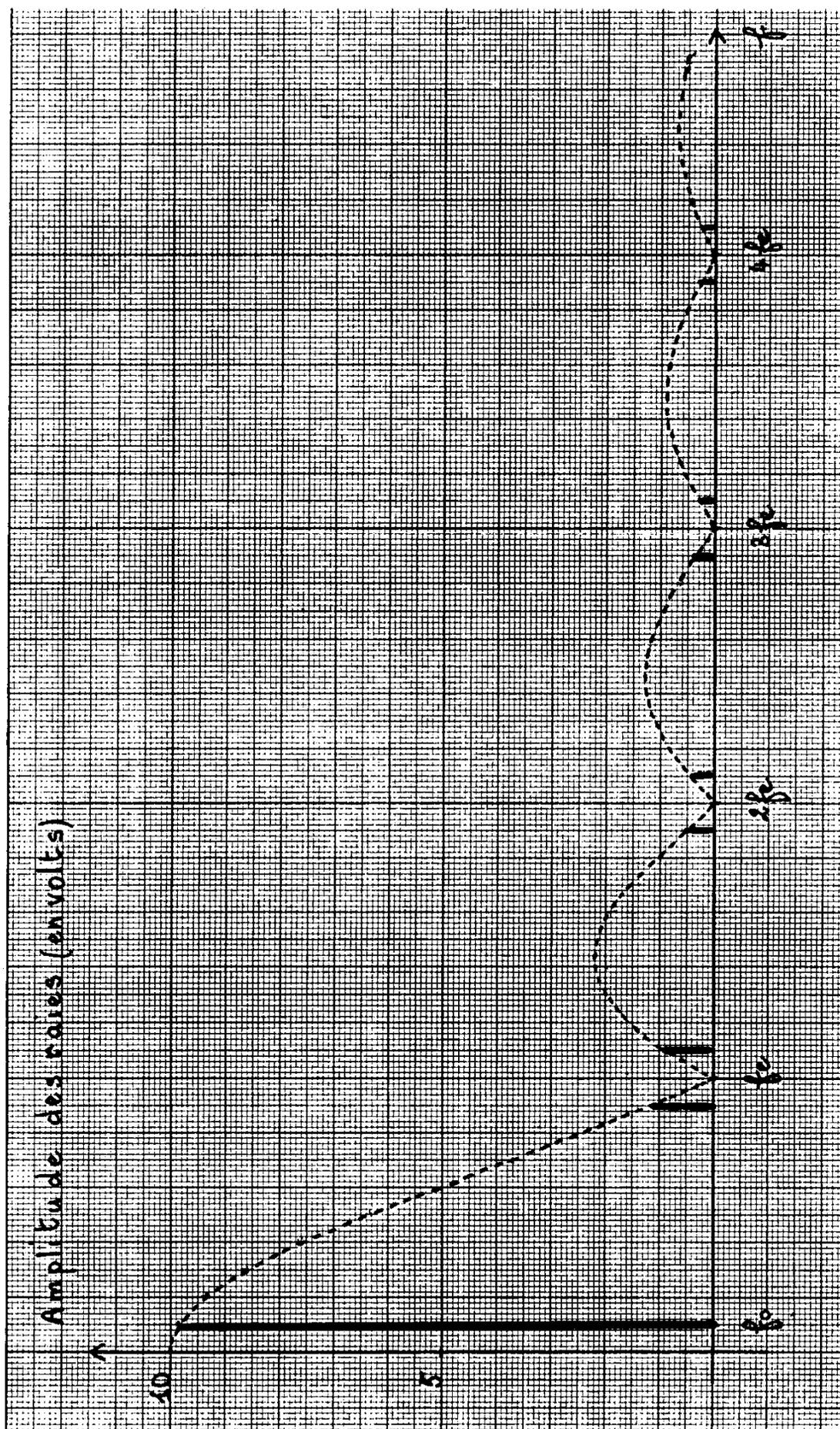
3) Amplification de puissance:***Amplification en tension:***Amplification en tension V_{SO}/e^- de cet étage.

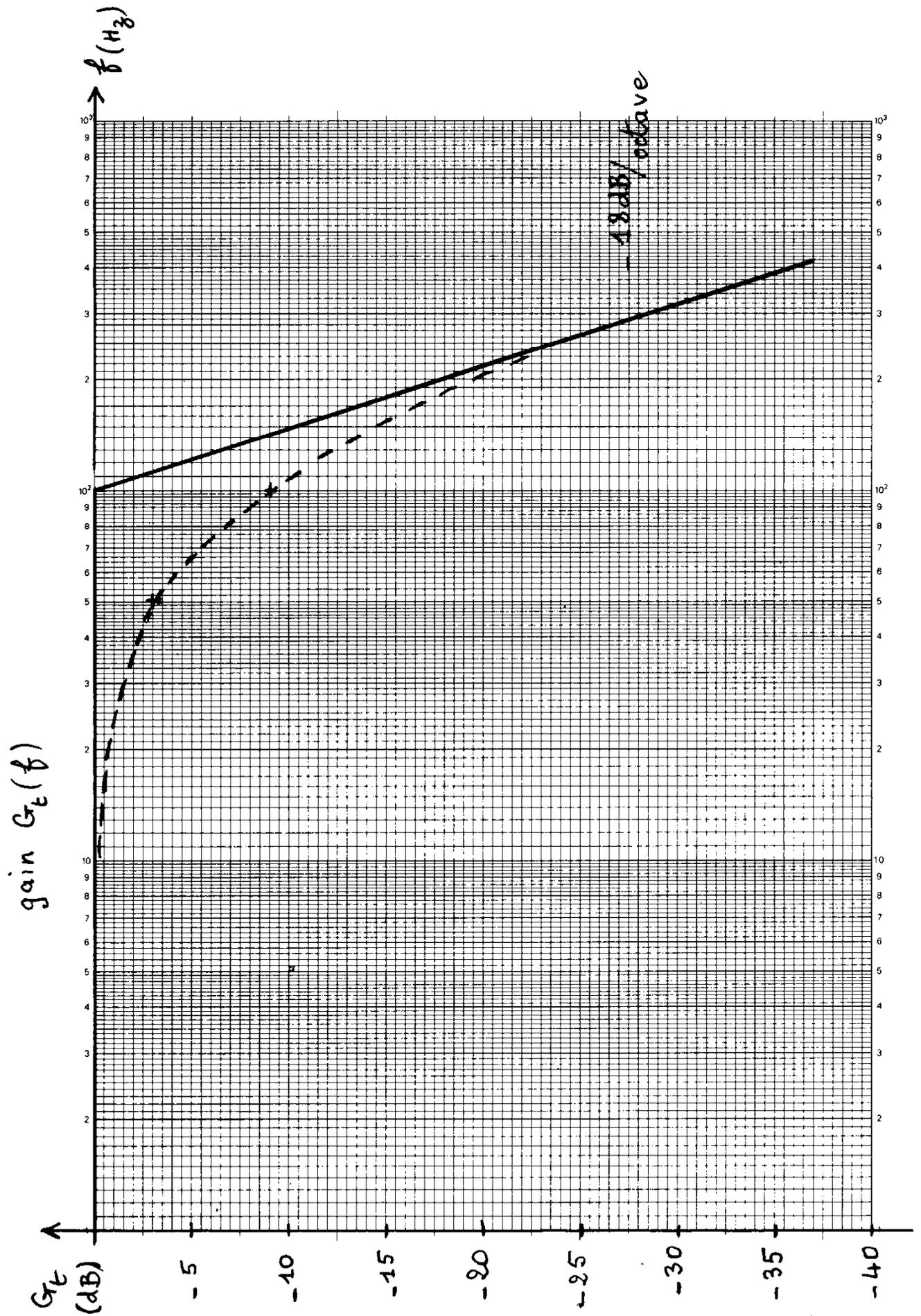
$$A = 1$$

Influence de la valeur de la charge R_{ch} sur la tension V_{SM} disponible à ses bornes?

$$V_{SM} = R_{ch}/(R_{ch} + R_s) V_{SO}$$

Document-réponse n° 1





B : ELECTROTECHNIQUE

Etude de diverses applications utilisant un transformateur triphasé

1) Etude du transformateur triphasé alimentant une charge linéaire:**1.1) Caractéristiques du transformateur triphasé:**1.1.a.) Rapport m de transformation à vide du transformateurrapport des tensions composées à vide $m = 1.713 \cdot 10^{-2}$ Eléments (R_s , X_s) du schéma équivalent par phase

$$R_s = P_{1cc} / 3 J_{2cc}^2 = 42.1 \text{ m}\Omega$$

$$V_{2cc} = 8.61 \text{ V}$$

$$Z_s = V_{2cc} / J_{2cc} = 113.6 \text{ m}\Omega$$

$$X_s = (Z_s^2 - R_s^2)^{1/2} = 105.5 \text{ m}\Omega$$

$$R_s J_{2cc} = 3.2 \text{ V} \quad X_s J_{2cc} = 8 \text{ V}$$

1.1.b.) Chute de tension en charge et rendement du transformateur

$$\Delta V_2 \approx R_2 J_{2n} \cos(\phi_2) + X_s J_{2n} \sin(\phi_2)$$

$$\eta = \frac{3 V_2 J_{2n} \cos(\phi_2)}{3 V_2 J_{2n} \cos(\phi_2) + \text{pertes Joule} + \text{pertes Fer}}$$

Chute de tension en charge et rendement du transformateur pour $\cos\phi = 1$

$$\Delta V_2 \approx R_2 J_{2n} = 3.2 \text{ V}$$

$$\eta = 98.3 \%$$

Chute de tension en charge et rendement du transformateur pour $\cos\phi = 0.80$ arrière.

$$\Delta V_2 \approx 0.8 R_2 J_{2n} + 0.6 X_s J_{2n} = 7.35 \text{ V}$$

$$\eta = 97.7 \%$$

1.1.c.) Nombre de spires par enroulement au secondaire

$$n_2 = 50 \text{ spires}$$

1.2) Alimentation d'un atelier par le transformateur triphasé :

1.2.a.) Puissance active appelée par la charge

$$P_2 = 27.6 \text{ kW}$$

Puissance réactive

$$Q_2 = 15.9 \text{ kVar}$$

Puissance apparente

$$S_2 = 31.8 \text{ kVA}$$

Facteur de puissance.

$$\cos(\phi_2) = P_2 / S_2 = 0.8666 \quad (\sin(\phi_2) = 0.499)$$

1.2.b.) Courant secondaire en tenant compte de la chute de tension en charge

$$\Delta V_2 \approx R_2 J_2 \cos(\phi_2) + X_s J_2 \sin(\phi_2) = k_2 J_2$$

$$k_2 = R_2 \cos(\phi_2) + X_s \sin(\phi_2) = 0.092$$

$$S_2 = 3 V_2 J_2 = 3 (V_{20} - \Delta V_2) J_2 = 3 V_{20} J_2 - 3 k_2 J_2^2$$

$$J_2^2 - (V_{20} / k_2) J_2 - (S_2 / 3 k_2) = 0$$

$$J_2 = 47.65 \text{ A}$$

Tension secondaire

$$V_2 = V_{20} - \Delta V_2 = 222.6 \text{ V}$$

$$1.2.c.) \text{ Pertes Joule} = 3 R_s J_2^2 = 287 \text{ W}$$

$$\text{Pertes fer} = 195 \text{ W car même tension primaire (} p_{\text{fer}} \sim V^2 \text{)}$$

Puissance appelée au réseau

$$P_1 = P_2 + P_{\text{Joule}} + P_{\text{fer}} = 28.08 \text{ kW}$$

Rendement du transformateur

$$\eta = P_2/P_1 = 98.3 \%$$

2) Etude de l'association transformateur triphasé-pont redresseur mixte:

2.1) Charge inductive:

2.1.a.) Indication sur le document-réponse n°1 des intervalles de temps où le thyristor T1 et les diodes D'2 et D'3 conduisent, pour un angle de retard $\alpha = 30^\circ$

Dessin de la tension $u_c(t)$ aux bornes de la charge

2.1.b.) Tension moyenne $U_c(\alpha)$ aux bornes de la charge

$$U_c = \frac{3 V \sqrt{6}}{2\pi} (1 + \cos(\alpha))$$

Valeur $I_c(\alpha)$ du courant moyen dans la charge

$$\text{courant ininterrompu } I_c = U_c/R$$

$$I_c = \frac{3 V \sqrt{6}}{2\pi R} (1 + \cos(\alpha))$$

Applic num pour $\alpha = 30^\circ$

$$U_c = 480 \text{ V} \quad I_c = 77.4 \text{ A}$$

2.1.c.) Puissance moyenne $P_c(\alpha)$ dissipée dans la charge

courant ininterrompu et lissé $i_c(t) = I_c = \text{cste}$

$$P_c = \langle u_c(t) i_c(t) \rangle = \langle u_c(t) \rangle I_c$$

$$P_c = U_c I_c = U_c^2/R$$

$$P_c = \left[\frac{(3 V \sqrt{6})^2}{(2\pi)^2 R} \right] (1 + \cos(\alpha))^2$$

Forme du courant secondaire $i_{s1}(t)$ pour $\alpha = 30^\circ$ sur le document-réponse n°2

Valeur efficace $I_{s1}(\alpha)$ du courant secondaire $i_{s1}(t)$

$$I_{s1} = I_c \sqrt{2/3}$$

$$I_{s1} = \frac{3 V}{\pi R} (1 + \cos(\alpha))$$

Puissance apparente secondaire $S(\alpha)$ dans le cas simple où $\alpha < \pi/3$

$$S = 3 V I_c \sqrt{2/3}$$

Facteur de puissance secondaire

$$f(\alpha) = (3/2\pi) (1 + \cos(\alpha)) = 0,955 (1 + \cos(\alpha))/2$$

2.2) Charge inductive et active:

2.2.a.) Masse de la charge mécanique

$$\text{augmentation du couple résistant due à la masse: } \Delta C_r = 144 \text{ Nm}$$

$$\text{pas de pertes dans le réducteur } r \Delta C_r = M g d/2$$

$$M = 2100 \text{ kg}$$

2.2.b.) Intensité moyenne I_c du courant appelé par la charge

$$I_c = C_r/K = 69,5 \text{ A}$$

Vitesse de rotation du moteur en régime permanent

$$E = U_c - R I_c = 362 \text{ V} \quad \Omega = E/K = 155,3 \text{ rad/s}$$

$$N = 24,7 \text{ tr/s} = 1484 \text{ tr/min}$$

Vitesse linéaire de déplacement de la charge

$$N_{\text{treuil}} = 0,247 \text{ tr/s}$$

$$v = 2\pi d N_{\text{treuil}} = 1,09 \text{ m/s}$$

2.2.c.) Récupération de l'énergie sur le réseau alternatif à la redescente

pont redresseur: courant unidirectionnel

si on veut récupérer de l'énergie, il faut inverser le signe de U_c ; ceci est impossible avec un pont redresseur mixte.

3) Etude de l'association transformateur triphasé-pont redresseur tout thyristors:

3.1) Charge inductive:

3.1.a.) Indication, sur le document-réponse n°2, des intervalles de temps où le thyristor T1 et les thyristors T'2 et T'3 conduisent pour un angle $\alpha = 30^\circ$

Dessin de la tension $u_c(t)$

3.1.b.) Tension moyenne $U_c(\alpha)$

$$U_c = \frac{3 V \sqrt{6}}{\pi} \cos(\alpha)$$

Courant moyen $I_c(\alpha)$

$$I_c = \frac{3 V \sqrt{6}}{\pi R} \cos(\alpha)$$

Applic num pour $\alpha = 30^\circ$

$$U_c = 446 \text{ V} \quad I_c = 72 \text{ A}$$

3.1.c.) Puissance moyenne $P_c(\alpha)$ dissipée dans la charge,

$$P_c = \left[\frac{(3 V \sqrt{6})^2}{(2\pi)^2 R} \right] \cos^2(\alpha)$$

Forme du courant secondaire $i_{s1}(t)$ pour $\alpha = 30^\circ$

Valeur efficace $I_{s1}(\alpha)$ du courant $i_{s1}(t)$

$$I_{s1} = I_c \sqrt{2/3}$$

Puissance apparente secondaire $S(\alpha)$

$$S_2 = 3 V I_{s1} = 3 V I_c \sqrt{2/3}$$

Facteur de puissance secondaire $f(\alpha)$ ($\alpha < \pi/2$)

$$f = (3/\pi) \cos(\alpha) = 0,955 \cos(\alpha)$$

3.2) Charge inductive et active:

3.2.a.) Valeur α_1 de l'angle de retard à l'amorçage α pour une vitesse de rotation de 1500 tr/min

$$C_T = 162 \text{ Nm} \quad I_c = 69,5 \text{ A} \quad R I_c = 118 \text{ V}$$

$$E = 366 \text{ V} \quad U_c = 484 \text{ V}$$

$$\cos(\alpha_1) = U_c / U_{c\text{max}} \quad \alpha_1 = 19,8^\circ$$

3.2.b.) Valeur α_0 de l'angle α pour maintenir la charge mécanique immobile

$$\Omega = 0 \quad E = 0 \quad \text{et} \quad C_T = 162 \text{ Nm}$$

$$U_c = R I_c = 118 \text{ V}$$

$$\alpha_0 = 76,7^\circ$$

3.2.c.) Explication du fonctionnement du système

comme la masse descend, le sens de rotation a changé; la vitesse de rotation a changé de signe; en conséquence, le signe de la fem E a aussi changé

le sens du courant ne peut pas changer à cause du pont redresseur; le couple électromagnétique n'a pas changé de sens

$$P_e = E I_c = C_e \Omega < 0$$

la machine continue fonctionne en frein et renvoie de l'énergie au réseau alternatif
 Valeur du couple électromagnétique C_e de la machine continue

$$C_e = \Delta C_T - C_{T0} = 144 - 18 = 126 \text{ Nm}$$

Indication, sur le document-réponse n° 3, des intervalles de temps où le thyristor T1 et les thyristors T2 et T3 conduisent pour un angle de retard à l'amorçage de 120°

Dessin de la tension $u_c(t)$.

Valeur α_2 de l'angle α permettant d'obtenir, à la descente, la même vitesse de rotation de 1500 tr/min qu'à la montée

$$I_c = 54,1 \text{ A} \quad RI_c = 92 \text{ V}$$

$$E = -366 \text{ V} \quad U_c = -274 \text{ V}$$

$$\cos(\alpha_2) = (-274) / 514,6 = -0,532 \quad \alpha_2 = 122^\circ$$

Puissance renvoyée au réseau alternatif

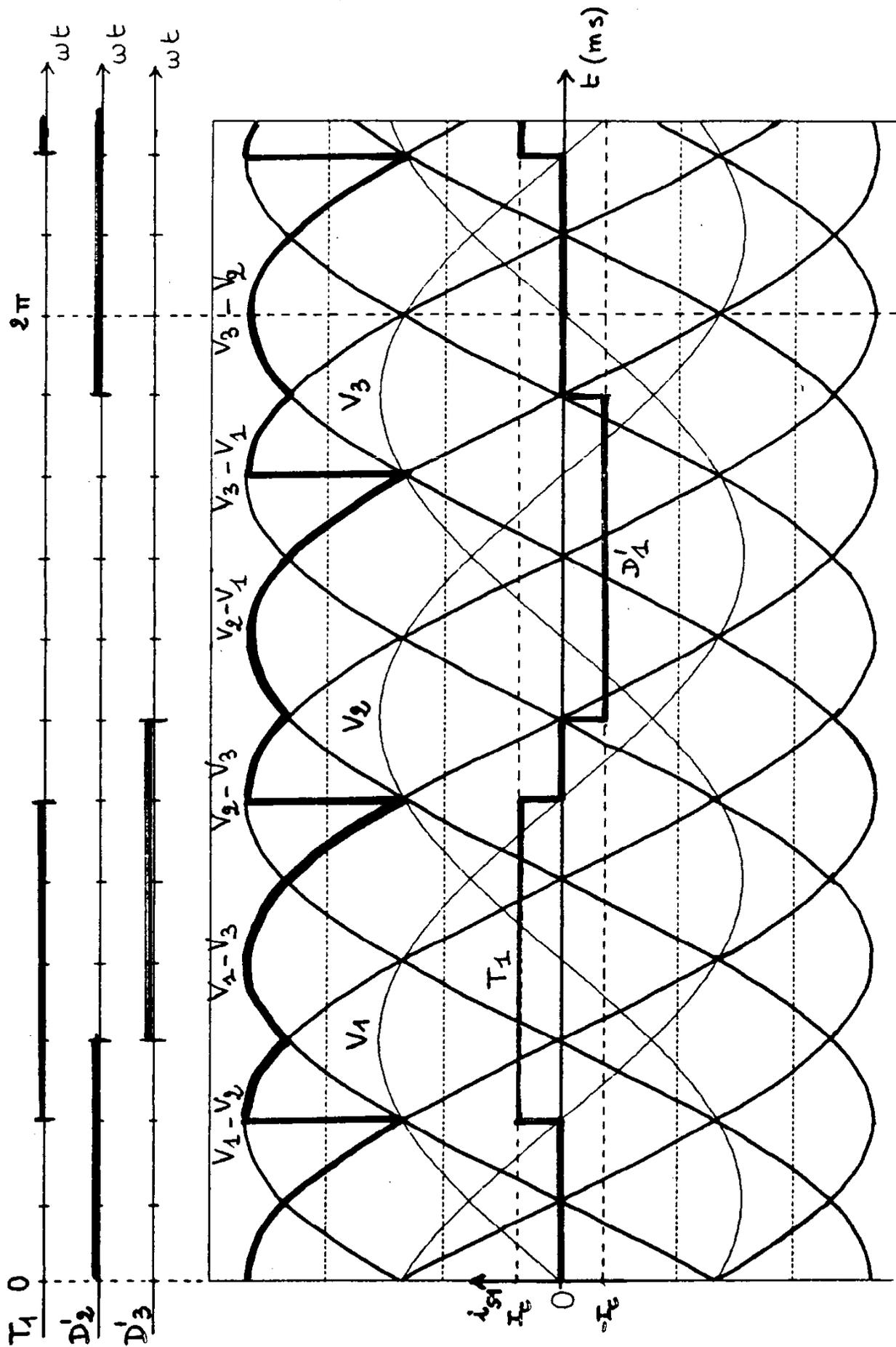
$$P = U_c I_c = -14,8 \text{ kW}$$

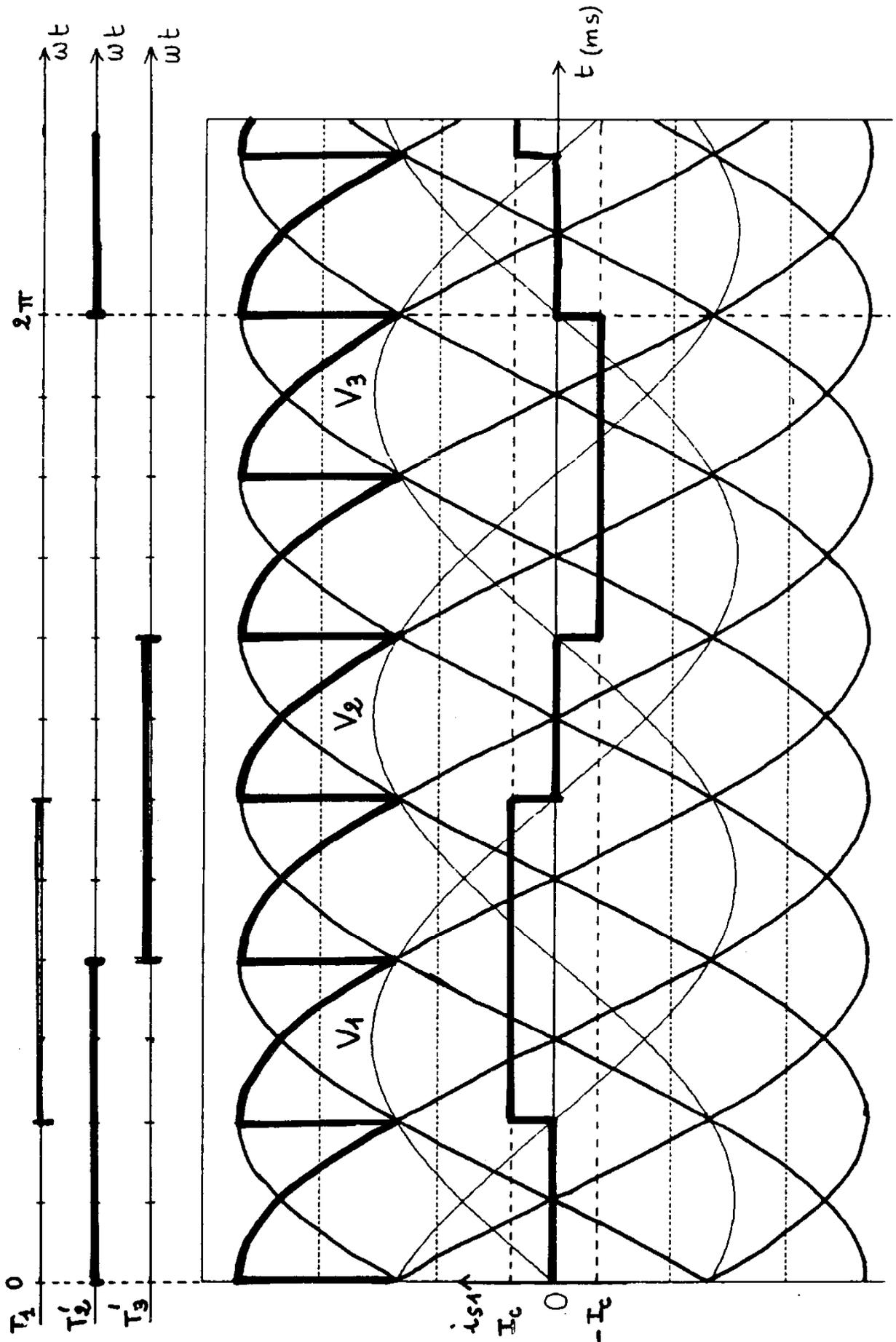
3.2.d.) Points représentant le fonctionnement du moteur dans le repère Couple moteur

C_e en fonction de la vitesse Ω pour les trois cas étudiés:

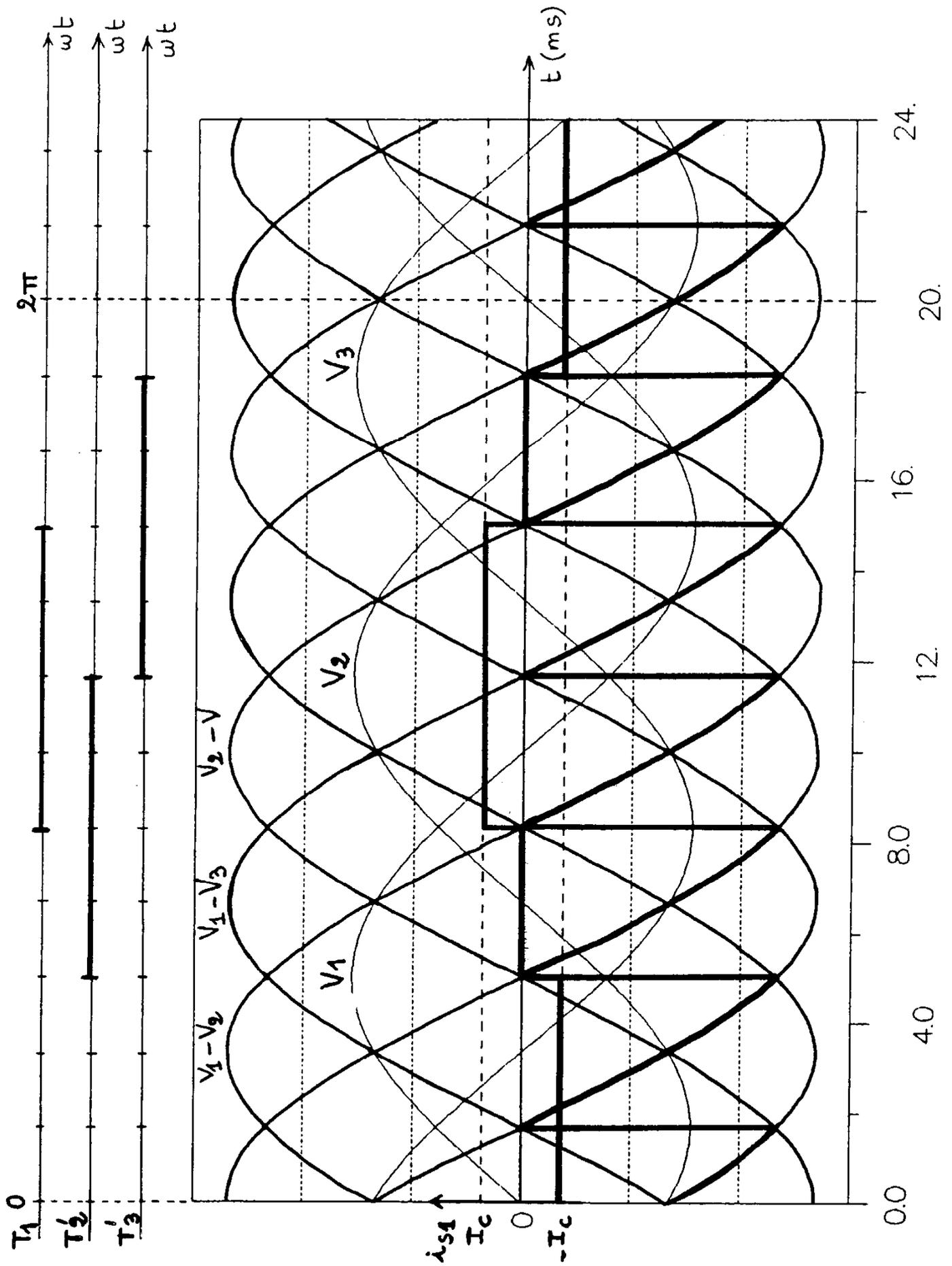
- la montée: $C_e = 162 \text{ Nm}$
 $\Omega = -157 \text{ rad/s}$
- l'arrêt: $C_e = 162 \text{ Nm}$
 $\Omega = 0 \text{ rad/s}$
- et la descente: $C_e = 126 \text{ Nm}$
 $\Omega = -157 \text{ rad/s}$

Document-réponse n° 3





Document-réponse n° 5



Agrégation

(Concours Interne)

SECTION : SCIENCES PHYSIQUES

Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information - Session : 1995

PARTIE 1

RÉSUMÉ D'UNE PROGRESSION DE COURS ET EXERCICES RELATIFS À UNE PARTIE DU PROGRAMME DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

1.1. Théorie cinétique des gaz parfaits.

1.1.1. Modèle du gaz parfait défini à partir de trois hypothèses :

- *molécules assimilées à des points matériels* : les molécules d'un gaz parfait sont assimilées à des sphères dures dont le diamètre est négligeable devant la distance moyenne qui les sépare ;
- *pas d'interaction intermoléculaire* : en dehors des chocs, supposés élastiques, les molécules n'exercent aucune force les unes sur les autres ;
- *chaos moléculaire*.

1.1.2. Pression cinétique.

La pression d'un gaz sur une paroi est due au bombardement de cette paroi par les molécules du gaz. Il en est de même pour une surface fictive à l'intérieur du fluide.

Calcul.

Chaque atome subit un choc pendant un temps très court τ . Pendant la durée du choc, la percussion exercée par la paroi sur l'atome est :

$$\int_0^{\tau} \vec{f} dt = \int_0^{\tau} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = m (\vec{v}' - \vec{v})$$

Choc élastique, sans frottement sur la paroi :

la norme de la vitesse est conservée ainsi que ses composantes suivant le plan de la surface.

$$\int_0^{\tau} \vec{f} dt = m (\vec{v}' - \vec{v}) = -2 m v_x \vec{u}_x$$

Pendant un intervalle de temps dt , le nombre d'atomes venant frapper dS est :

$$n_1 d\vec{S} \cdot \vec{v} dt = n_1 v_x dt dS \quad \text{avec } v_x \geq 0$$

La force exercée par la paroi sur les atomes est égale à : $-2 m n_1 v_x^2 dS \vec{u}_x$.

D'après le principe de l'action et de la réaction, la force exercée par les atomes sur la paroi vaut : $+2 m n_1 v_x^2 dS \vec{u}_x$.

D'où la pression :

$$P = 2 n_1 m \overline{v_x^2}$$

Ce résultat ne tient compte que des atomes ayant un vecteur vitesse de direction donnée (un v_x donné). Pour tenir compte de toutes les directions possibles, il faut :

- remplacer v_x^2 par $\overline{v_x^2}$, moyenne de v_x^2 sur tous les atomes,
- diviser par deux car seul un atome sur deux en moyenne se dirige de la gauche vers la droite, et frappe effectivement la paroi.

$$P = n_1 m \overline{v_x^2}$$

Or :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad \text{et} \quad \overline{v^2} = \overline{u^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

Les trois axes étant parfaitement interchangeables :

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{u^2}}{3}$$

$$P = \frac{1}{3} n_1 m \overline{u^2}$$

1.1.3. Température cinétique.

Définition :

$$\overline{E_c} = \frac{3}{2} k T$$

$\overline{E_c}$ est une énergie cinétique moyenne de translation de l'atome, correspondant à trois degrés de liberté.

Le mouvement d'un atome étant chaotique, l'énergie se répartit de façon identique, en moyenne, sur chaque composante de \vec{v} . A chaque composante correspond l'énergie moyenne :

$$\frac{1}{2} k T$$

Théorème de l'équipartition de l'énergie : lorsque l'énergie d'un système contient une somme de termes quadratiques, l'énergie moyenne par terme et par molécule est $\frac{1}{2} k T$.

1.2. Distribution des vitesses de Maxwell.

1.2.1. Hypothèses statistiques :

- uniformité de la répartition des molécules en l'absence de champ extérieur,
- isotropie des vitesses,
- indépendance des composantes des vitesses.

1.2.2. Équivalence des différentes directions des vitesses :

- $F(v_x, v_y, v_z)$ ne dépend pas de la direction du vecteur \vec{v} ,
- F ne peut dépendre que de sa norme v , donc du carré de celle-ci : v^2 .

$$F(v_x, v_y, v_z) = p(v^2) = p(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Indépendance des composantes des vitesses : la répartition des vitesses suivant une direction ne

dépend que de la vitesse suivant cette direction :

$$F(v_x, v_y, v_z) = f_x(v_x^2) f_y(v_y^2) f_z(v_z^2)$$

compte-tenu de l'isotropie, les trois fonctions sont identiques :

$$F(v_x, v_y, v_z) = f(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2)$$

D'où :

$$F(v_x, v_y, v_z) = p(v^2) = f(v_x^2) f(v_y^2) f(v_z^2)$$

Exprimons $\frac{\partial p}{\partial v_x}$ de deux façons différentes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial v_x} &= \frac{dp}{d(v^2)} \cdot \frac{\partial(v^2)}{\partial v_x} \\ \frac{\partial p}{\partial v_x} &= \frac{df(v_x^2)}{d(v_x^2)} \cdot 2v_x \cdot f(v_y^2) f(v_z^2) \end{aligned} \right\} \frac{dp}{d(v^2)} = \frac{df(v_x^2)}{d(v_x^2)} f(v_y^2) f(v_z^2)$$

Soit en notant $f'(v_x^2) = \frac{df(v_x^2)}{d(v_x^2)}$, et $p'(v^2) = \frac{dp}{dv^2}$

$$\frac{p'(v^2)}{p(v^2)} = \frac{f'(v_x^2)}{f(v_x^2)}$$

de même :

$$\frac{p'(v^2)}{p(v^2)} = \frac{f'(v_y^2)}{f(v_y^2)} \quad \frac{p'(v^2)}{p(v^2)} = \frac{f'(v_z^2)}{f(v_z^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(v_x^2)}{f(v_x^2)} = \frac{f'(v_y^2)}{f(v_y^2)} = \frac{f'(v_z^2)}{f(v_z^2)} = \text{cste}$$

En désignant par $-B$ cette constante :

$$\frac{df}{f} = -B d(v_x^2) \quad \Rightarrow \quad \ln \left[\frac{f(v_x^2)}{A} \right] = -B v_x^2$$

$$f(v_x^2) = A e^{-B v_x^2} \quad \text{A étant une autre constante}$$

et : $dPv = \frac{dN}{N} = A^3 e^{-Bv_x^2} e^{-Bv_y^2} e^{-Bv_z^2} dv_x dv_y dv_z = A^3 e^{-Bv^2} dv_x dv_y dv_z$

1.2.3. Condition de normalisation :

$$\int dP_v = \int \frac{dN}{N} = 1 = \iiint F(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

implique que B soit nécessairement positive (sinon la somme serait divergente) :

$$A^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bv_x^2} dv_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bv_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bv_z^2} dv_z = 1 = A^3 \left(\frac{\pi}{B}\right)^{3/2}$$

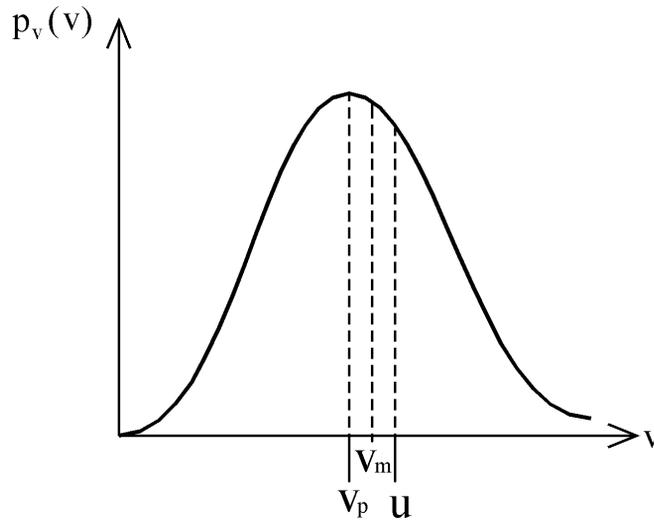
$$A = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{1/2}$$

1.2.4. En coordonnées sphériques, dans l'espace des vitesses, l'élément de volume s'écrit : $4\pi v^2 dv$.

Le nombre de particules dont la norme de la vitesse est comprise entre v et $v + dv$ s'écrit :

$$\frac{dN_v}{N} = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} e^{-Bv^2} 4\pi v^2 dv = p_v(v) dv \Rightarrow p_v(v)$$

Graphe $p_v(v)$:



Courbe passe par un extremum pour $\frac{dp_v}{dv} = 0$ c'est-à-dire :

$$v_p = \left(\frac{1}{B}\right)^{1/2}$$

v_p : vitesse la plus probable.

1.2.5.

$$u^2 = \int_0^{\infty} v^2 p_v(v) dv = 4\pi \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^4 e^{-Bv^2} dv = \frac{3}{2B}$$

$$u = \sqrt{\frac{3}{2B}}$$

$$\text{or : } \quad \overline{E_c} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k T \Rightarrow u^2 = \frac{3 k T}{m}$$

$$\text{d'où : } \quad \boxed{B = \frac{m}{2 k T}}$$

1.2.6.

$$p_v(v) = \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2} 4 \pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$$v_m = \int_0^{\infty} v p_v(v) dv = 4 \pi \left(\frac{B}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-Bv^2} dv = \left(\frac{4}{\pi B} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{v_m = \left(\frac{8 k T}{\pi m} \right)^{1/2}}$$

$$v_p = \left(\frac{2 k T}{m} \right)^{1/2}$$

1.2.7.

$$v_p < v_m < u$$

Application Numérique : $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

$$v_p = 1,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

$$v_m = 1,26 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

$$u = 1,37 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

1.2.8. *Application* : Calcul du débit à travers un trou.

Le nombre d'atomes venant frapper dS pendant l'intervalle de temps dt est égal à :

$$dn_1 \vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{S} = dn_1 v_x dt dS$$

$$\text{avec } dn_1 = n_1 \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z \quad \text{et } v_x \geq 0$$

$$D = n_1 \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z$$

$$D = n_1 \left(\frac{k T}{2 \pi m} \right)^{1/2} = \frac{n_1}{4} \left(\frac{8 k T}{\pi m} \right)^{1/2}$$

$$\boxed{D = \frac{n_1}{4} v_m}$$

1.3. Systèmes thermodynamiques.

1.3.1. – Définitions.

- *État d'équilibre* : un système est dans un état d'équilibre lorsque toutes ses variables d'état restent constantes au cours du temps.
État où il n'existe aucun échange, ni entre les différentes parties du système, ni entre le système et l'extérieur ; stable vis-à-vis des perturbations.
- *Phase* : toute partie d'un système possédant en chacun de ses points mêmes propriétés physiques et chimiques.
(Une phase est nécessairement homogène, les paramètres intensifs y sont uniformes).
- *Variable thermodynamique* : toute grandeur physique permettant de décrire les propriétés macroscopiques d'un système. On distingue :
 - les variables thermodynamiques extensives (ou additives) qui dépendent de la taille du système, comme la masse, le volume, le nombre de particules,
 - des variables thermodynamiques intensives (non additives), définies en chaque point du système et indépendantes de la taille de celui-ci, comme la pression, la température, la masse volumique, etc.
- *Système fermé - système ouvert* : un système est dit fermé s'il ne peut pas échanger de matière avec l'extérieur.
Un système est dit ouvert s'il peut échanger de la matière avec l'extérieur.
- *Système isolé - système non isolé* : un système est dit isolé s'il ne peut rien échanger avec l'extérieur (ni énergie, ni matière, ni charges, etc.).
Un système est dit non isolé s'il se produit un échange avec l'extérieur.
- *Transformation* : évolution d'un système d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final.

Transformation réversible

Transformation qui se fait par une succession d'états d'équilibre infiniment voisins, la condition d'équilibre concernant aussi bien le système étudié que le milieu extérieur avec lequel il interagit. Pour qu'une transformation soit réversible, il faut que le système **et** le milieu extérieur puissent repasser par tous les états antérieurs lorsqu'on imagine un renversement du cours du temps.

Transformation irréversible

Transformation qui ne répond pas au critère précédent.

C'est le cas lorsque les états intermédiaires ne sont pas des états d'équilibres (paramètres intensifs non définis au cours de la transformation), mais aussi lorsque l'on se trouve en présence de phénomènes de frottement mécanique, d'hystérésis, de flux de matière ou de chaleur.

Exemples : on considère un cylindre vertical contenant un gaz, et bouché à sa partie supérieure par un piston de masse négligeable pouvant coulisser sans frottement.

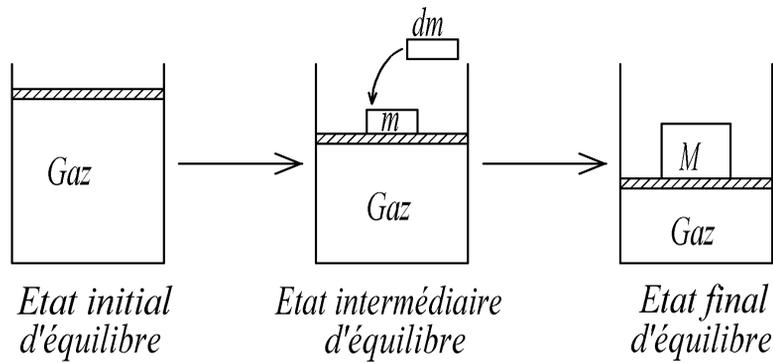
A l'équilibre, la pression du gaz est égale à la pression extérieure. Posons une masse M sur le cylindre : le gaz subit une transformation. Deux façons de procéder :

– *transformation réversible* :

On passe de l'état initial à l'état final en déposant progressivement sur le piston des masses infinitésimales dm .

A chaque instant, la pression interne du gaz est définie et équilibrée par celle due au milieu extérieur.

L'hypothèse de non frottement entre le cylindre et le piston, permet, en enlevant progressivement toutes les surcharges infinitésimales de revenir à l'état initial, en repassant par tous les états antérieurs.



– *transformation irréversible* : celle-ci peut-être rencontrée dans deux cas :

- soit, on place brutalement la masse M sur le piston : variation rapide et inhomogène de la pression, les états intermédiaires ne sont pas définis. Seuls, l'état initial et l'état final sont des états d'équilibre ;

- soit, il existe des frottements entre le cylindre et le piston lorsque l'on opère par ajouts de masses infinitésimales.

Autre exemple classique : diffusion d'une goutte d'encre dans un verre d'eau.

1.3.2. Deux variables thermodynamiques sont nécessaires pour déterminer l'état d'un corps pur à l'état gazeux.

Équation d'état d'un système : relation entre ses paramètres d'état.

Exemples :

1. Gaz parfait : $P = \frac{1}{3} n_1 m u^2$ avec $u^2 = \frac{3kT}{m}$

$$P = n_1 k T = n \frac{\mathcal{N}}{V} \cdot \frac{R}{\mathcal{N}} T$$

n : nombre de moles.

\mathcal{N} : nombre d'Avogadro.

$$P V = n R T$$

2. Gaz de Van der Waals :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = n R T$$

1.3.3. Coefficients thermoélastiques :

– coefficient de dilatation isobare : $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$,

– coefficient de variation de pression isochore : $\beta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$,

– coefficient de compressibilité isotherme : $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$.

$$\alpha = \chi_T \beta P$$

Gaz parfait : $\alpha = \beta = \frac{1}{T} \quad \chi_T = \frac{1}{P}$

1.3.4.

•

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{a}{aT + bP}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} \ln V \right]_P = \left[\frac{\partial}{\partial T} \ln (aT + bP) \right]_P$$

$$\ln V = \ln (aT + bP) + h(P)$$

•

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\left[\frac{b}{aT + bP} + \frac{dh}{dP} \right] = -\frac{b}{aT + bP} + \frac{1}{P}$$

$$h(P) = \ln \frac{K}{P}$$

K = cste

Équation d'état :

$$\ln V = \ln (aT + bP) + \ln \frac{K}{P}$$

$$P V = K (aT + bP)$$

Quand $P \rightarrow 0$ le gaz réel se comporte comme un gaz parfait :

$$\lim_{P \rightarrow 0} P V = n R T \quad \Rightarrow \quad K a = n R$$

$$P V = n R T \left[1 + \frac{bP}{aT} \right]$$

1.4. Premier principe de la thermodynamique.

1.4.1. Pour tout système fermé, on peut définir une fonction des variables d'état, extensive, appelée énergie ϵ , qui est conservative, c'est-à-dire qui reste constante, en toutes circonstances, lorsque le système n'échange pas d'énergie avec le milieu extérieur.

Au cours d'une transformation quelconque, la variation de ϵ est égale à l'énergie reçue par le système.

1.4.2. L'énergie interne est une fonction de seules variables d'état : (indépendante du chemin suivi pour arriver à cet état) c'est une fonction d'état.

1.4.3. Travail : échange d'énergie d'origine macroscopique.

Chaleur : échange d'énergie d'origine microscopique.

1.4.4. Second principe : impossible de transformer intégralement chaleur en travail.

Centrale thermique : machine ditherme - efficacité maximale (théorème de Carnot)

$$\eta_m = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

1.5. Le gaz parfait.

1.5.1.

$$C_{P_M} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad C_{V_M} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Gaz parfait monoatomique :

$$U = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m N n^2 = N \frac{3}{2} k T = \frac{3}{2} n R T$$

$$C_{V_M} = \frac{3}{2} R$$

$$H = U + PV = \frac{5}{2} n R T \quad C_{P_M} = \frac{5}{2} R$$

$$Y = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}$$

1.5.2. Transformation isotherme réversible.

$$\delta W = -P dV = -\frac{n R T}{V} dV$$

$$W = n R T \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$\Delta U = 0$$

$$Q = -W = n R T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

1.5.3. Transformation adiabatique réversible.

1.5.3.1. Loi de Laplace.

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$$

1.5.3.2. Formule de Reech.

$$\frac{\chi_T}{\chi_S} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S}$$

$$\delta Q = C_V dT + l dV = C_p dT + h dP$$

à $T = cste$:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{h}{l}$$

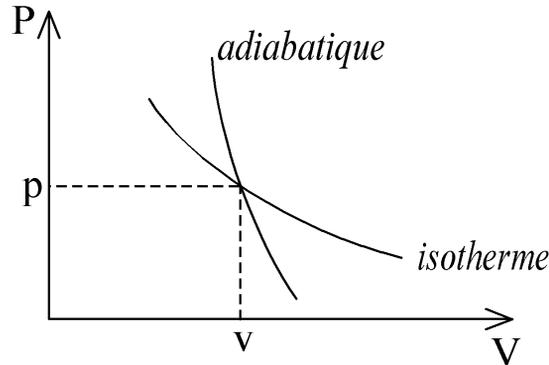
Adiabatique réversible : $\delta Q = 0 = C_V dT + l dV = C_p dT + h dP$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{h C_V}{l C_p} = \frac{h}{l \gamma}$$

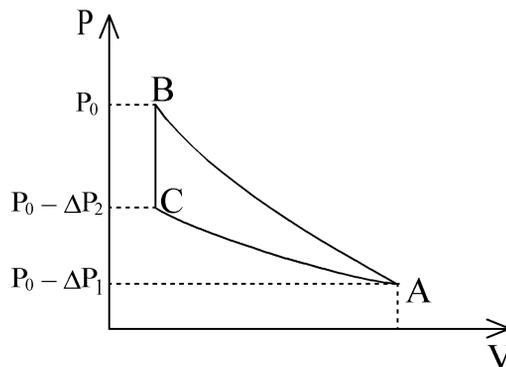
$$\boxed{\frac{X_T}{X_S} = \gamma}$$

Diagramme de Clapeyron (V en abscisse, P en ordonnée) :

$$\frac{\text{pente de l'adiabatique}}{\text{pente de l'isotherme}} = \gamma$$



1.5.3.3. Expérience de Clément et Desormes.



État initial représenté par le point A sur l'isotherme T₀.

On ouvre R : compression rapide, donc adiabatique, jusqu'à la pression P₀, qui mène au point B.

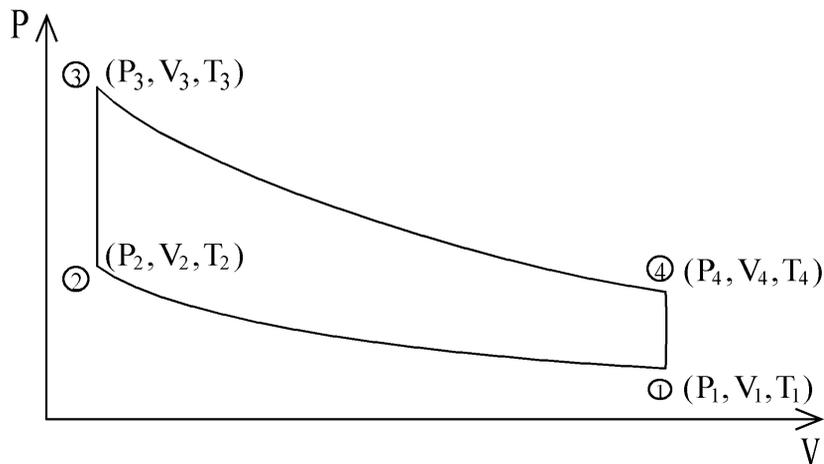
Le gaz, chauffé pendant la compression adiabatique, se refroidit ensuite lentement à volume constant (transformation isochore BC) jusqu'à ce que la température redevienne égale à T₀. C : sur l'isotherme T₀ : ΔP₂ < ΔP₁ h₂ < h₁.

Les transformations étant petites nous pouvons assimiler AB et AC à des segments de droites :

$$\frac{\text{pente de l'adiabatique}}{\text{pente de l'isotherme}} = \gamma = \frac{\Delta P_1}{\Delta P_1 - \Delta P_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$$

1.6. Application : étude d'un moteur à explosion.

1.6.1.



1.6.2.

 $1 \rightarrow 2 :$

$$Q_{12} = 0$$

$$W_{12} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$$

 $2 \rightarrow 3 :$

$$Q_{23} = \frac{P_3 V_3 - P_2 V_2}{\gamma - 1}$$

$$W_{23} = 0$$

 $3 \rightarrow 4 :$

$$Q_{34} = 0$$

$$W_{34} = \frac{P_4 V_4 - P_3 V_3}{\gamma - 1}$$

 $4 \rightarrow 1 :$

$$Q_{41} = \frac{P_1 V_1 - P_4 V_4}{\gamma - 1}$$

$$W_{41} = 0$$

$$Q = Q_{23} + Q_{41} = \frac{(P_3 - P_2) V_2}{\gamma - 1} + \frac{(P_1 - P_4) V_1}{\gamma - 1} = -W \quad (\Delta W = 0)$$

1.6.3.

$$\rho = \frac{-W}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} PV^\gamma = \text{cste} \\ \frac{PV}{T} = \text{cste} \end{array} \right\} T V^{(\gamma-1)} = \text{cste}$$

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = \tau^{\gamma-1}$$

$$\boxed{\rho = 1 - \tau^{1-\gamma}}$$

$$\text{Application Numérique : } \tau_1 = 8 \quad \rho_1 = 56,5 \% ,$$

$$\tau_2 = 10 \quad \rho_1 = 60,2 \% .$$

Rendement est une fonction croissante du taux de compression.

1.7. Résonateur de Helmholtz.

1.7.1. 17.1.1. Adiabatique réversible : $P(L-x)^\gamma = P_0 L^\gamma = P L^\gamma \left(1 - \frac{x}{L}\right)^\gamma$

$$P - P_0 = \frac{\gamma P_0 x}{L}$$

$$m\ddot{x} + \frac{\gamma P_0 S}{L} x = 0 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{\gamma P_0 S}}$$

$$x = a \cos \sqrt{\frac{\gamma P_0 S}{mL}} t$$

$$P = P_0 \left(1 + \frac{\gamma}{L} a \cos \sqrt{\frac{\gamma P_0 S}{mL}} t\right)$$

17.1.2. *Application Numérique* : $T = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$

17.1.3. $\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\gamma P}$

17.1.4. $\Delta P = p$ faible

$$\Delta P = -\frac{\Delta V}{X_s V_0} = \frac{\gamma P_0 s}{V_0} x$$

1.7.2. 17.2.1. La masse d'air du goulot $m = \rho_0 s l$ est soumise aux forces de pression et à la force de frottement :

$$\rho_0 s l \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\gamma P_0 s^2}{V_0} x - k \frac{dx}{dt} + p_0 S \cos \omega t$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{k}{\rho_0 s l} \frac{dx}{dt} + \frac{\gamma P_0 s}{\rho_0 l V_0} x = \frac{p_0}{\rho_0 l} \cos \omega t$$

$$\gamma = \frac{k}{2 \rho_0 s l}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0 s}{\rho_0 l V_0}}$$

$$X_0 = \frac{p_0}{f_0 l}$$

17.2.2. En notation complexe : $\underline{x} = X e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{X} e^{j \omega t}$

$$\underline{X} = \frac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j \lambda \omega}$$

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \lambda \omega^2}}$$

X maximum pour $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \lambda^2}$.

PARTIE 2

PROPAGATION DU SON DANS UN FLUIDE

2.1. Brève étude du son.

- 2.1.1. Le son se propage dans un liquide, dans un solide.
Le son ne se propage pas dans le vide.

Expérience en cours : sonnette placée à l'intérieur d'une cloche de verre où l'on peut faire le vide.

Conclusion : nécessité d'un milieu matériel pour la propagation du son.

- 2.1.2. A 20°C $v = 343 \text{ m.s}^{-1}$.

Lorsque la température augmente, v varie, et v augmente.

- 2.1.3. En 1822, Arago, Prony et Gay-Lussac, mesurèrent entre Villejuif et Montlhéry la durée séparant la perception de la lueur produite par le tir d'un coup de canon et la réception du son correspondant.

Les observateurs étaient partagés en deux groupes :

- l'un sur les hauteurs de Villejuif,
- l'autre sur les hauteurs de Montlhéry (distance 17 km).

Un canon était disposé à chacun de ces endroits.

Les expériences eurent lieu de nuit, et en tirs alternés :

- de nuit, meilleure visibilité de l'éclair, et température plus uniforme,
- tirs alternés pour compenser l'influence de la vitesse du vent.

- 2.1.4. *Application.*

$$d \text{ (km)} = \frac{t \text{ (s)}}{3} \qquad d \approx 2 \text{ km}$$

- 2.1.5. Émetteurs sonores : corde de guitare, haut-parleur.

Récepteurs sonores : microphone, oreille.

- 2.1.6. – Ondes mécaniques : ressort, corde, billes, onde à la surface de l'eau,
– ondes acoustiques,
– ondes électromagnétiques.

Transfert d'énergie, sans transport de matière.

- 2.1.7. Domaine des fréquences audibles pour l'oreille humaine : de 20 à 20 000 Hz.

Sensibilité maximale : autour de 3 000 Hz.

- 2.1.8. Infrasons : sons de fréquences inférieures à 20 Hz.

Ultrasons : sons de fréquences supérieures à 20 kHz.

Applications pratiques des ondes ultrasonores :

- sonar,
- échographie.

2.2. Travaux pratiques : mesure de la vitesse du son.

Mesure directe

Placer le récepteur d'ondes ultrasonores R face à l'émetteur E, fonctionnant en mode «Salve».

Visualiser à l'oscilloscope : en Y_A , la tension fournie par l'émetteur, en Y_B , la tension reçue par le récepteur.

Choisir la position initiale du récepteur, repérée par son abscisse d_1 sur une règle graduée, de façon à ce que les deux oscillogrammes «démarrrent au même instant».

Déplacer ensuite le récepteur à différentes abscisses d_2 , d_3 ...

Observer la courbe de la voie Y_B à l'oscilloscope : celle-ci se décale par rapport à la position précédente, et «démarrre» un temps t_2 , t_3 , ... après celle de la voie Y_A .

Déterminer t_2 , t_3 ... connaissant la vitesse de balayage.

En déduire la vitesse des ondes ultrasonores, en effectuant une moyenne des valeurs obtenues pour les différentes positions :

$$v_k = \frac{d_k - d_1}{t_k}$$

Mesure indirecte

Utiliser l'émetteur en mode «Permanent».

Placer le récepteur face à l'émetteur de façon à ce que les deux signaux Y_A et Y_B soient en phase.

Noter la position correspondante d_1 du récepteur.

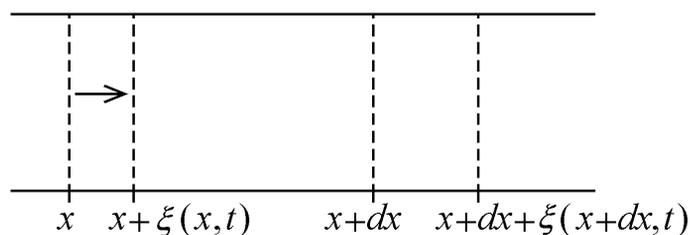
Déplacer ensuite le récepteur jusqu'à retrouver une première, puis une seconde, ... puis une dixième fois, le signal Y_B en phase avec Y_A .

Noter la position d_2 correspondante.

En déduire la longueur d'onde λ : $\lambda = \frac{d_2 - d_1}{10}$ puis la vitesse des ondes ultrasonores : $v = \lambda f$.

2.3. Propagation d'une onde sonore dans un fluide homogène non visqueux.

2.3.1.



Équation traduisant le principe fondamental de la dynamique :

$$\rho S dx \frac{du}{dt} = S P(x, t) - S P(x + dx, t) = -S \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

$$P = P_0 + p$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

↓
2^e ordre

En linéarisant au premier ordre :

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

(1)

Au repos, le volume de la tranche de fluide considérée est :

$$dV_0 = S dx$$

Au passage de la perturbation :

$$dV = S [x + dx + \xi(x + dx, t) - (x + \xi(x, t))] = S dx \left[1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]$$

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = -\frac{1}{dV_0} \frac{dV - dV_0}{P - P_0} = -\frac{1}{P} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$p(x, t) = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

(2)

2.3.2.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Équations de d'Alembert avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$$

Gaz parfait :

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0} \quad \rho_0 = \frac{M P_0}{R T}$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Application Numérique : $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ $c = 328 \text{ m.s}^{-1}$.

- 2.3.3. $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ représente une onde plane progressive se propageant dans le sens des x croissants.
 $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ représente une onde plane progressive se propageant dans le sens des x décroissants.

$p(x, t)$ satisfaisant aussi une équation de d'Alembert, peut s'écrire sous la forme :

$$p(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} f_1' \left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{c} g_1' \left(t + \frac{x}{c}\right) = -\rho_0 \left[f' \left(t - \frac{x}{c}\right) + g' \left(t + \frac{x}{c}\right) \right]$$

ce qui implique :

$$f_1' = \rho_0 c f' \quad \text{et} \quad g_1' = -\rho_0 c g'$$

D'où :

$$f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) = \rho_0 c f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \phi$$

$$g_1\left(t + \frac{x}{c}\right) = -\rho_0 c g\left(t + \frac{x}{c}\right) + \psi$$

Au repos : u donc f et g sont nuls ainsi que p d'où : $\phi + \psi = 0$ et :

$$p(x, t) = \rho_0 c \left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right]$$

2.3.4. Aspect énergétique.

2.3.4.1.

$$p(x, t) = p_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$u(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho_0 c} = U_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{avec } U_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c}$$

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{avec } \xi_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c \omega}$$

2.3.4.2.

$$e_c = \frac{1}{2} \rho_0 u^2$$

$$e_p = \frac{1}{2} \chi_s p^2 = \frac{1}{2} \rho_0 u^2$$

$$e = e_c + e_p = \rho_0 u^2$$

2.3.4.3.

$$I = \rho_0 c \langle u^2 \rangle = \rho_0 c \frac{u_0^2}{2} = \frac{p_0^2}{2 \rho_0 c}$$

$$\text{Application Numérique : } p_0 = \sqrt{2} \rho_0 c I = 3.10^{-5} \text{ Pa}$$

$$u_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c} = 6,7.10^{-8} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\xi_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c \omega} = 0,11.10^{-10} \text{ m}$$

2.3.4.4. Ordre de grandeur du niveau sonore :

- d'un bureau calme : 60 dB,
- d'une alarme de voiture : 90 - 100 dB,
- du seuil de douleur : 120 dB.

2.4. Réflexion et transmission des ondes sonores.

2.4.1.

$$k = \frac{\omega}{c_1}$$

2.4.2. Onde réfléchi :

$$\underline{p}_r = \underline{r} p_0 e^{i(\omega t + kx)}$$

Onde transmise :

$$\underline{p}_t = \underline{t} p_0 e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

Les ondes incidente, réfléchi et transmise ont même pulsation.

Dans le milieu (1)

$$k = \frac{\omega}{c_1}$$

Dans le milieu (2)

$$k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

Vitesses vibratoires :

– onde incidente

$$\underline{u}_i = \frac{\underline{p}_i}{\rho_1 c_1} = \frac{p_0}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t - kx)}$$

– onde réfléchi

$$\underline{u}_r = -\frac{\underline{p}_r}{\rho_1 c_1} = -\frac{\underline{r} p_0}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t + kx)}$$

– onde transmise

$$\underline{u}_t = \frac{\underline{p}_t}{\rho_2 c_2} = +\frac{\underline{t} p_0}{\rho_2 c_2} e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

2.4.3. En $x = 0$ continuité de la surpression vibratoire, et de la vitesse vibratoire.

Dans le milieu (1) :

$$\underline{p}_1 = \underline{p}_i + \underline{p}_r$$

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_i + \underline{u}_r$$

Dans le milieu (2) :

$$\underline{p}_2 = \underline{p}_t$$

$$\underline{u}_2 = \underline{u}_t$$

$$\underline{p}_1(x=0) = \underline{p}_2(x=0)$$

\Rightarrow

$$1 + \underline{r} = \underline{t}$$

$$\underline{u}_1(x=0) = \underline{u}_2(x=0)$$

\Rightarrow

$$\frac{1 - \underline{r}}{\rho_1 c_1} = \frac{\underline{t}}{\rho_2 c_2}$$

$$\underline{r} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$\underline{t} = \frac{2 \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$\underline{t} = t$: réel, positif : aucun déphasage à la transmission.

$\underline{r} = r$: réel

- si $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ $r > 0$: aucun déphasage à la réflexion,
- si $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$ $r < 0$: déphasage de π à la réflexion,
- si $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$ $r = 0$: pas d'onde réfléchie.

2.4.4.

$$I_i = \frac{p_0^2}{2 \rho_1 c_1} \qquad I_r = -\frac{r^2 \rho_0^2}{2 \rho_1 c_1} \qquad I_t = t^2 \frac{p_0^2}{2 \rho_2 c_2}$$

$$R = \frac{|I_r|}{I_i} = r^2 \qquad T = \frac{I_t}{I_i} = t^2 \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2}$$

$$R = \left(\frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \right)^2 \qquad T = \frac{4 \rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$$

$R + T = 1$: conservation de la puissance totale.

2.4.5. $\rho_1 c_1 \ll \rho_2 c_2$

$r \rightarrow +1$

$R \rightarrow 1$

$t \rightarrow 2$

$T \rightarrow 0$

Le signal transmis est d'amplitude double, mais transporte une énergie très faible.

Application Numérique : $T = \frac{4 \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} = 1,3 \cdot 10^{-3}$ $R = 0,9987$.

Atténuation en dB : $|10 \log T| = 29$ dB.

Il y a réflexion pratiquement totale de la puissance sonore. Le milieu sous-marin est «isolé» des bruits de la surface : c'est le «Monde du silence».

Dans le domaine $x < 0$:

$$\underline{p}_{-1} = \underline{p}_i + \underline{p}_r = p_0 (e^{-ikx} + e^{+ikx}) e^{i\omega t} = 2 p_0 \cos kx e^{i\omega t}$$

$$\underline{u}_{-1} = \underline{u}_i + \underline{u}_r = \frac{p_0}{\rho_1 c_1} (e^{-ikx} - e^{+ikx}) e^{i\omega t} = -2 \frac{p_0}{\rho_1 c_1} i \sin kx e^{i\omega t}$$

en réel :

$$p_1(x, t) = 2 p_0 \cos kx \cos \omega t$$

$$u_1(x, t) = \frac{2 p_0}{\rho_1 c_1} \sin kx \sin \omega t$$

$$2.4.6. \quad \rho_1 c_1 \gg \rho_2 c_2$$

$$r \rightarrow -1$$

$$R \rightarrow 1$$

$$t \rightarrow 0$$

$$T \rightarrow 0$$

Le signal transmis transporte toujours une énergie très faible.

$$\text{Application Numérique : } T = 4 \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} = 1,3 \cdot 10^{-4}.$$

$$\text{Atténuation en dB : } |10 \log T| = 39 \text{ dB.}$$

Dans le domaine $x < 0$

$$\underline{p}_1 = \underline{p}_i + \underline{p}_r = p_0 \left(e^{-ikx} - e^{+ikx} \right) e^{i\omega t} = -2i p_0 \sin kx e^{i\omega t}$$

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_i + \underline{u}_r = \frac{p_0}{\rho_1 c_1} \left(e^{-ikx} + e^{+ikx} \right) e^{i\omega t} = \frac{2 p_0}{\rho_1 c_1} \cos kx e^{i\omega t}$$

en réel :

$$p_1(x, t) = 2 p_0 \sin kx \sin \omega t$$

$$U_1(x, t) = 2 \frac{p_0}{\rho_1 c_1} \cos kx \sin \omega t$$

2.4.7. Réflexion quasi-totale de l'énergie dès que deux milieux sont d'impédances caractéristiques très différentes, quelque soit l'ordre de ces milieux.

PARTIE 3

ÉTUDE D'UN ÉMETTEUR SONORE LA CORDE VIBRANTE

3.1. Équation d'onde pour un ébranlement le long de la corde.

$$3.1.1. \quad \mu dx \vec{a} = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x)$$

En projection sur Oy :

$$\mu dx \frac{dy^2}{dt^2} = T \sin \theta(x+dx, t) - T \sin \theta(x, t)$$

$$\theta \text{ petit : au premier ordre : } \sin \theta = \theta = \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

↓
2° ordre

En linéarisant au premier ordre : $\mu \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$

soit : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

du type $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

avec $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ v en : m.s⁻¹

v : vitesse de propagation de l'ébranlement.

3.1.2. *Application Numérique* : $\mu = \pi r^2 \rho = 2,26.10^{-2} \text{ kg.m}^{-1}$ $\Rightarrow v = 364 \text{ m.s}^{-1}$
 $T = 3000 \text{ N}$

3.2. Recherche des solutions en ondes stationnaires.

3.2.1. $y(x, t) = f(x) g(t)$ dans (1)

$$g \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v^2} f \cdot \frac{d^2 g}{dt^2} = 0$$

$$\frac{v^2 \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2}}{\downarrow \text{fonction de variable } x} = \frac{\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2}}{\downarrow \text{fonction de variable } t} = C$$

C : constante

• Si $C > 0$ $\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{C}{v^2}$ $f(x) = A e^{\frac{\sqrt{C}}{v} x} + B e^{-\frac{\sqrt{C}}{v} x}$

Les conditions aux limites : $f(x=0) = 0$ et $f(x=L) = 0$ imposent $A = 0$ et $B = 0$: solution à rejeter.

• Si $C = 0$ $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ $f(x) = Ax + B$

Les conditions aux limites imposent encore $A = 0$ et $B = 0$.

• C doit être négative $C = -\omega^2$

$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} = -\omega^2$ $g(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$v^2 \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\omega^2$ $f(x) = B \sin(kx + \psi)$

avec $k = \frac{\omega}{v}$

3.2.2.

$$y(x, t) = AB \sin(kx + \psi) \sin(\omega t + \phi)$$

$$y(0, t) = AB \sin \psi \sin(\omega t + \phi) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \sin \psi = 0 \quad \text{et} \quad \psi = 0$$

$$y(L, t) = AB \sin(kL + \psi) \sin(\omega t + \phi) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \sin(kL) = 0$$

$$k_n L = n \pi \quad \text{et} \quad \omega_n = v k_n = \frac{n \pi v}{L}$$

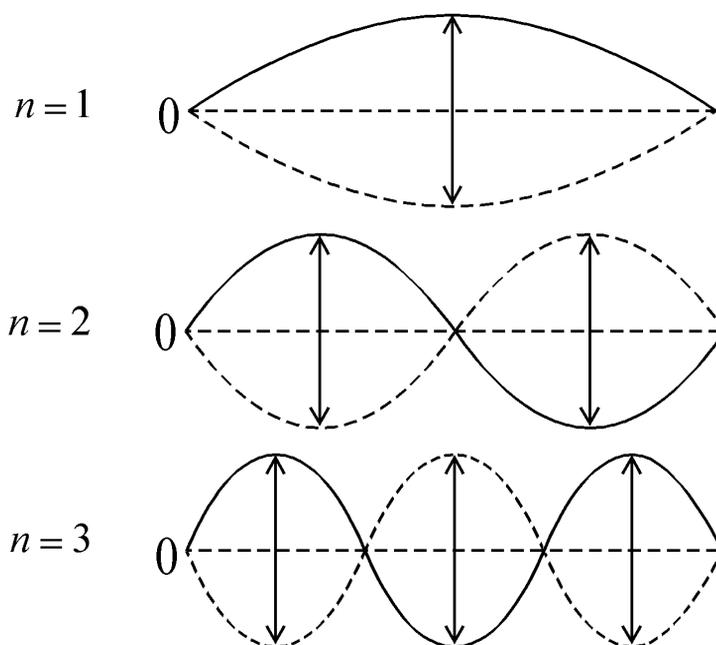
$$\omega_1 = \frac{\pi v}{L}$$

$$\lambda = \frac{2 \pi}{k} \quad \lambda_n = \frac{2 \pi}{k_n} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

3.2.3.

$$y_n(x, t) = y_{0n} \sin k_n x \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

Représentation graphique :

3.2.4. *Exercice.*

$$3.2.4.1. \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2 \pi} = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{4mL}} \quad m = \rho \cdot \pi \frac{d^2}{4} \cdot L$$

$$T = \rho \cdot \pi d^2 L^2 f_1^2$$

Corde n°	1	2	3	4	5	6
T (en N)	82,8	93,2	103	113	72,7	66,2

T est proportionnelle à la masse volumique.

$$\text{Application Numérique : } T_{(\text{boyaue})} = 14,1 \text{ N} \quad T_{(\text{nylon})} = 17,1 \text{ N} \quad T_{(\text{acier})} = 113 \text{ N}$$

$$3.2.4.2. \quad \frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{\Delta f_1}{f_1} = 2 \%$$

3.3. Aspect énergétique.

$$3.3.1. \quad E_c = \int_0^L \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$$

3.3.2. La longueur de la corde varie très faiblement pendant le mouvement :

$$L' = \int_0^L ds \quad \text{avec} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ restant petit :} \quad ds \approx dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$L' = \int_0^L dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] = L + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\text{Allongement total :} \quad \Delta L = L' - L = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

$T \Delta L$ est le travail de la force que devrait exercer un opérateur extérieur pour obtenir son allongement : ce travail s'identifie à la variation d'énergie potentielle de la corde.

En prenant pour origine, l'énergie potentielle de la corde au repos :

$$E_p = T \Delta L = \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

3.3.3. Pour le mode n :

$$E_c^n = \frac{\mu}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y_n}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{\mu}{2} (\omega_n A_n)^2 \cos^2 (\omega_n t + \psi_n) \int_0^L \sin^2 k_n x dx$$

\downarrow
 $L/2$

$$E_p^n = \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{T}{2} (k_n A_n)^2 \sin^2 (\omega_n t + \psi_n) \int_0^L \cos^2 k_n x dx$$

\downarrow
 $L/2$

$$\omega_n^2 = k_n^2 v^2 = k_n^2 \frac{T}{\mu} \quad \text{et} \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$E_n = E_c^n + E_p^n = \frac{n^2 \pi^2}{4L} T A_n^2$$

E_n est une constante, indépendante du temps.

$$3.3.4. \quad E = \int_0^L \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{T}{2} \int_0^L \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

en tenant compte de tous les modes :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \psi_n)$$

E étant indépendante du temps, on peut effectuer le calcul à $t = 0$.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \omega_n \cos \psi_n$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n \cos k_n x \sin \psi_n$$

Compte-tenu de l'orthogonalité des fonctions trigonométriques, la moyenne de tous les doubles produits est nulle :

$$E = \frac{T}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 k_n^2 \cos^2 \psi_n \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 k_n^2 \sin^2 \psi_n \cdot \frac{L}{2} \right]$$

$$E = \frac{TL}{4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 k_n^2 = \frac{\pi^2 T}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2$$

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

Conclusion : l'énergie totale de la corde est la somme des énergies de chaque mode.

3.4. Analyse spectrale.

3.4.1. Analyse spectrale d'une corde frappée (piano).

$$3.4.1.1. \quad y(x, t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n$$

$$b_n = \frac{2}{L \omega_n} \int_a^{a+e} v_0 \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx = \frac{2 v_0}{L \omega_n} e \sin\left(\frac{n \pi a}{L}\right) \quad (e \ll L)$$

$$b_n = \frac{2 v_0 e}{\pi v} \cdot \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n \pi a}{L}\right)$$

3.4.1.2. Il est possible d'agir sur le spectre sonore de la corde, en choisissant des abscisses a particulières.

Pour supprimer le septième harmonique, il faut que $b_7 = 0$ soit :

$$\frac{7 \pi a}{L} = p \pi \quad a = p \cdot \frac{L}{7}$$

3.4.1.3. $a = \frac{L}{2} \qquad a_n = 0$

si $n = 2 p \qquad b_{2 p} = 0$

si $n = 2 p + 1 \qquad b_{2 p + 1} = \frac{2 v_0 e}{(2 p + 1) \pi v} (-1)^p$

Les seuls harmoniques présents sont les harmoniques impairs. Résultat prévisible car ce sont les seuls qui possèdent un ventre de vibration au milieu de la corde, où celle-ci est frappée.

$$y(x, t) = \frac{2 v_0 e}{\pi v} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2 p + 1} \sin \frac{(2 p + 1) \pi v t}{L} \sin \frac{(2 p + 1) \pi x}{L}$$

Pour n impair :

$$E_n = \frac{\pi^2 T}{4 L} n^2 b_n^2 = \mu \frac{v_0^2 e^2}{L} \qquad \text{car } v^2 = \frac{T}{\mu}$$

L'amplitude des harmoniques décroît en $\frac{1}{n}$, leur énergie est indépendante de n . Le son émis est donc particulièrement riche en harmoniques.

3.4.2. *Analyse spectrale d'une corde pincée (guitare).*

3.4.2.1. $0 \leq x \leq a \quad y(x, 0) = \frac{h}{a} x$

$a \leq x \leq L \quad y(x, 0) = h \cdot \frac{L-x}{L-a}$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{(x, t=0)} = 0$$

3.4.2.2.
$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^a \frac{h x}{a} \sin \frac{n \pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_a^L h \frac{L-x}{L-a} \sin \frac{n \pi x}{L} dx$$

$$a_n = \frac{2 h a}{L - a} \left[\frac{L}{n \pi a} \right]^2 \sin \frac{n \pi a}{L}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{(x, t=0)} = 0 \Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2}{4 L} T a_n^2 = \frac{T L h^2}{(L - a)^2} \left[\frac{\sin \frac{n \pi a}{L}}{\frac{n \pi a}{L}} \right]^2$$

E_n varie en $\frac{1}{n^2}$

$$3.4.2.3. \quad a = \frac{L}{2} \qquad a_n = \frac{8 h}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n \pi}{2}$$

$$\text{si } n = 2 p \qquad a_{2 p} = 0$$

$$\text{si } n = 2 p + 1 \qquad b_{2 p + 1} = \frac{8 h}{\pi^2 (2 p + 1)^2} (-1)^p$$

Ici aussi, seuls subsistent les harmoniques impairs à ventre en $x = \frac{L}{2}$:

$$y(x, t) = \frac{8 h}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2 p + 1)^2} \cos \frac{(2 p + 1) \pi v t}{L} \sin \frac{(2 p + 1) \pi x}{L}$$

$$\text{pour } n \text{ impair :} \qquad E_n = \frac{\pi^2 T}{4 L} n^2 a_n^2 = \frac{16}{\pi^2} \frac{T h^2}{n^2 L}$$

L'amplitude des harmoniques décroît en $\frac{1}{n^2}$, leur énergie aussi.

3.5. Conclusion musicale.

3.5.1. Une corde de piano et une corde de guitare présentent la même série d'harmoniques lorsqu'elles sont excitées au même endroit.

L'amplitude de ces harmoniques décroît en $\frac{1}{n}$ pour une corde de piano et en $\frac{1}{n^2}$ pour une corde de guitare.

L'énergie des harmoniques est indépendante de n pour une corde de piano et décroît en $\frac{1}{n^2}$ pour une corde de guitare.

3.5.2. Le son de la guitare paraît plus «pur», mais celui du piano présente un timbre plus riche.

PARTIE 4

RÉCEPTION SONORE ET AMPLIFICATION

4.1. Le microphone électrostatique.

4.1.1. Le microphone électrostatique.

$$4.1.1.1. \quad C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{X_0}$$

$$4.1.1.2. \quad \text{Pression électrostatique : } p = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} ; \quad \sigma = \frac{Q_0}{S} \quad Q_0 = C_0 U_0$$

$$\text{Force attractive : } \vec{f}_0 = -\frac{\epsilon_0 S}{2 X_0^2} U_0^2 \vec{x} = -\frac{Q_0^2}{2 \epsilon_0 S} \vec{x}$$

$$\text{Application Numérique : } f_0 = 1,18 \text{ N} \quad C_0 = 4,4 \cdot 10^{-10} \text{ F.}$$

$$4.1.1.3. \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{X_0 + x} = \frac{\epsilon_0 S}{X_0} \left(1 - \frac{x}{X_0} \right)$$

$$U = \frac{Q_0 + q}{C} = \frac{Q_0}{C_0} \left(1 + \frac{x}{X_0} \right) \left(1 + \frac{q}{Q_0} \right)$$

$$\vec{f} = -\frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S} \vec{x}$$

$$C = C_0 \left(1 - \frac{x}{X_0} \right)$$

$$U = U_0 \left(1 + \frac{q}{Q_0} + \frac{x}{X_0} \right)$$

$$\vec{f} = \vec{f}_0 \left(1 + \frac{2q}{Q_0} \right)$$

4.1.2. 4.1.2.1. Loi des mailles :

$$U_0 + e = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q_0 + q}{C}$$

$$e = L \frac{di}{dt} + Ri + U_0 \left(\frac{x}{X_0} + \frac{q}{Q_0} \right)$$

Loi de la résultante cinétique :

$$m \frac{dv}{dt} = -rv - kx + (f - f_0) + f_e$$

$$f_e = m \ddot{x} + r \dot{x} + kx - 2 \frac{f_0 q}{Q_0}$$

4.1.2.2. La puissance électrique fournie par la f.é.m. supplémentaire e vaut :

$$ei = Li \frac{di}{dt} + Ri^2 + \frac{U_0}{Q_0} q i + \frac{U_0}{X_0} x i \quad \text{avec } i = \frac{dq}{dt}$$

La puissance mécanique fournie par la force extérieure f_e vaut :

$$f_e \cdot \dot{x} = m \dot{x} \ddot{x} + r \dot{x}^2 + kx \dot{x} - 2 \frac{f_0}{Q_0} q \dot{x}$$

La puissance fournie au microphone par l'extérieur vaut donc :

$$P_f = ei + f_e \dot{x}$$

La puissance dissipée par effet Joule et par frottement mécanique vaut :

$$P_d = Ri^2 + r \dot{x}^2$$

La différence s'exprime par :

$$P_f - P_d = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_0} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right] + \frac{U_0}{X_0} xi - \frac{2f_0}{Q_0} q \dot{x}$$

or :

$$f_0 = -\frac{1}{2 C_0 X_0} Q_0^2 \quad -\frac{2 f_0}{Q_0} q \dot{x} = \frac{Q_0^2}{C_0 X_0 Q_0} q \dot{x} = \frac{U_0}{X_0} q \dot{x}$$

Soit :

$$P_f - P_d = \frac{dU}{dt}$$

avec

$$U = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_0} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{U_0}{X_0} q x$$

U somme :

- de l'énergie magnétique de l'inductance propre,
- de l'énergie électrostatique ne dépendant que de la charge instantanée,
- de l'énergie cinétique de la plaque P_1 ,
- de l'énergie potentielle du ressort,
- du terme $\frac{U_0}{X_0} q x$: énergie de couplage électromagnétique du microphone condensateur.

4.1.2.3. Impédance électrique du circuit pour $x = 0$:

$$\underline{Z} = R + j L \omega + \frac{1}{j C_0 \omega}$$

Équations vérifiées par les amplitudes complexes :

$$\underline{e} = \underline{Z} \underline{i} + \frac{U_0}{j \omega X_0} \underline{v}$$

$$\underline{f}_e = \left(m j \omega + r + \frac{k}{j \omega} \right) \underline{v} - \frac{2 f_0}{j \omega Q_0} \underline{i} = \left(m j \omega + r + \frac{k}{j \omega} \right) \underline{v} + \frac{U_0}{j \omega X_0} \underline{i}$$

4.1.3. 4.1.3.1.

$$(\underline{e} - \underline{Z} \underline{i}) j \frac{\omega X_0}{U_0} = \underline{v}$$

$$\underline{f}_e + \left(m \omega^2 - r j \omega - k \right) \frac{X_0}{U_0} \underline{e} = \left[\left(m \omega^2 - r j \omega - k \right) \frac{X_0}{U_0} \underline{Z} + \frac{U_0}{j \omega X_0} \right] \underline{i}$$

$e = 0$:

$$\frac{U_0}{(m \omega^2 - k - j r \omega) X_0} \underline{f}_e = \left[\underline{Z} + \frac{U_0^2}{j \omega X_0^2 (m \omega^2 - r j \omega - k)} \right] \underline{i}$$

A l'impédance \underline{Z} s'ajoute le terme $\underline{Z}_m(\omega)$ tel que :

$$\underline{Z}_m(\omega) = \frac{U_0^2}{X_0^2 \omega^2} \frac{1}{r + j \left(m \omega - \frac{k}{\omega} \right)}$$

$$4.1.3.2. \quad \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{X_0^2 \omega^2}{U_0^2} \left[r + j \left(m \omega - \frac{k}{\omega} \right) \right] = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{j L_m \omega} + j C_m \omega$$

$$\text{avec :} \quad R_m = \frac{U_0^2}{r X_0^2 \omega^2} \quad L_m = \frac{U_0^2}{k X_0^2 \omega^2} \quad C_m = \frac{m X_0^2 \omega^2}{U_0^2}$$

$$4.1.3.3. \quad \underline{Z}_m(\omega) = X(\omega) + j Y(\omega)$$

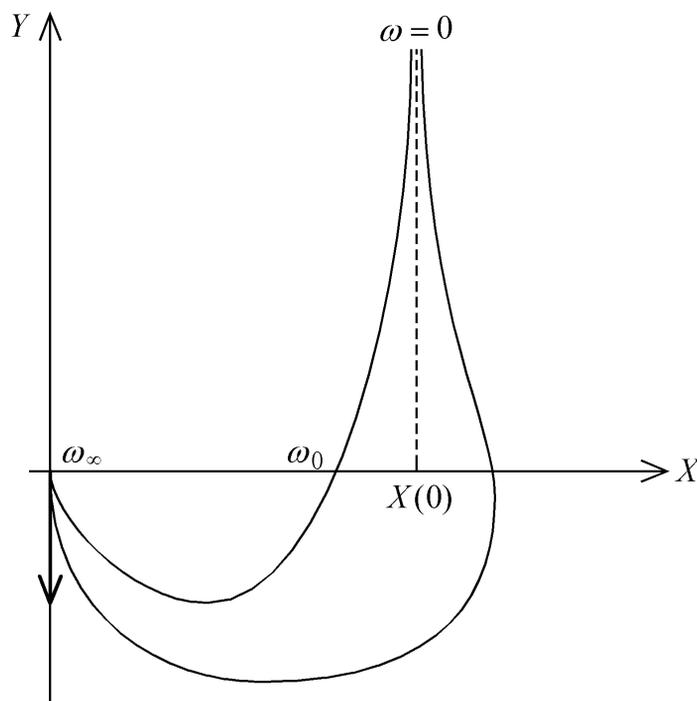
$$X(\omega) = \frac{U_0^2}{X_0^2 \omega^2} \frac{r}{r^2 + \left(m \omega - \frac{k}{\omega} \right)^2} = \frac{U_0^2}{X_0^2} \frac{r}{m^2 \omega^4 + (r^2 - 2km) \omega^2 + k^2}$$

$$Y(\omega) = \frac{U_0^2}{X_0^2 \omega^2} \frac{\frac{k}{\omega} - m \omega}{r^2 + \left(m \omega - \frac{k}{\omega} \right)^2} = \frac{U_0^2}{X_0^2} \frac{\frac{k}{\omega} - m \omega}{m^2 \omega^4 + (r^2 - 2km) \omega^2 + k^2}$$

Lorsque ω tend vers zéro :

$$X(\omega) \text{ tend vers } X(0) = \frac{U_0^2}{X_0^2} \frac{r}{k^2},$$

$Y(\omega)$ est équivalent à $\frac{U_0^2}{X_0^2} \frac{1}{k \omega}$, qui tend vers l'infini.



Courbe a une asymptote d'équation $X = \frac{U_0^2 r}{X_0^2 k^2}$:

- si $r^2 \geq 2 \text{ km}$ courbe tend vers l'asymptote par valeurs inférieures de X,
- si $r^2 \leq 2 \text{ km}$ courbe tend vers l'asymptote par valeurs supérieures de X.

Lorsque ω tend vers l'infini :

X (ω) est équivalent à $\frac{U_0^2}{X_0^2} \frac{r}{m^2 \omega^4}$,

Y (ω) est équivalent à $-\frac{U_0^2}{X_0^2} \frac{1}{m \omega^3}$.

$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{Y}{X} = -\infty$ tangente verticale à l'origine.

Pour $\omega = \omega_0$ Z_m est réelle $Z_m(\omega_0) = \frac{U_0^2}{X_0^2} \frac{m}{k r}$

si $r^2 > km$ $X(0) > Z_m(\omega_0)$

si $r^2 < km$ $X(0) < Z_m(\omega_0)$

Allure :

$\omega < \omega_0$ Z_m inductive,

$\omega > \omega_0$ Z_m capacitive,

$\omega = \omega_0$ Z_m résistance pure.

4.1.3.4. $L = 0$ $r = 0$ $Z_T = Z + Z_m$ soit :

$$Z_T = R + \frac{1}{j C_0 \omega} + \frac{U_0^2}{j X_0^2 \omega^2} \frac{1}{\left(m \omega - \frac{k}{\omega}\right)} = R - j \left[\frac{1}{C_0 \omega} + \frac{U_0^2}{X_0^2 m \omega (\omega^2 - \omega_0^2)} \right]$$

Ordres de grandeur :

$$\left. \begin{array}{l} R = 200 \text{ M}\Omega \\ \frac{1}{C_0 \omega} = 2,51 \text{ M}\Omega \end{array} \right\} Z = R + \frac{1}{j C_0 \omega} \quad Z \approx R$$

$$\frac{U_0^2}{X_0^2 m \omega (\omega^2 - \omega_0^2)} = Z_m = -55 \text{ k}\Omega$$

Z_m négligeable devant R.

Conséquence : $Z_T \approx R$

Sensibilité : $s = \frac{Ri}{p}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{or :} \\ \text{avec :} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = \frac{U_0}{(m\omega^2 - k) X_0} \frac{f_e}{Z_T} \\ f_e = \alpha S p \end{array} \quad s = \frac{\alpha S U_0}{m X_0} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

de plus $\omega \gg \omega_0$

$$s \approx -\frac{\alpha S U_0}{m X_0 \omega_0^2}$$

Application Numérique : $s = -2,8 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{Pa}^{-1}$.

A basse fréquence, la sensibilité est indépendante de $\omega \Rightarrow$ microphone correct.

4.2. Filtrage et amplification des sons.

4.2.1. Premier montage.

$$\left. \begin{array}{l} V_S = -G V_B \\ V_B = V_A \frac{R}{R + Z_C} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V_A = -V_S \frac{R + Z_C}{R G} \\ V_A = -V_S \frac{1 + j R C \omega}{j R G C \omega} \end{array} \quad \text{avec } Z_C = \frac{1}{j C \omega}$$

4.2.1.1. Nœud A :

$$\frac{V_E - V_A}{R} = \frac{V_A - V_S}{Z_C} + \frac{V_B}{R}$$

$$\frac{V_E}{R} = -\frac{V_S}{R} \frac{R + Z_C}{R G} + \frac{1}{R} \frac{R}{R + Z_C} \left(-V_S \frac{R + Z_C}{R G} \right) + \frac{V_S}{Z_C} \left(-\frac{R + Z_C}{R G} - 1 \right)$$

$$\underline{V_E} = -\underline{V_S} \left[\frac{3 R Z_C + Z_C^2 + R^2 + R^2 G}{R G Z_C} \right]$$

$$\underline{T_1} = -\frac{R G / Z_C}{3 R / Z_C + 1 + R^2 (1 + G) / Z_C^2}$$

$$\underline{T_1} = \frac{-j R C \omega G}{1 + 3 j R C \omega - (1 + G) R^2 C^2 \omega^2}$$

4.2.1.2.

$$\underline{T_1} = -G \frac{\frac{j R C \omega}{R^2 C^2 (1 + G)}}{\frac{1}{R^2 C^2 (1 + G)} - \omega^2 + \frac{3 j R C \omega}{R^2 C^2 (1 + G)}}$$

Posons :

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{R C \sqrt{1 + G}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{1 + G}}{3}$$

$$\underline{T_1} = -\frac{G}{\sqrt{1 + G}} \frac{j \omega \underline{\Omega}}{\underline{\Omega}^2 - \omega^2 + \frac{3 j \omega \underline{\Omega}}{1 + G}}$$

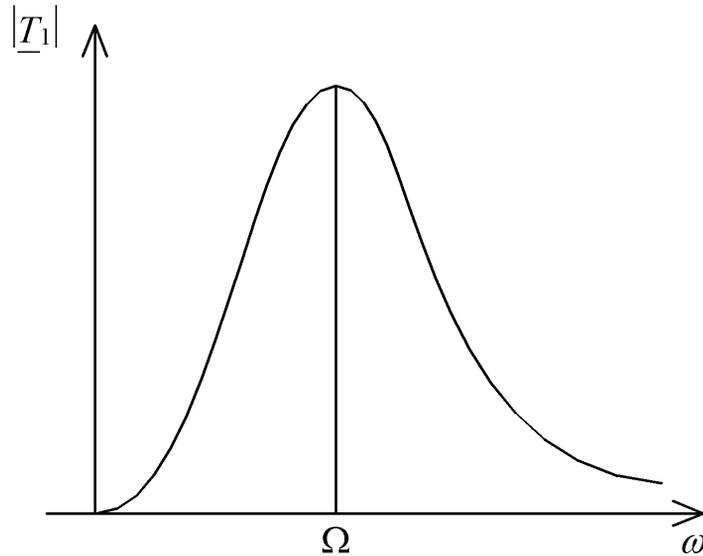
$$\underline{T_1} = -\frac{G}{3} \frac{\underline{\Omega}}{Q} \frac{j \omega}{\underline{\Omega}^2 - \omega^2 + j \omega \frac{\underline{\Omega}}{Q}}$$

4.2.1.3.

$$|\underline{T}_1| = \frac{G}{3} \frac{\Omega}{Q} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Omega^2}{\omega} - \omega\right)^2 + \frac{\Omega^2}{Q^2}}}$$

$$|\underline{T}_1|_{\max} \quad \text{si} \quad \omega_m = \Omega \quad |\underline{T}_1|_{\max} = \frac{G}{3}$$

$$|\underline{T}_1| = 0 \quad \text{pour} \quad \omega = 0$$



$$|\underline{T}_1| = \frac{|\underline{T}_1|_{\max}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega} - \omega\right)^2}}$$

Pulsations de coupure :

$$1 + \left(\frac{Q}{\Omega}\right)^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega} - \omega\right)^2 = 2$$

$$\left(\frac{\Omega^2}{\omega} - \omega\right) \frac{Q}{\Omega} = \pm 1$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_+ &= \frac{\Omega}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Omega^2}{Q} + 4\Omega^2} \\ \omega_- &= -\frac{\Omega}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Omega^2}{Q} + 4\Omega^2} \end{aligned} \right\} \text{B.P. : } \boxed{\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{\Omega}{Q}}$$

Ω : pulsation de résonance.

$Q = \frac{\Omega}{\Delta\omega}$ facteur de qualité du circuit.

4.2.1.4. On règle Ω par le choix de R (plutôt que C).

4.2.2. *Amplificateur.*

$$4.2.2.1. \quad 4.2.2.1.1. \quad \underline{T}_2 = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$4.2.2.1.2. \quad R_e = R_1 \quad R_s = 0$$

4.2.2.2. 4.2.2.2.1. Suiveur isole la charge de la source.

4.2.2.2.2. *Amplificateurs opérationnels* : $i_+ = 0$

$$\left. \begin{aligned} V_+ &= V_A \frac{R}{R + Z_C} \\ V_- &= V'_E \\ V'_E &= -\frac{R_1}{R_2} V_S \end{aligned} \right\}$$

A.O.₁ en régime linéaire $V_+ = V_-$.

$$V_A = -\frac{R_1}{R_2} \frac{R + Z_C}{R} V_S$$

On retrouve la relation trouvée au 4.2.1. en remplaçant G par :

$$G' = \frac{R_2}{R_1}$$

Calcul identique a celui du paragraphe 4.2.1. :

$$\Omega' = \frac{1}{R C \sqrt{1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}} \quad Q' = \frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{R_2}{R_1}}$$

4.2.2.2.3. Q' peut être modifié en faisant varier le gain de l'inverseur $\frac{R_2}{R_1}$.

4.2.2.2.4. On peut modifier la valeur de Ω' en adaptant la valeur de R. Ce résultat est indépendant de celui de Q' c'est-à-dire de la B.P.

4.2.2.2.5. *Application Numérique* :

$$Q' = \frac{v}{\Delta v} = \frac{200}{10} = 20 \quad \Rightarrow \quad G' + 1 = 9 Q'^2 \quad G' \approx 3600$$

$$R = \frac{1}{C \Omega' 3 Q'} \quad R = 200 \Omega$$

$$R_2 = G' R_1 \quad R_2 = 54 \text{ k}\Omega$$

Agrégation

(Concours Interne)

SECTION : SCIENCES PHYSIQUES

Composition avec exercices d'application - Session : 1995

Option : **PHYSIQUE ET CHIMIE**

A. Première partie

I. Introduction

- I.1. Alliages légers, papier alimentaire, casseroles... sont des utilisations de l'aluminium.
- I.2. Un métal est caractérisé par un ensemble de propriétés :
 – conduction thermique et électrique,
 – malléabilité.
- I.3. a. Catalyseur Ziegler-Natta : mélange de $TiCl_4$ et $Al(C_2H_5)_3$.
 b. Le polymère obtenu sera isotactique.
- I.4. a. Le principal minerai est la bauxite.
 b. L'électrolyse d'un mélange Al_2O_3 , Na_3AlF_6 donnera Al à la cathode.

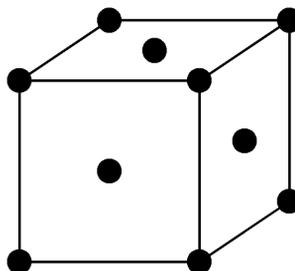
II. Structures

II.1. Structures atomiques.

- a. X est le symbole chimique de l'élément, Z son numéro atomique et A le nombre de masse.
 b. Configuration : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$.

II.2. Structures cristallines.

- a. Atomes aux sommets et aux centres des faces du cube.



- b. La maille n'est pas élémentaire car elle contient quatre motifs (l'atome d' Al) et non un seul.

$$c. \quad \rho = \frac{4 \cdot 27 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23} \cdot (0,405)^3 \cdot 10^{-27}} = 2699 \text{ Kg.m}^{-3}$$

d. La compacité est le volume occupé par les quatre atomes sphériques divisé par le volume de la maille cubique :

$$r = \frac{0,405 \cdot \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{compacité} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3} = 0,74$$

e. α . Un atome peut s'insérer dans un interstice tétraédrique ou octaédrique :

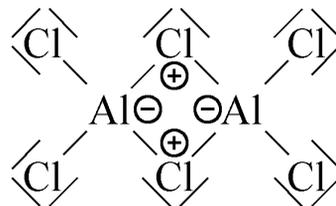
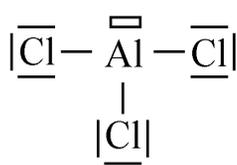
$$\frac{r_T}{r_{Al}} \leq 0,22 \quad \frac{r_O}{r_{Al}} \leq 0,414$$

β . Un atome peut substituer un atome d'aluminium dans le réseau :

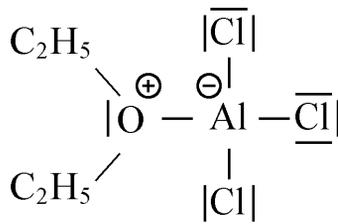
$$r_s \approx r_{Al}$$

II.3. Structures moléculaires.

Les structures de Lewis doivent faire intervenir des doublets | et non des flèches \rightarrow .



dans l'éther on a :



II.4. Diagramme de phases.

a. Un composé défini est un composé de stéchiométrie simple qui se comporte à l'état solide comme un corps pur. S'il se décompose avant d'atteindre sa température de fusion, il est à point de fusion non congruent. Sinon, congruent :



b. E est le point eutectique.

c. $v = c + 1 - \phi$ car la pression est fixée.

Dans 1, $v = 2$. Dans les autres $v = 1$.

1. Liquide homogène.
2. Liquide et Al_2Ce solide.
3. Al_2Ce solide et $AlCe$ solide.
4. Liquide et $AlCe$ solide.
5. Al_2Ce solide et Al_2Ce_3 solide.
6. Liquide et Al_2Ce_3 solide.
7. Liquide et Ce solide.
8. Al_2Ce_3 solide et Ce solide.

d. α . Lorsque T diminue, vers $980^\circ C$ les premiers cristaux de Al_2Ce apparaissent.



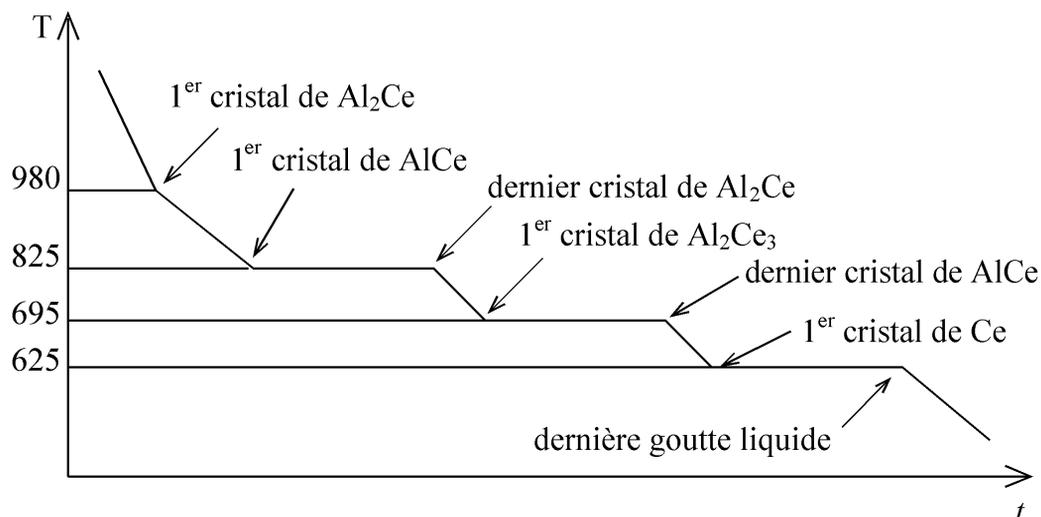
Quand il n'y a plus Al_2Ce , refroidissement $\rightarrow 695^\circ C$.



Quand il n'y a plus $AlCe$, refroidissement $\rightarrow 625^\circ C$.

A $625^\circ C$ apparition de Ce solide. Quand il n'y a plus de liquide, $T \searrow$.

β .



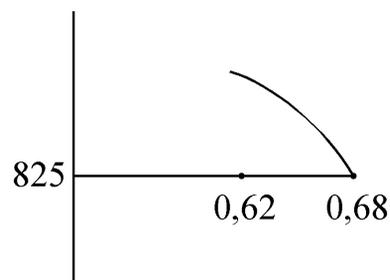
γ . Théorème des moments : soient n_e et n_s les nombres de moles liquides et solides.

$$\left. \begin{array}{l} 0,06 n_e = 0,12 n_s \\ n_e + n_s = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n_s = 1/3 \\ n_e = 2/3 \end{array}$$

Le solide est $AlCe$ donc $1/6 Al$ $1/6 Ce$:

– n_{Ce} dans le liquide est $0,62 - 1/6 = 0,453$ mole,

– n_{Al} dans le liquide est $0,38 - 1/6 = 0,213$ mole.



III. Étude en solution aqueuseIII.1. Calcul de pH.

a. Il ne faut pas oublier le caractère amphotère de $Al(OH)_3$, moins basique que l'eau mais plus acide :



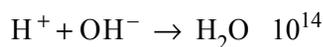
Donc, en négligeant Al^{3+} pH = 6

b. Solubilité = $Al(OH)_4^{\ominus} = 10^{-6} \text{ mole.L}^{-1}$

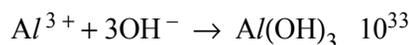
III.2. Acido-basicité.

a. Il faut deux électrodes : une de mesure, l'électrode de verre, et l'autre de référence par exemple à calomel saturé.

b. α . AB - Neutralisation de tout l'acide sulfurique :



BC - Précipitation de $Al(OH)_3$:



CD - Il n'y a plus d'entité acide en quantité notable d'où une montée brusque du pH.



EF - Il y a dilution de la soude versée et OH^- augmente.

β . En B, apparition du précipité de $Al(OH)_3$.

En E, disparition du dernier grain de ce précipité $Al(OH)_3$.

c. $(H^+)_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ d'où $V = 4 \text{ cm}^3$ ($2 \cdot 10^{-2} \times 100 = 0,5 \times V$).

$(Al^{3+})_0 = 2 \cdot 10^{-2}$. Il faut $3OH^-$ pour $1Al^{3+}$ donc $(V' - V) = 12 \text{ cm}^3$.

$Al(OH)_3$ équivalent, en D, $= 2 \cdot 10^{-2}$. Il nécessite $10 H^-$ pour en dissoudre une mole.

Donc $(v'' - v') = 4 \text{ cm}^2$

	V	V'	V''
cm^3	4	16	20

d. En A, H_2SO_4 seul impose le pH $pH = 1,7$.

En B, en négligeant la dilution $(Al^{3+}) = 2 \cdot 10^{-2}$ donc $(OH^-) = 5 \cdot 10^{-32}$ d'où $pH \approx 3,6$.

En E, $Al(OH)_4^- = \frac{2 \cdot 10^{-2} \times 100}{120} \frac{Al(OH)_4^-}{OH^-} = 10^2$ d'où $pH = 10,3$.

e. (Al^{3+}) diminue par précipitation donc (OH^-) augmente pour conserver le K_s d'où pH augmente (peu).

A 14 cm^3 on a neutralisé $\frac{10}{12}$ de Al^{3+} . Il en reste $\frac{2}{12} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \times \frac{100}{114}$ donc $pH = 3,85$.

III.3. Oxydoréduction.

a. $pH < 3,6$ $Al^{3+} + 3e^- \rightleftharpoons Al$ E_1

$3,6 < pH < 10,3$ $Al(OH)_3 + 3e^- + 3H^+ \rightleftharpoons Al + 3H_2O$ E_2

$pH > 10,3$ $Al(OH)_4^- + 3e^- + 4H^+ \rightleftharpoons Al + 4H_2O$ E_3

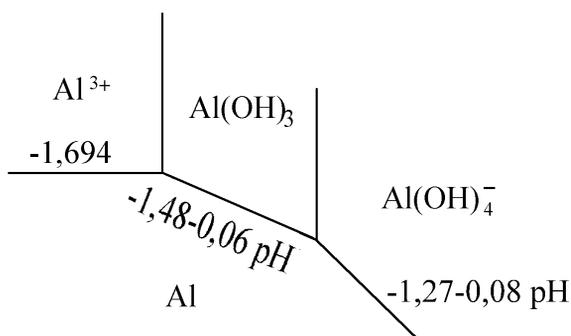
$$E_1 = E^0 + 0,02 \log(Al^{3+}) \quad E^0 = -1,66 \text{ V}$$

$$E_2 = E_2^0 - 0,06 \text{ pH}$$

E_2^0 calcul par continuité = $-1,48 \text{ V}$.

$$E_3 = E_3^0 - 0,08 \text{ pH} + 0,02 \log(Al(OH)_4^-) \quad E_3^0 = -1,24 \text{ V}$$

b.



c. Puisque $Al(OH)_3$ est protecteur, en milieu très acide ou très basique il y aura réduction de l'eau :



IV. Oxydoréduction en phase sèche

IV.1. Soit la réaction $2Al + 3/2 O_2 \rightleftharpoons Al_2O_3$. Le dioxygène n'oxydera l'aluminium que si sa pression est

supérieure à la pression d'équilibre P_0 reliée à la constante d'équilibre par $K = P_0^{-3/2}$ et

$$\ln K = -\frac{\Delta_r G^0}{RT}$$

$$\Delta_r G^0 = \Delta_f H^0(Al_2O_3) - 2\Delta_f H^0(Al_{liq}) - T \left[S^0(Al_2O_3) - 2S^0(Al_{liq}) - \frac{3}{2} S^0(O_2) \right]$$

$$\Delta_f H^0(Al_{liq}) = L_f$$

$$S^0(Al_{liq}) = S^0(Al_{solide}) + \frac{L_f}{T_f}$$

$$\Delta_r G^0 = -1191,85 \text{ kJ} \quad K = 3,35 \cdot 10^{41} \quad P_0 = 2 \cdot 10^{-28} \text{ bars}$$

IV.2. Pour oxyder l'aluminium de l'alliage, il faut une pression minimale P_0' en dioxygène reliée à K' par :

$$K' = \frac{P_0'^{-3/2}}{0,1} \quad \ln K' = -\frac{\Delta_r G^{0'}}{RT} \quad (\text{ici, Al est solide})$$

donc $\Delta_r G^{0'} = -1205,25 \text{ kJ} \quad K' = 9,8 \cdot 10^{41} \quad P_0' = 4,7 \cdot 10^{-28} \text{ bars}$

IV.3. L'aluminium liquide peut réagir avec la silice si le $\Delta_r G^0$ de la réaction (1) est négatif :



le calcul donne $\Delta_r G^0 = -664,4 \text{ kJ}$ donc Al s'oxyde.

V. Cinétique : Mesure d'une aire interfaciale liquide-liquide.

V.1. a. La réaction (2) étant un équilibre rapide on a :

$$K = \frac{[H^+][HA_2^-]}{[(HA)_2]}$$

Le conservation de l'aluminium dans l'étape (3) impose, si dn est la quantité d'aluminium transféré pendant dt :

$$\left| d(Al^{3+}) \right| = \frac{dn}{V_{aq}} \quad d[A/HA_2^{2+}] = \frac{dn}{S}$$

d'où :

$$\frac{d(Al^{3+})}{dt} = -\frac{S}{V_{aq}} k [Al^{3+}] K \frac{[(HA)_2]}{[H^+]}$$

b. $[(AH)_2]$ peut être considérée comme constante $= [(HA)_2]_0$:

$$\frac{d(Al^{3+})}{dt} = -C [Al^{3+}] \quad C = \frac{S}{V_{aq}} k K \frac{[(HA)_2]_0}{[H^+]}$$

c.

$$[Al^{3+}] = [Al^{3+}]_0 e^{-Ct}$$

d. Or
$$n_0 = V_{\text{aq}} [Al^{3+}]_0 = n_{Al^{3+}} + n_{\text{complexe}}$$

$$n_{\text{complexe}} = V_{\text{org}} [\text{complexe}]$$

donc
$$[A/H_3H_6] = \frac{V_{\text{aq}}}{V_{\text{org}}} [Al^{3+}]_0 (1 - e^{-Ct})$$

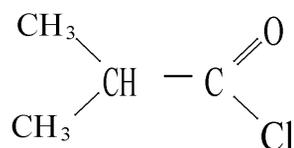
V.2. a. Le calcul de C permet de trouver $S = 2,32 \cdot 10^2 \text{ m}^2$.

b.
$$V_{\text{org}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{et} \quad S_{\text{org}} = 4 \pi r^2$$

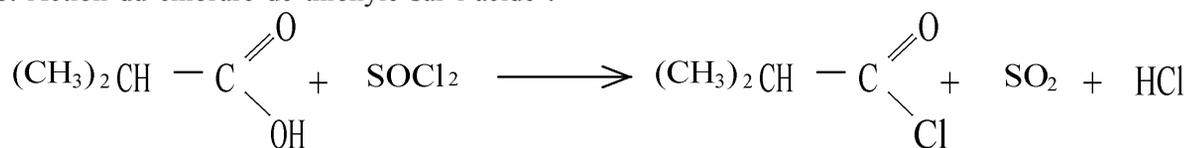
Donc le diamètre des gouttes est $D = 6 \frac{V}{S} \quad D = 2,6 \text{ mm}$.

B. Deuxième partie : chimie organique

1. a.

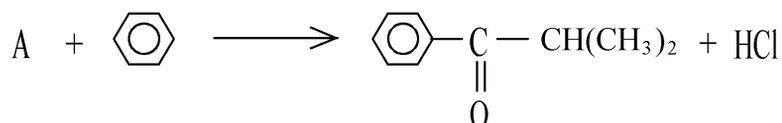


b. Action du chlorure de thionyle sur l'acide :

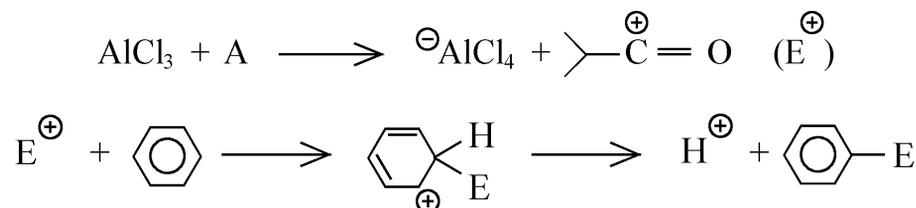


2. a. $\text{Al} \square$ possède une «case» vide.

b.



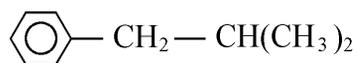
c.



(mécanisme de substitution électrophile).

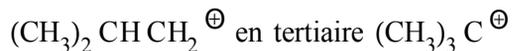
d. Il faut plus d'une mole de AlCl_3 car cet acide de Lewis réagit avec le cétone formée, basique.

3. a. La réaction de Clemmensen donne

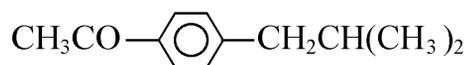


1-phénylméthylpropane

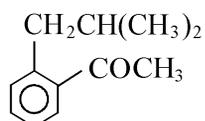
- b. Il y aurait réarrangement du carbocation primaire :



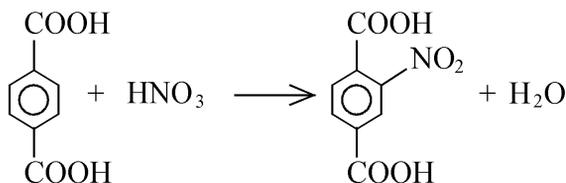
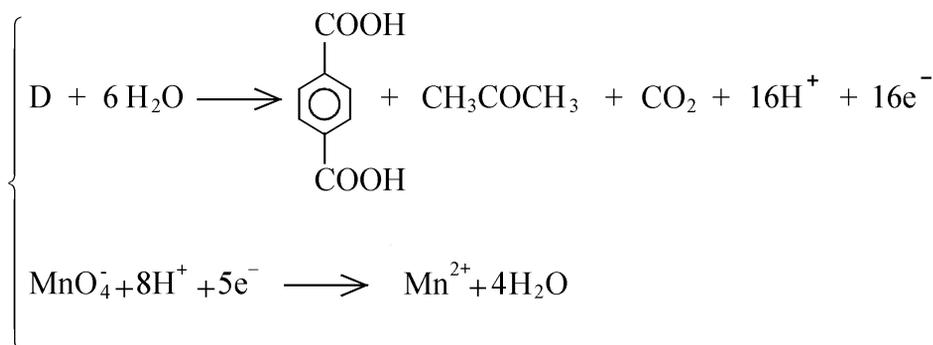
4. a. D est le 1-(4 acétylphényl) méthylpropane :



- b. D' est le produit de substitution en ortho :

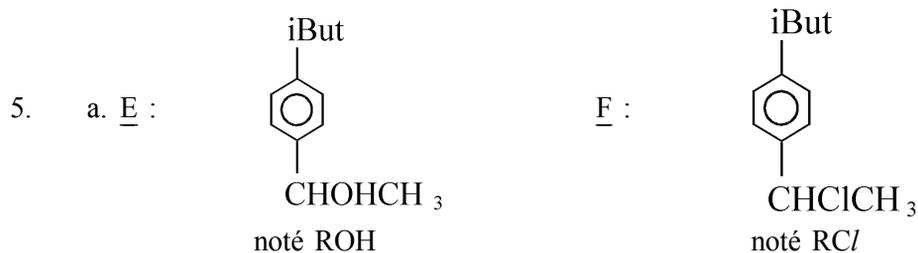


- c. α .

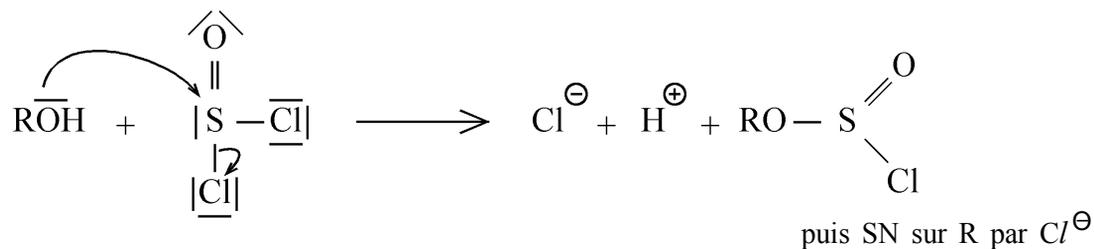


- β . D' \rightarrow D'₁ : $\begin{array}{c} \text{COOH} \\ | \\ \text{C}_6\text{H}_4 \\ | \\ \text{COOH} \end{array}$ qui peut donner deux produits de nitration différent.

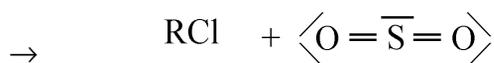


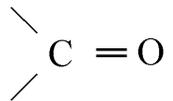


c.

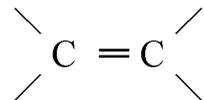


ou par le Cl de la même molécule (S_Ni).

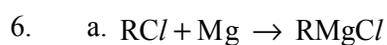


d. Lors de l'action de l'hydrure sur  il y a racémisation car attaque des deux côtés du plan

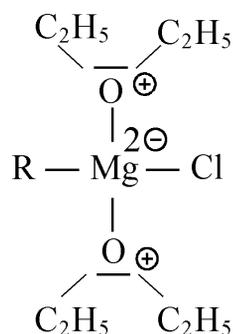
→ pas d'activité optique du produit F.

e. NaBH_4 doux ; rien sur  ; lent sur H_2O .

AlLiH_4 fort ; réagit sur l'eau avec $\overline{\text{H}}_2$.



b. Stabilité de RMgCl par :



c. Dioxane. THF.



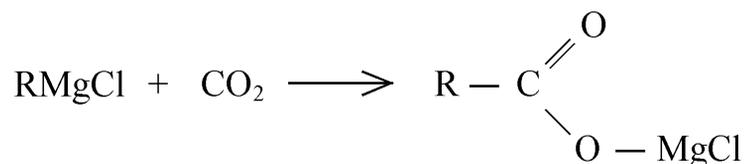
e. N_2 évite l'oxydation de RMgCl par l'air et la réaction sur le CO_2 .



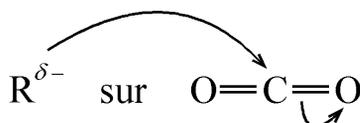
dans solvant organique.

L'excès de I_2 est dosé par le thiosulfate.

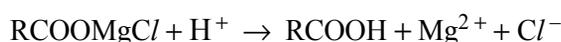
7. a.



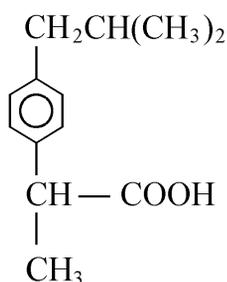
b. Addition nucléophile de



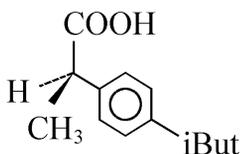
8. a.



I est donc :



b. Acide 2(4 méthylpropyl-phényl) propanoïque :



c. I est dans la phase étherée, séparée de la phase aqueuse dans une ampoule à décanter.

d. Le «rotavapor» permet l'extraction sous vide de l'éther...

e. Par ajout de soude, le carboxylate passe en phase aqueuse. On sépare les phases puis on ajoute un acide fort dans solvant2. Il y a précipitation de I, récupéré par filtration.

f. I doit être très peu soluble à froid et très soluble à chaud dans solvant3.

g. On chauffe I et un peu de solvant3 dans un erlenmeyer surmonté d'un grand tube (réfrigérant).

On filtre à chaud et on recueille le filtrat dans un bêcher sec et propre. Par refroidissement, I recristallise.

On filtre sur büchner.

Agrégation

(Concours Interne)

SECTION : SCIENCES PHYSIQUES

Composition avec exercices d'application - Session : 1995

Option : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

PREMIER PROBLÈME

PREMIÈRE PARTIE

Étude d'un convertisseur direct à structure symétrique

1. Si K_1 et K_1' ou K_2 et K_2' sont simultanément fermés, il y a court-circuit de la tension V_2 .

Si K_1 et K_1' ou K_2 et K_2' sont simultanément ouverts, il y a ouverture de la source de courant i_1 .

K_1 et K_1' ainsi que K_2 et K_2' doivent donc être l'un ouvert et l'autre fermé.

Ces paires d'interrupteurs doivent être complémentaires et former une «cellule de commutation».

2. 2.1. Si K_1 est ouvert et donc K_1' fermé :

$$v_{K_1} = V_2 \quad i_{K_1} = 0$$

$$v_{K_1'} = 0 \quad i_{K_1'} = i_1$$

Si K_1 est fermé et donc K_1' ouvert :

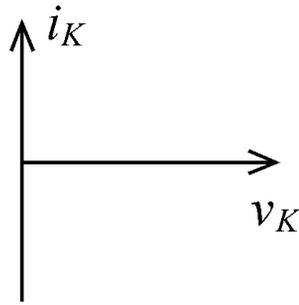
$$v_{K_1} = 0 \quad i_{K_1} = -i_1$$

$$v_{K_1'} = V_2 \quad i_{K_1'} = 0$$

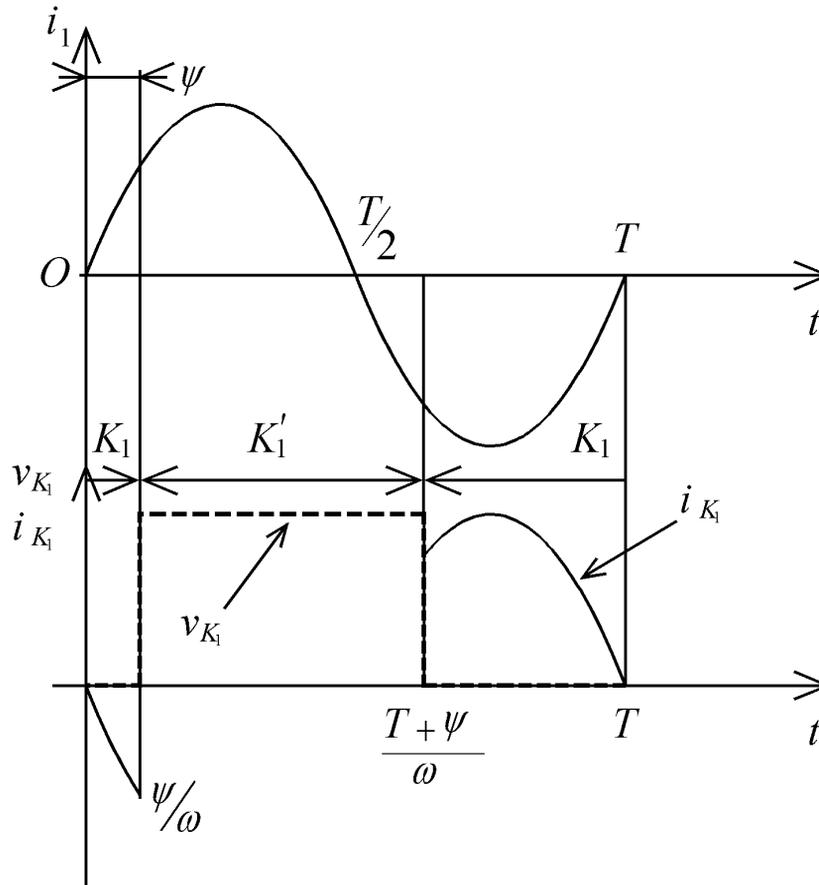
- 2.2. La tension aux bornes d'un interrupteur est toujours égale à V_2 positive. L'interrupteur doit donc être unidirectionnel en tension.

Le courant dans un interrupteur est égal à $+i_1$ ou $-i_1$. Puisque leur durée de conduction est $\frac{T}{2}$, sauf dans le cas particulier où ψ serait égal à 0, les interrupteurs seront traversés par des courants tantôt positifs, tantôt négatifs. L'interrupteur doit être bidirectionnel en courant. Les caractéristiques

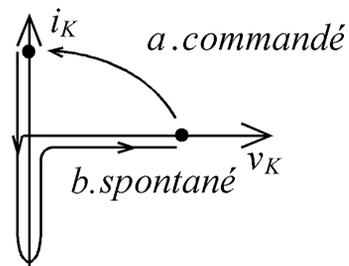
statiques des interrupteurs, dans le plan $i_K(v_K)$ sont les suivantes :



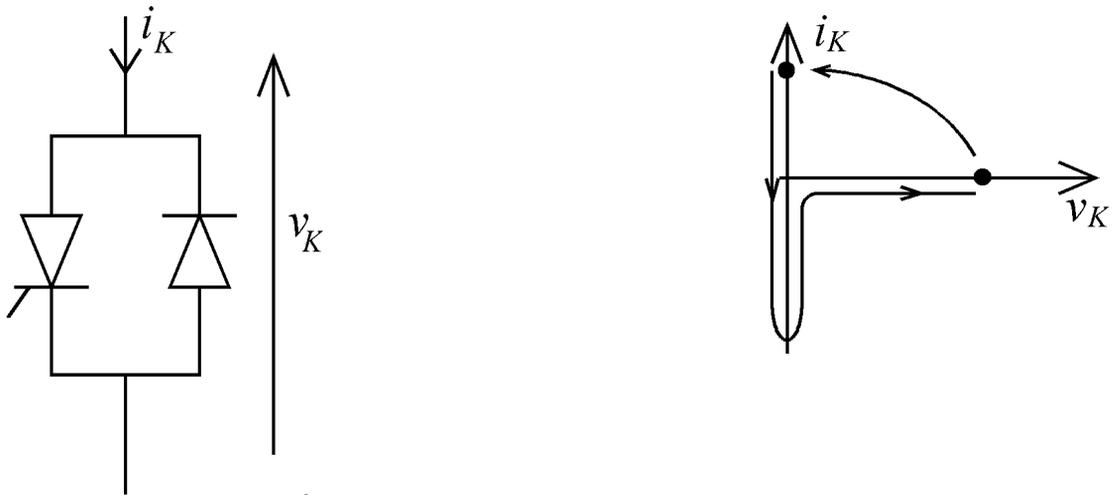
2.3.



2.4. La mise en conduction de l'interrupteur électronique s'effectue à partir d'une tension positive V_2 , à la commutation le courant i_K prend une valeur positive. Cette commutation à i_K et $v_K > 0$ donc à puissance consommée par l'interrupteur ne peut être que commandée. Le blocage s'effectue lorsque le courant est négatif, la tension devenant positive, elle ne peut s'effectuer qu'à courant et tension nuls car la puissance $p = v_K i_K$ ne peut être positive. Cette commutation ne peut être que spontanée.

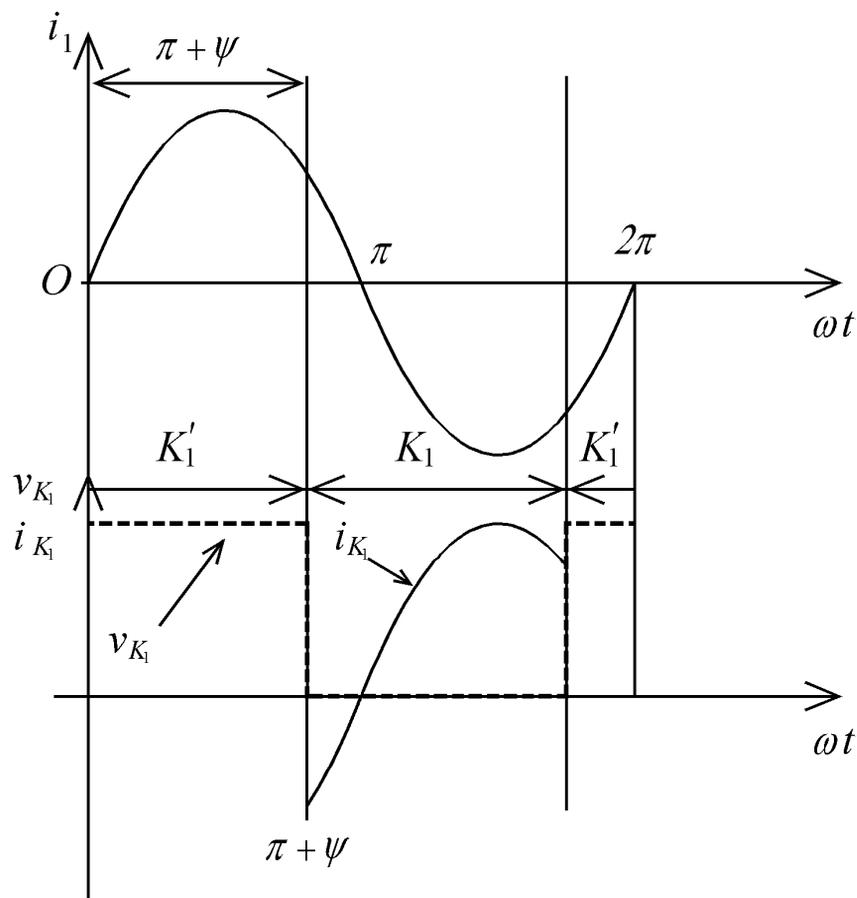


2.5. i_K peut être > 0 ou < 0 , v_K ne peut être que positive.



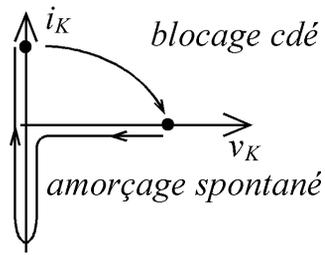
L'amorçage est commandé par le thyristor lorsque v_K est > 0 , le blocage est spontané lorsque le courant cesse d'être négatif.

2.6.

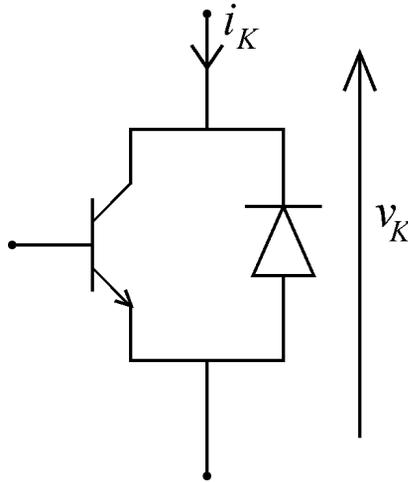


2.7. La commutation d'amorçage permet le passage d'une tension v_K positive à un courant i_K négatif, $v_K i_K$ ne pouvant être que positif ou nul, la commutation s'effectue à courant nul, elle est spontanée. En revanche le blocage permet le passage d'un courant positif à une tension positive. Cette

commutation doit être commandée. Les caractéristiques dynamiques sont les suivantes :



2.8. Au moyen d'un transistor et d'une diode, en «autopilotant» la commande d'amorçage du transistor :

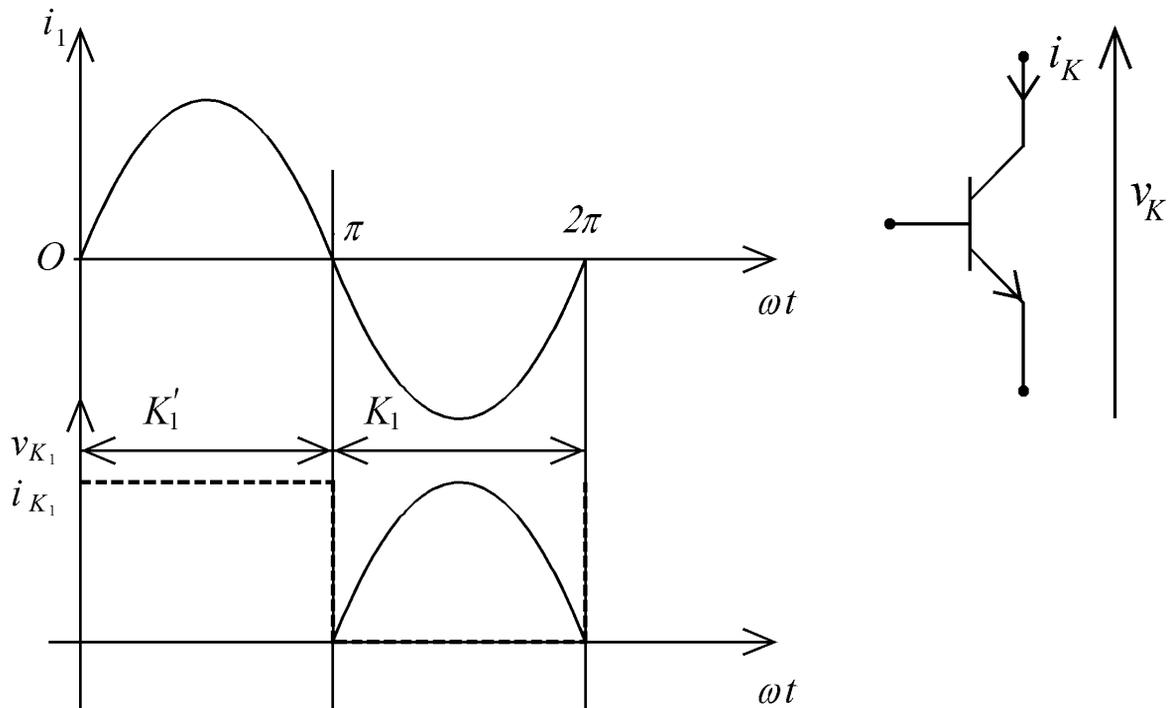


- quand i_K est négatif, la diode conduit, on détecte cette conduction et l'on commande le transistor,
- quand le courant i_K devient > 0 , il peut s'écouler par le transistor.

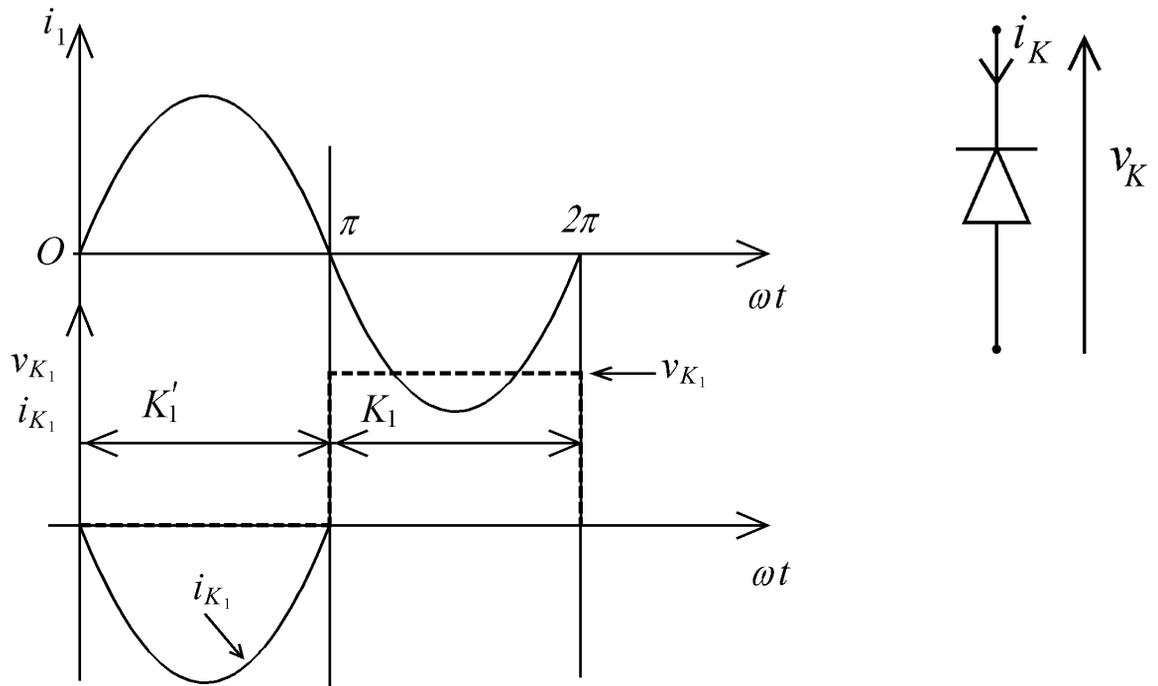
On ouvre l'interrupteur en bloquant le transistor.

C'est le fonctionnement en «thyristor-dual».

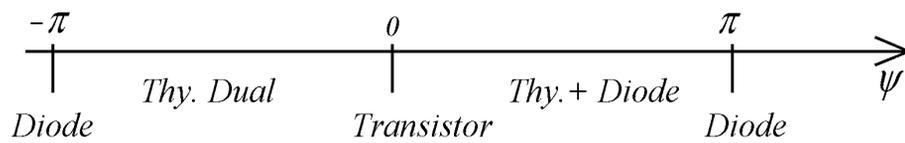
2.9. Le composant doit tenir une tension positive quand il est bloqué et être traversé par un courant > 0 quand il est passant. C'est un transistor commutant au zéro de courant.



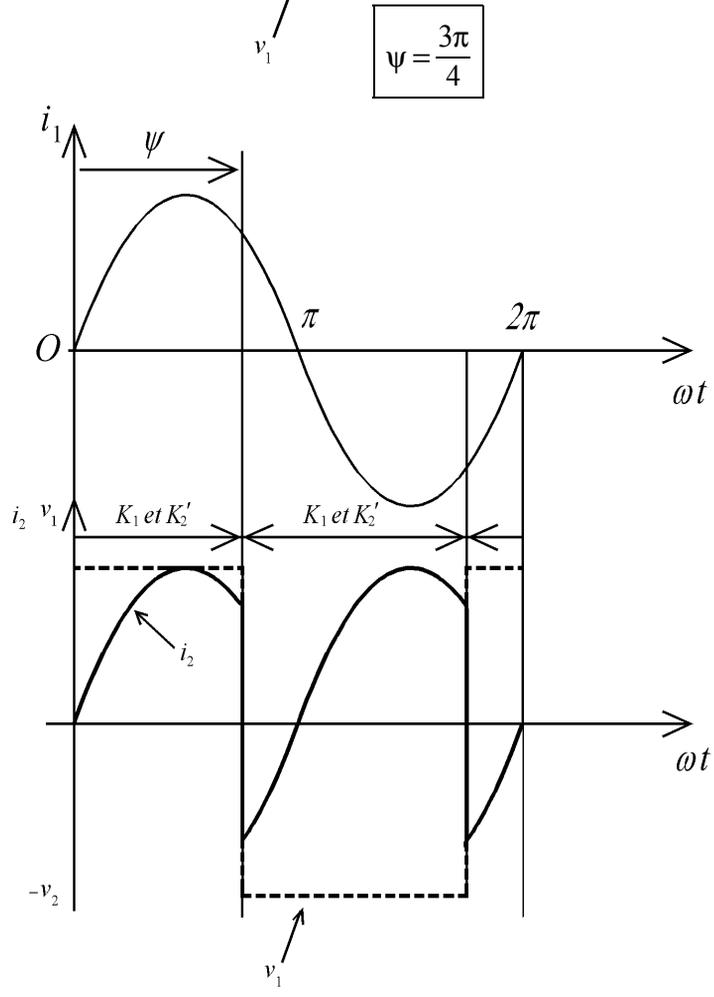
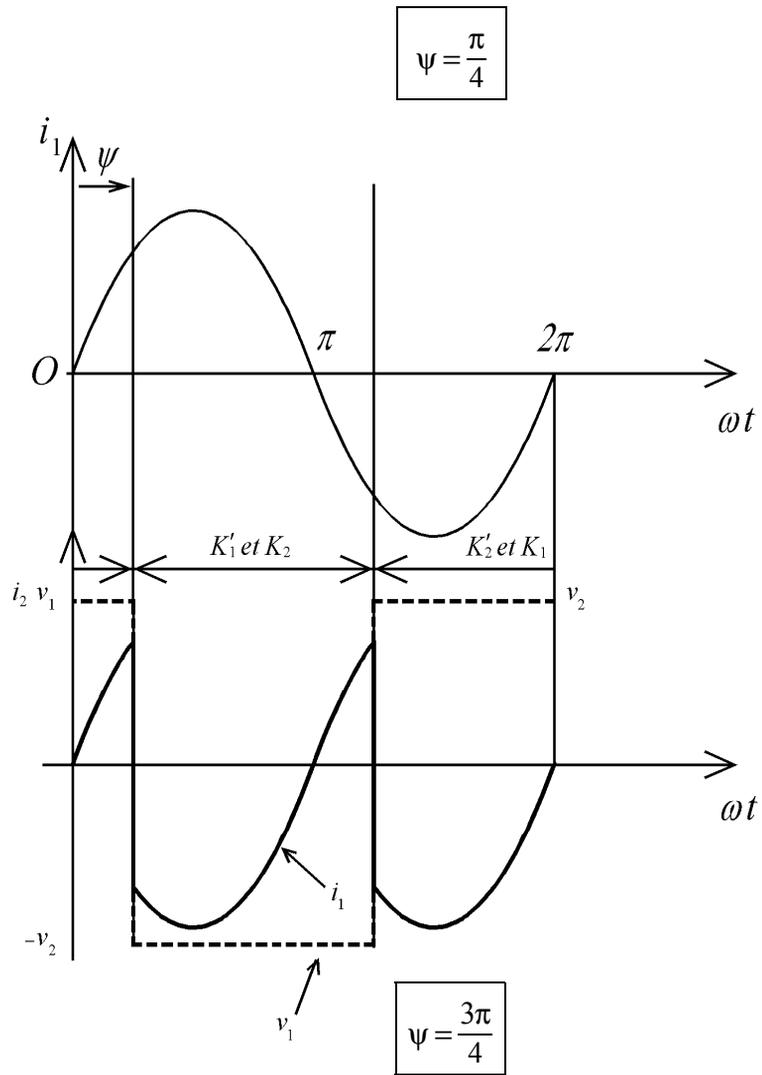
- 2.10. Le composant doit tenir une tension > 0 quand il est bloqué et être traversé par un courant négatif quand il est passant. C'est une diode.



- 2.11.

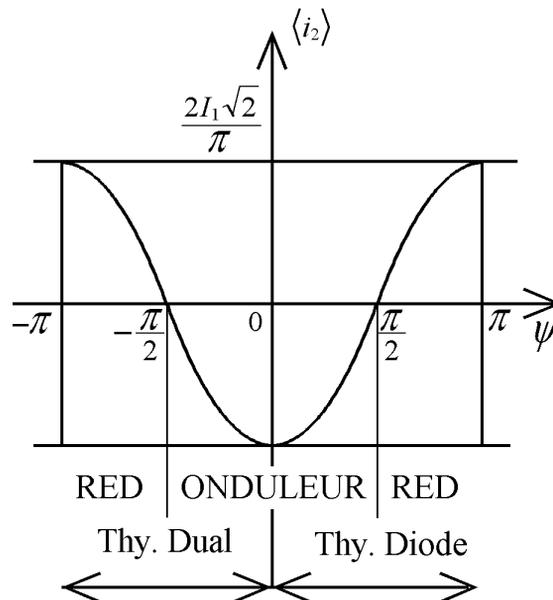


3. 3.1



$$3.2. \quad \langle i_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\pi+\psi} -i_1 d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\pi+\psi} I_1 \sqrt{2} \sin \theta d\theta = \frac{I_1 \sqrt{2}}{\pi} (\cos(\pi+\psi) - \cos \psi)$$

$$\langle i_2 \rangle = -\frac{2 I_1 \sqrt{2}}{\pi} \cos \psi$$



3.3. Pour $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, $\langle i_2 \rangle$ est négatif, la source continue fournit de l'énergie à la source alternative : le fonctionnement du convertisseur est celui d'un onduleur.

Pour $\psi \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, +\pi\right)$, $\langle i_2 \rangle$ est positif, la source continue reçoit de l'énergie de la source alternative : le fonctionnement du convertisseur est celui d'un redresseur de courant.

$$3.4. \quad V_{1f} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_2 \cos \theta d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2$$

$$\phi_1 = \psi + \pi$$

$$3.5. \quad P = V_{1f} I_1 \cos \phi_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \cos \psi = P$$

On peut aussi calculer P de la façon suivante $P = V_2 \langle i_2 \rangle$

$$P = -V_2 \frac{2 I_1 \sqrt{2}}{\pi} \cos \psi$$

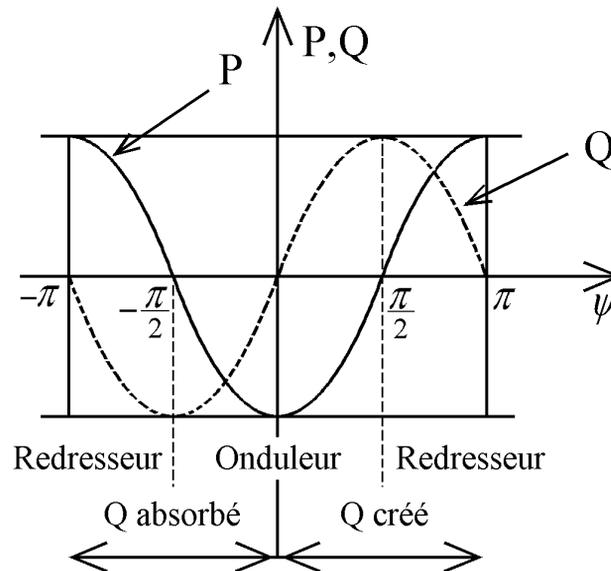
$$Q = -V_{1f} I_1 \sin \varphi_1 = \boxed{+\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin \psi = Q}$$

car φ_1 est le déphasage de la tension par rapport au courant.

On voit que P est positif quand $\cos \varphi < 0$ soit pour $\psi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$. Ce qui correspond au fonctionnement en redresseur.

La source de courant fournit de la puissance réactive pour $Q > 0$ soit $\sin \psi > 0$ ou pour $\psi \in (0, \pi)$.

La puissance réactive est fournie à l'ensemble convertisseur-charge quand on utilise des thyristors (retard), elle est absorbée par la source alternative quand on utilise des thyristors-duaux (avance).



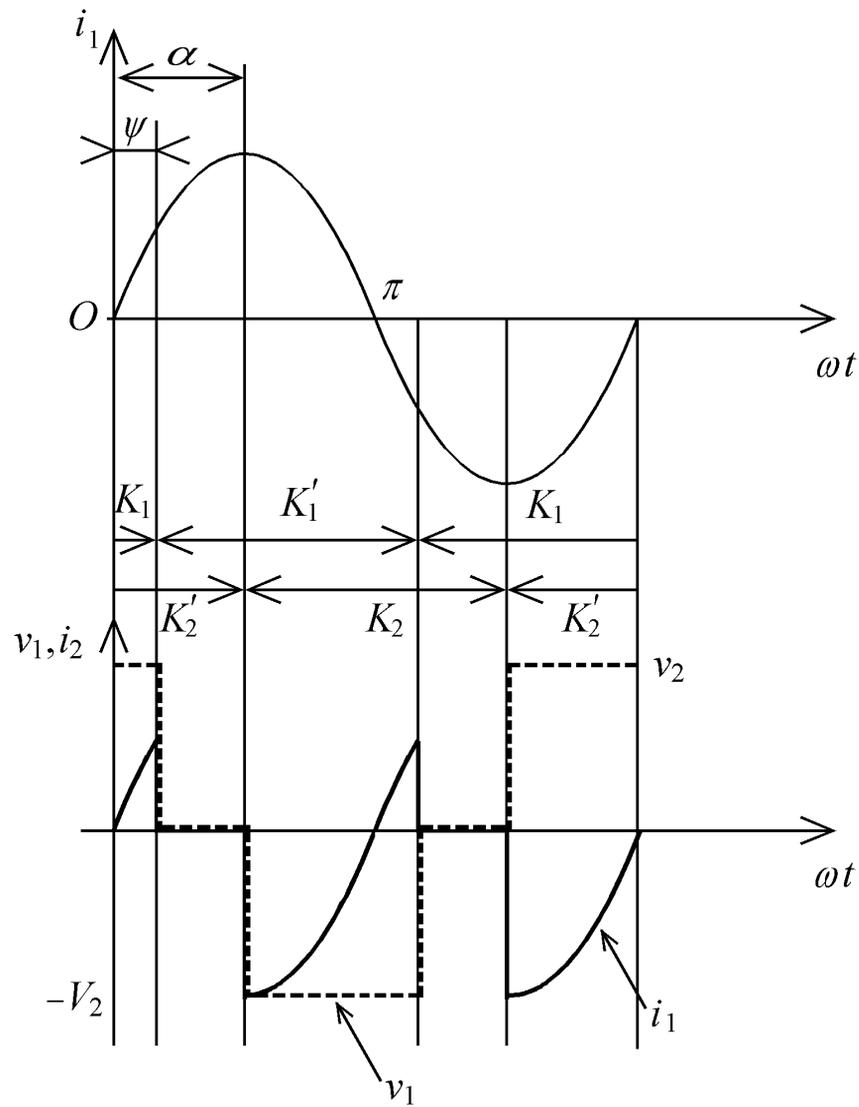
3.6. Le réglage de puissance s'effectue par variation de ψ . Le diagramme précédent résume les échanges d'énergie réactive.

3.7. $F = \frac{P}{S}$ avec $S = V_1 I_1$ V_1 étant la valeur efficace de v_1

$$V_1 = V_2$$

$$F = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 |\cos \psi|}{V_2 I_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} |\cos \psi| = 0,90 |\cos \psi|$$

4. 4.1.



$$4.2. \quad \langle i_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi + \psi} -i_1 \, d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi + \psi} I_1 \sqrt{2} \sin \theta \, d\theta = -\frac{I_1 \sqrt{2}}{\pi} (\cos \alpha - \cos (\pi + \psi))$$

$$\langle i_2 \rangle = -\frac{2 I_1 \sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \psi \right) = \boxed{-\frac{2 I_1 \sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{(\alpha + \psi)}{2} \cos \frac{(\alpha - \psi)}{2} = \langle i_2 \rangle}$$

$$4.3. \quad V_{1f} = \frac{4}{\pi \sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi + \psi - \alpha}{2}} V_2 \cos \theta \, d\theta = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} V_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\psi - \alpha}{2} \right) = \boxed{\frac{2 \sqrt{2}}{\pi} V_2 \cos \frac{(\alpha - \psi)}{2} = V_{1f}}$$

φ_1 = déphasage de v_{1f} par rapport à i_1 $\varphi_1 = \pi + \frac{\alpha - \psi}{2} + \psi$

$$\boxed{\varphi_1 = \pi + \frac{\alpha + \psi}{2}}$$

4.4. φ_1 = déphasage de v_{1f} par rapport à i_1 donc :

$$P = V_{1f} I_1 \cos \varphi_1$$

$$Q = -V_{1f} I_1 \sin \varphi_1$$

$$P = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \cos \frac{(\alpha - \psi)}{2} \cos \frac{(\alpha + \psi)}{2}$$

ou encore

$$P = V_2 \langle i_2 \rangle = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \cos \frac{(\alpha + \psi)}{2} \cos \frac{(\alpha - \psi)}{2} = P$$

$$Q = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \cos \frac{(\alpha - \psi)}{2} \sin \left(\pi + \frac{\psi + \alpha}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{2} V_2 I_1 \cos \frac{(\alpha - \psi)}{2} \sin \frac{(\alpha + \psi)}{2} = Q$$

Remarque : Si $\alpha = \psi$, la commande est symétrique, on obtient :

$$\begin{cases} P = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \cos \psi \\ Q = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin \psi \end{cases}$$

On retrouve les résultats précédents.

4.5.

$$\alpha = -\psi$$

$$\begin{cases} P = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \cos \psi \\ Q = 0 \end{cases}$$

Il est alors possible de régler la puissance active sans consommer ni produire d'énergie réactive.

4.6.

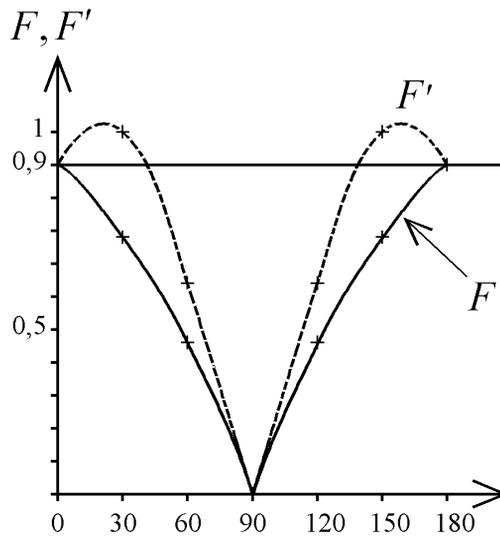
$$F = \frac{P}{S} \quad \text{avec} \quad S = V_1 I_1 \quad V_1 \text{ étant la valeur efficace de } v_1.$$

$$\text{La durée du créneau de tension est } \pi - |2\psi| \text{ donc } V_1^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi - |2\psi|} V_2^2 d\theta$$

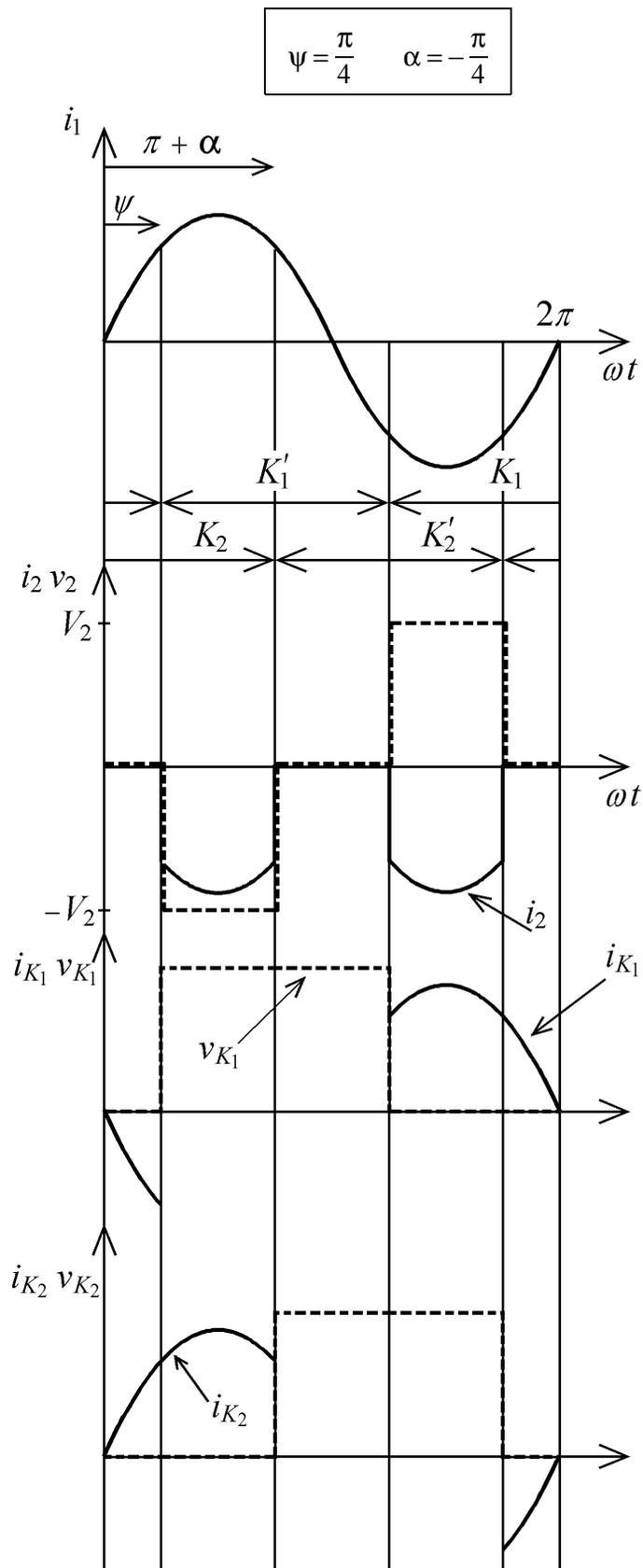
$$V_1 = V_2 \sqrt{\left| \frac{\pi - |2\psi|}{\pi} \right|} = V_2 \sqrt{\left| 1 - \frac{|2\psi|}{\pi} \right|}$$

$$F' = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 |\cos \psi|}{V_2 I_1 \sqrt{\left| 1 - \frac{|2\psi|}{\pi} \right|}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} |\cos \psi|}{\sqrt{\left| 1 - \frac{|2\psi|}{\pi} \right|}} = F \frac{1}{\sqrt{\left| 1 - \frac{|2\psi|}{\pi} \right|}} = F'$$

ψ°	0	30	60	90	120	150	180
F	0,90	0,779	0,45	0	0,45	0,779	0,90
F'	0,90	0,955	0,636	0	0,636	0,955	0,90



4.7.

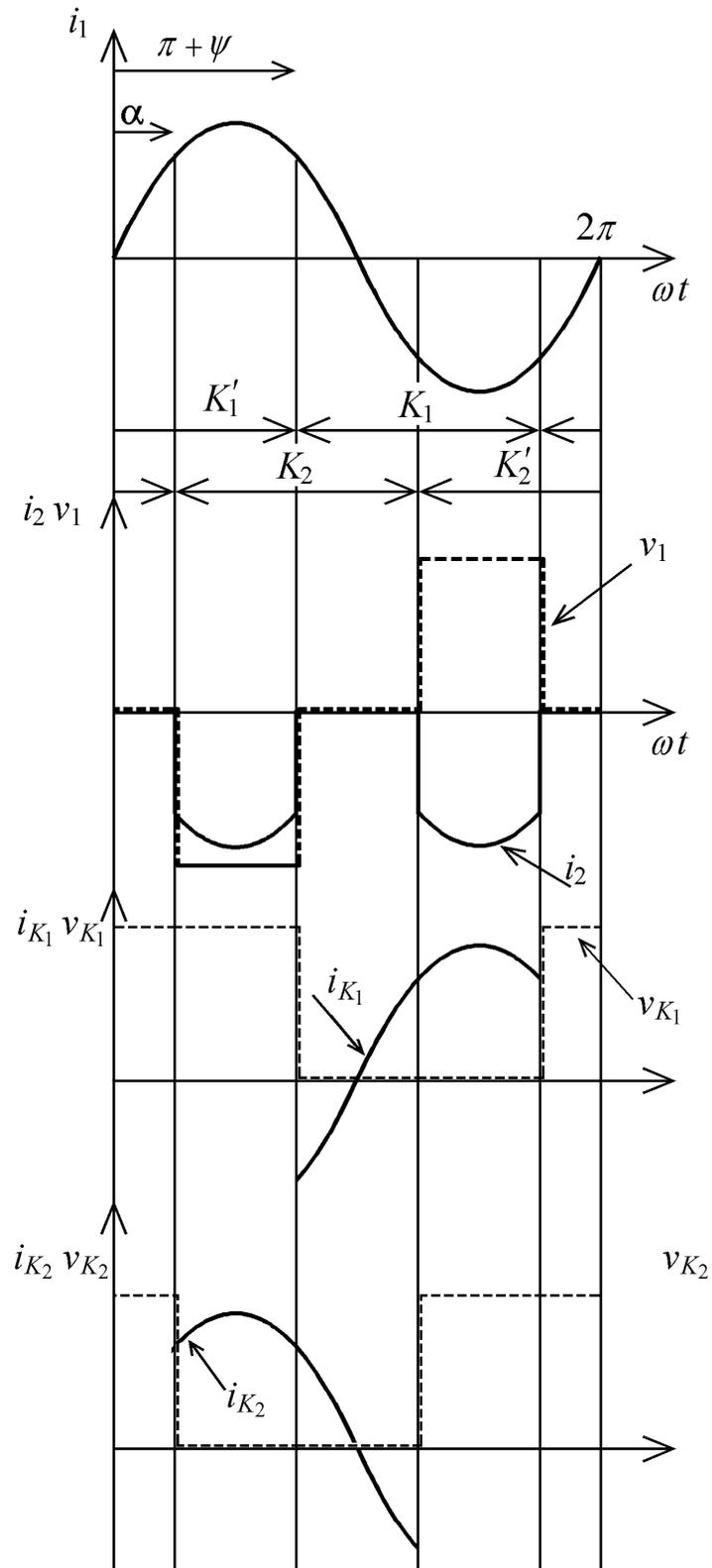


La cellule de commutation $K_1 - K_1'$ est à amorçage commandé et blocage spontané.
Les composants sont des «thyristors-diodes».

La cellule de commutation $K_2 - K_2'$ est à blocage commandé et amorçage spontané.
Les composants sont des «thyristors-duaux».

4.8.

$$\psi = -\frac{\pi}{4} \quad \alpha = +\frac{\pi}{4}$$



On obtient les mêmes résultats qu'au § 4.7. en ce qui concerne i_2 et v_1 .

Les cellules de commutation K_1 K_1' et K_2 K_2' sont inversées par rapport au § 4.7.

En utilisant des cellules à mécanisme de commutation duaux, l'énergie réactive créée par les thyristors-duaux est absorbée par les thyristors-diodes et l'on fonctionne à $\cos \varphi = 1$.

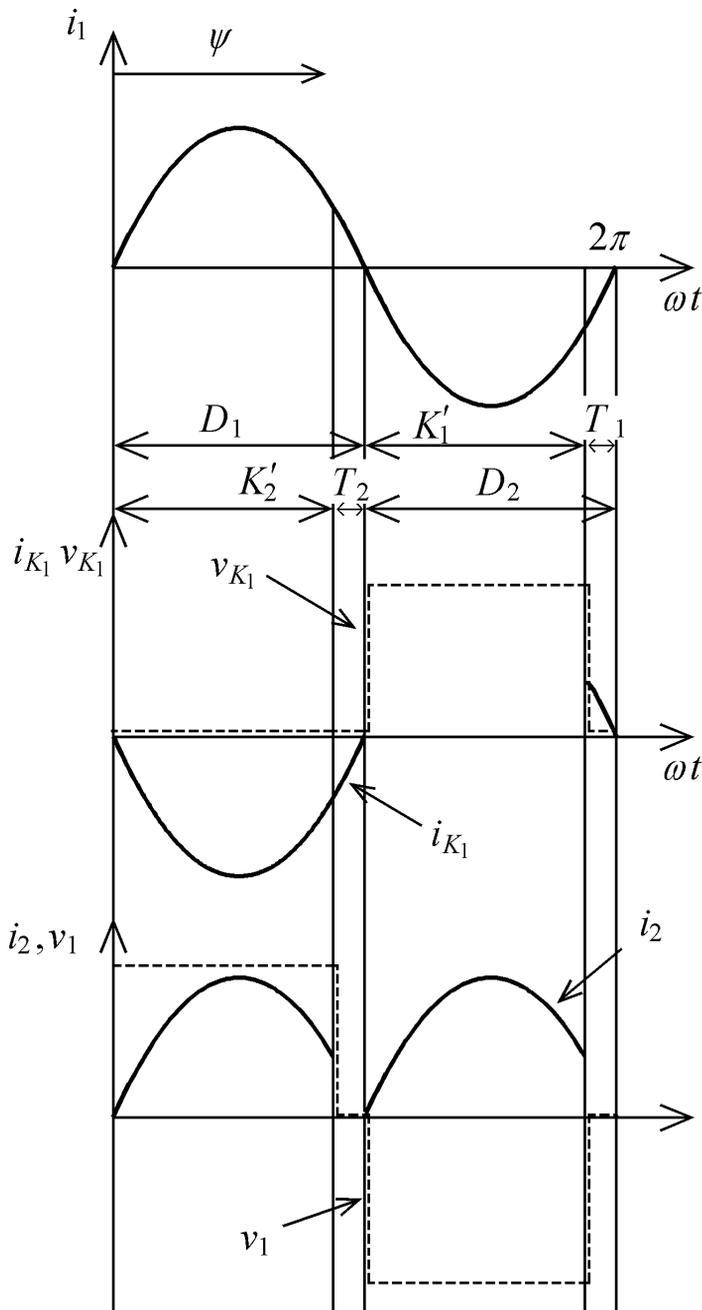
DEUXIÈME PARTIE

Étude d'un convertisseur direct à structure asymétrique

1. K_1 et K'_1 , K_2 et K'_2 sont complémentaires (cf. première partie) :
 - Quand K_1 est fermé $i_{K_1} = -i_1$ i_1 étant alternatif i_{K_1} l'est aussi et K_1 est bidirectionnel en courant.
 - Quand K_2 est fermé $i_{K_2} = +i_1$ ce qui conduit aux mêmes conclusions.
 - Quand K_1 et K_2 sont bloqués $v_{K_1} = +V_2$, $v_{K_2} = +V_2$. Ces interrupteurs sont unidirectionnels en tension.
 - Quand $i_1 > 0$, K_1 doit être nécessairement fermé puisque la diode K'_1 ne peut pas conduire. De même quand i_1 est négatif K_2 doit être fermé puisque la diode K'_2 est bloquée.

K_1 et K_2 doivent donc conduire au moins une demi-période.

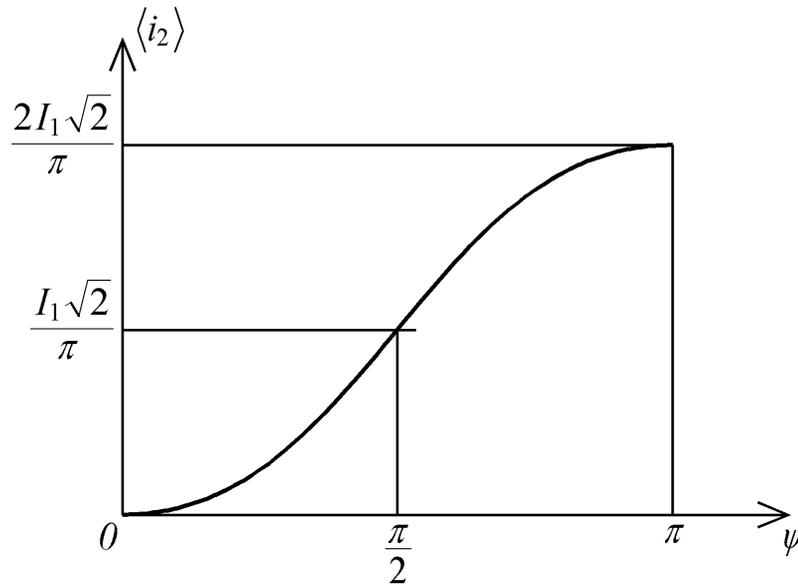
2. 2.1.



2.2.

2.3.

$$\langle i_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Psi} I_1 \sqrt{2} \sin \theta \, d\theta = \frac{I_1 \sqrt{2}}{\pi} (1 - \cos \Psi) = \langle i_2 \rangle$$



2.4. $\langle i_2 \rangle$ est toujours positif, la source de tension absorbe toujours du courant. La puissance fournie par la source de courant est $V_2 \langle i_2 \rangle > 0$. Le montage n'est pas réversible, c'est un redresseur de courant mixte.

2.5.

$$V_{1f} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\Psi}{2}} V_2 \cos \theta \, d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 \sin \frac{\Psi}{2} = V_{1f}$$

φ_1 déphasage de V_{1f} par rapport à i_1 : $\frac{\Psi - \pi}{2}$ en avance sur le courant i .

2.6.

$$P = V_{1f} I_1 \cos \varphi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin \frac{\Psi}{2} \cos \left(\frac{\Psi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin^2 \frac{\Psi}{2} = P$$

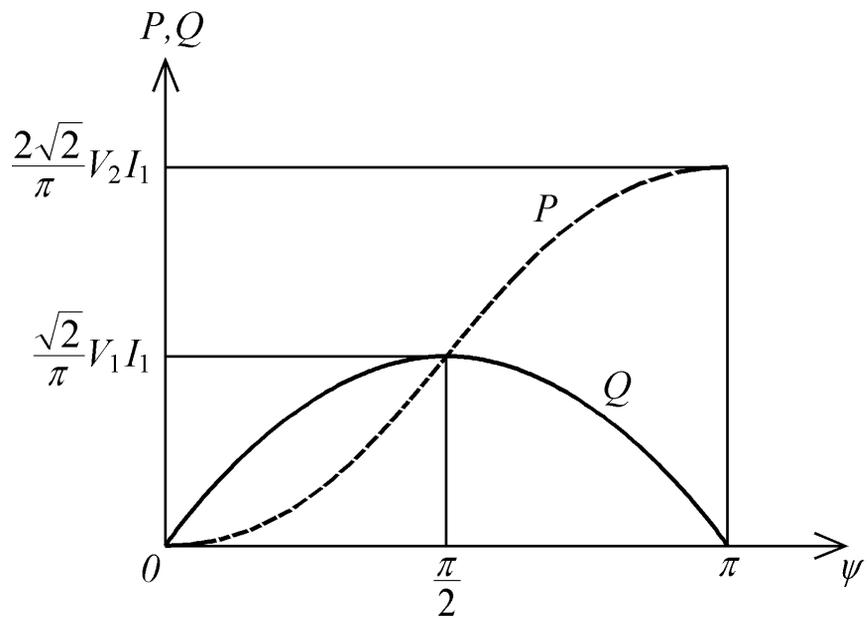
ou encore

$$P = V_2 \langle i_2 \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin^2 \frac{\Psi}{2}$$

$$Q = -V_{1f} I_1 \sin \varphi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 \sin \frac{\Psi}{2} I_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \Psi \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin \frac{\Psi}{2} \cos \frac{\Psi}{2}$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin \Psi$$

La consommation d'énergie réactive maximum est plus faible qu'avec un montage symétrique.

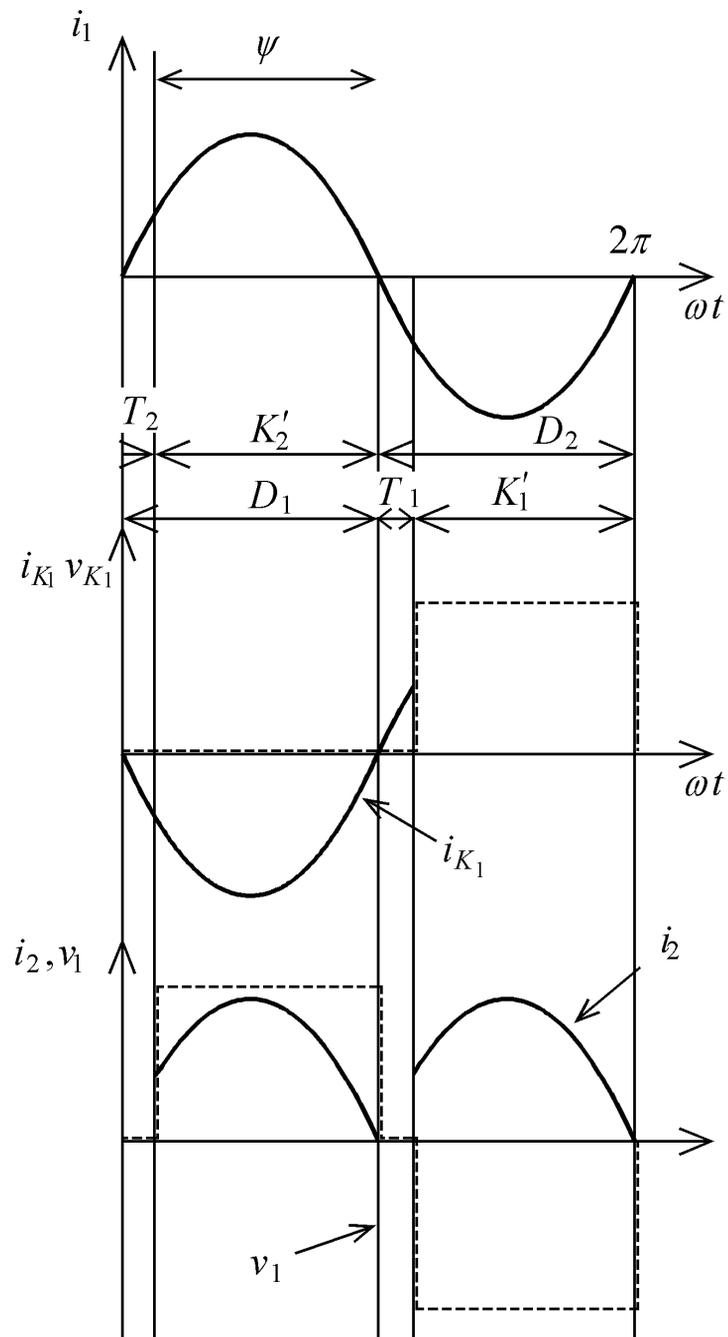


2.7.

$$V_1^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\Psi V_2^2 d\theta = V_2^2 \frac{\Psi}{\pi} \qquad V_1 = V_2 \sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}$$

$$F = \frac{P}{S} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin^2 \frac{\Psi}{2}}{V_2 \sqrt{\frac{\Psi}{\pi}} \cdot I_1} \qquad F = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\Psi}} \sin^2 \frac{\Psi}{2}$$

3. 3.1.



3.2.

$$\langle i_2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \psi}^{\pi} i_1 d\theta$$

$$\langle i_2 \rangle = \frac{I_1 \sqrt{2}}{\pi} (1 - \cos \psi)$$

$$\langle i_2 \rangle = \frac{2 I_1 \sqrt{2}}{\pi} \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

$$V_{1f} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\Psi}{2}} V_2 \cos \theta \, d\theta$$

$$V_{1f} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 \sin \frac{\Psi}{2}$$

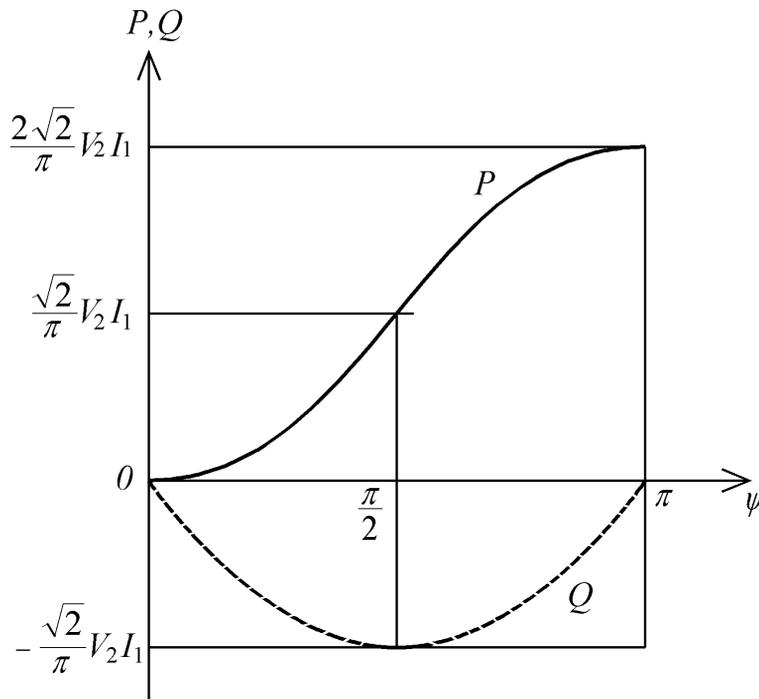
$$\phi_1 = \frac{\pi - \Psi}{2}$$

v_{1f} en retard de ϕ_1 par rapport à i_1 .

$$3.3. \quad P = V_{1f} I_1 \cos \phi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin \frac{\Psi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Psi}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin^2 \frac{\Psi}{2} = P$$

$$P = V_2 \langle i_2 \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin^2 \frac{\Psi}{2}$$

$$Q = -V_{1f} I_1 \sin \phi_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin \frac{\Psi}{2} I_1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Psi}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin \Psi = Q$$



$$3.4. \quad F = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_1 I_1} \quad \text{avec} \quad V_1^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Psi} V_2^2 \, d\theta = V_2^2 \frac{\Psi}{\pi}$$

$$F = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sin^2 \frac{\Psi}{2}}{V_2 I_1 \sqrt{\frac{\Psi}{\pi}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_2 I_1 \sqrt{\frac{\pi}{\Psi}} \sin^2 \frac{\Psi}{2} = F$$

On obtient la même valeur du facteur de puissance avec des thyristors-diodes ou des thyristors-duaux pour le même réglage de puissance. Seul le signe de la puissance réactive change.

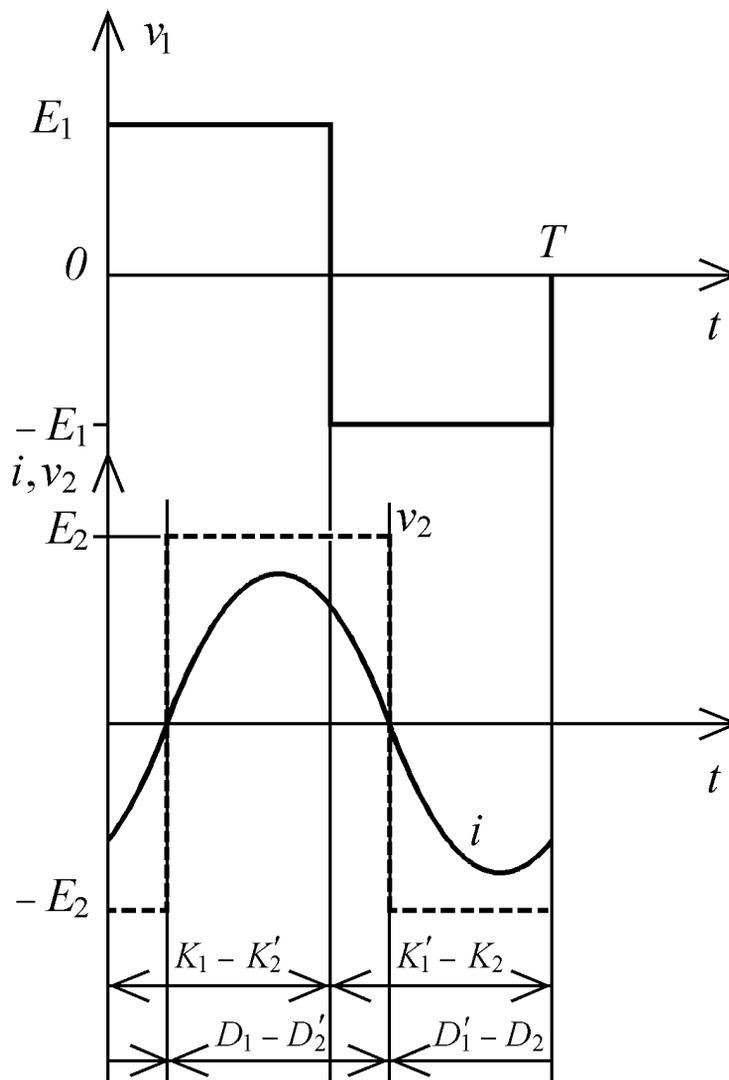
TROISIÈME PARTIE

Étude d'un convertisseur à résonance

1. Le convertisseur asymétrique est un redresseur de courant non réversible, d'ailleurs sa charge est passive. Le convertisseur symétrique doit lui fournir de la puissance, il fonctionne donc nécessairement en onduleur.
2. 2.1. Le courant i est alternatif de valeur moyenne nulle car le convertisseur symétrique impose la symétrie du courant. Il est périodique de période T . Sa valeur à l'instant $t = \frac{T}{2}$ est égale au signe près, à sa valeur à l'instant $t = 0$.

Quand le courant i est positif : D_1 et D_2' conduisent et $v_2 = E_2$.

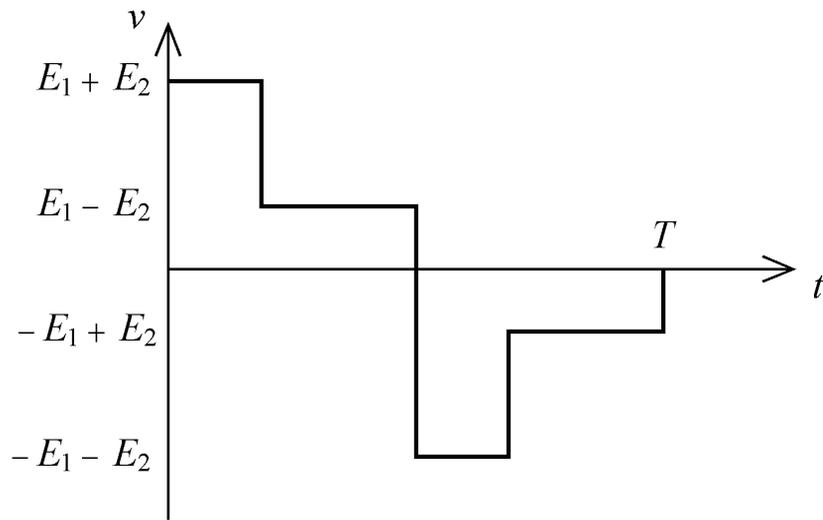
Quand le courant i est négatif : D_1' et D_2 conduisent et $v_2 = -E_2$.



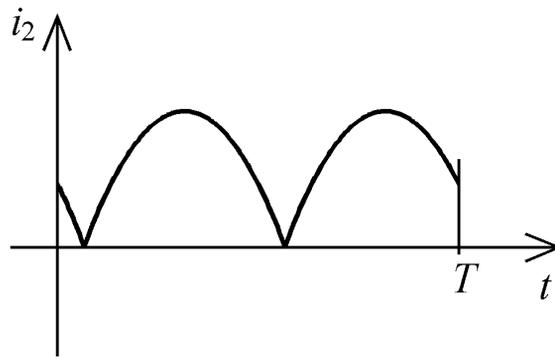
2.2.

$$v = v_1 - v_2$$

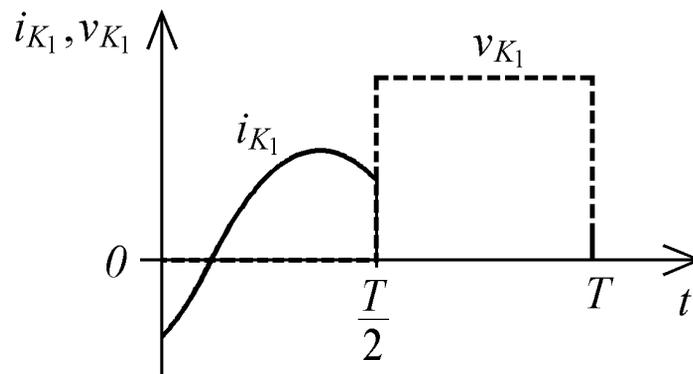
Cette tension prend quatre valeurs : $E_1 + E_2$, $E_1 - E_2$, $-E_1 - E_2$, $-E_1 + E_2$.



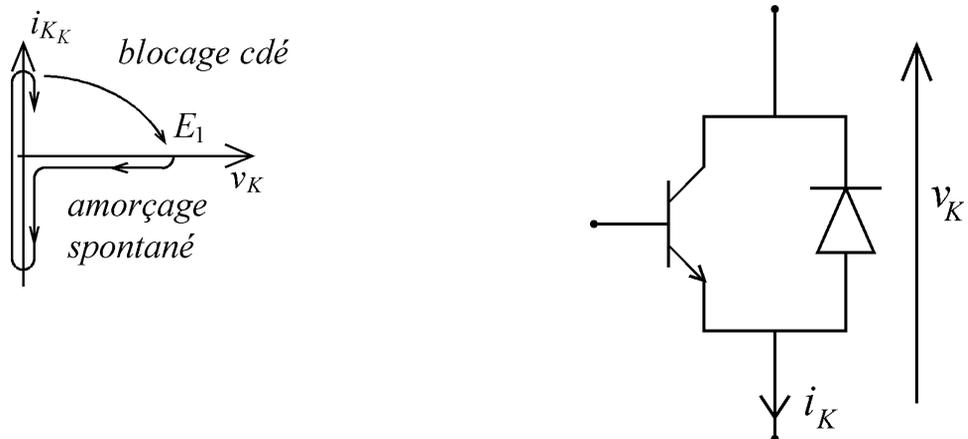
2.3.



2.4.



2.5. Les composants sont à blocage commandé et amorçage spontané. Ils peuvent être synthétisés par des transistors et des diodes montés en thyristor-dual.



2.6. Le seul réglage possible consiste à faire varier la fréquence. Si la fréquence croît le courant i_2 diminue ainsi que la tension E_2 . On voit que pour annuler le transfert de puissance, il faudrait théoriquement une fréquence infinie.

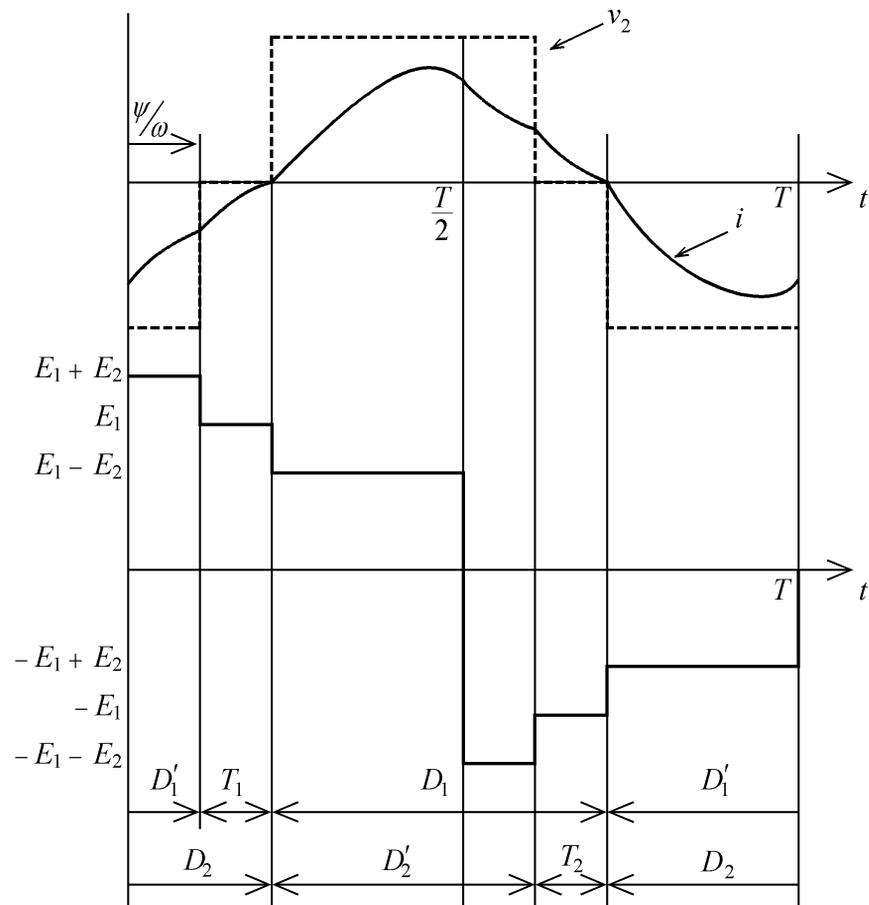
3. 3.1. La tension v_1 prend deux valeurs E_1 et $-E_1$.

La tension v_2 prend trois valeurs E_2 , $-E_2$, 0 .

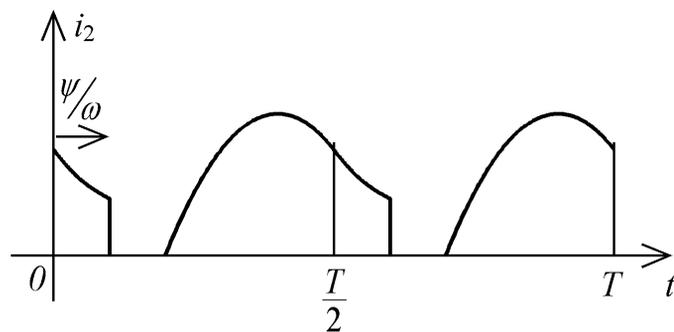
La tension $v = v_1 - v_2$ peut donc prendre six valeurs :

$$E_1 + E_2, \quad E_1 - E_2, \quad E_1, \quad -E_1, \quad -E_1 + E_2, \quad -E_1 - E_2$$

3.2.

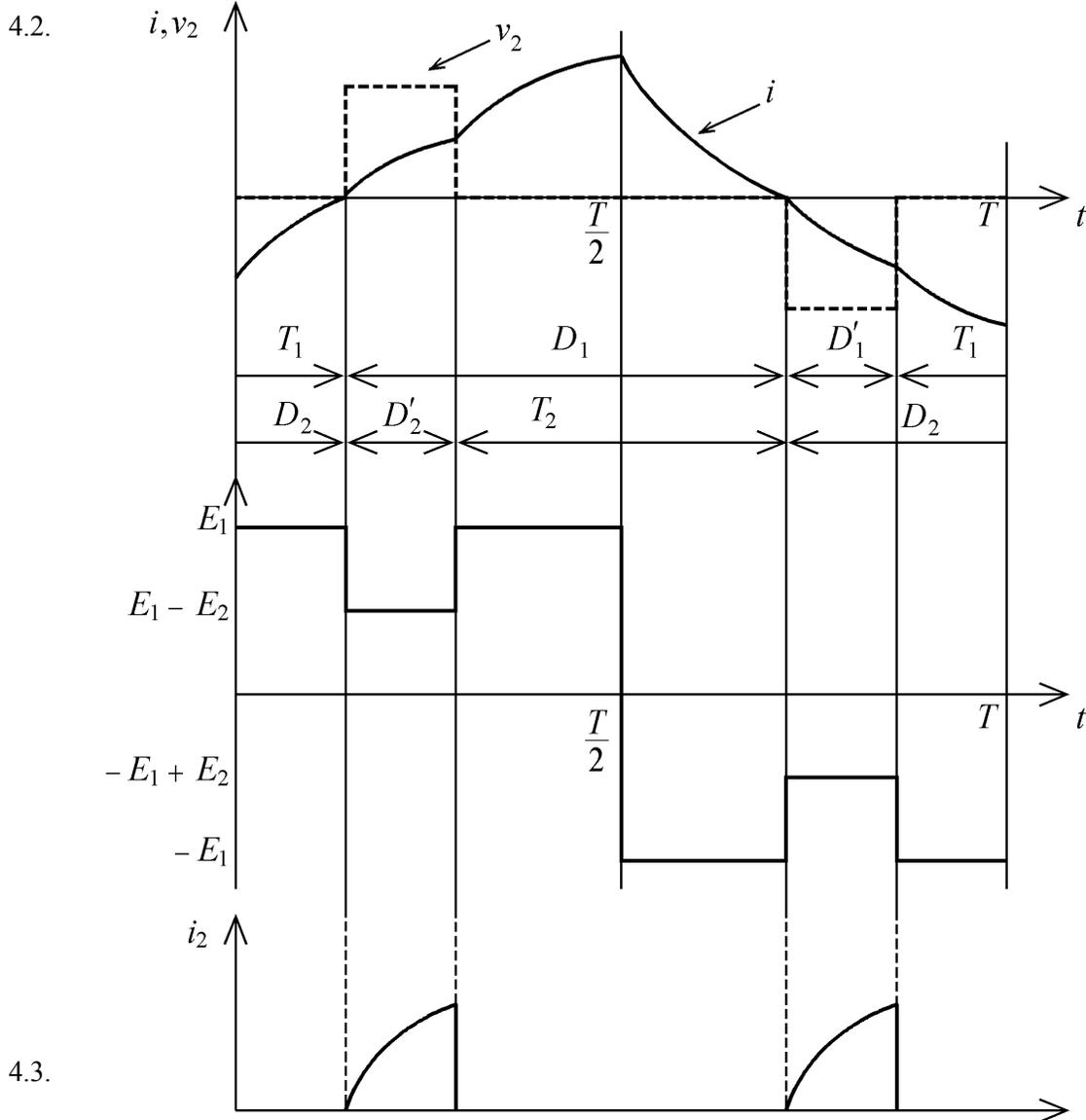


3.3.



4. 4.1. v_1 peut prendre deux valeurs E_1 et $-E_1$, v_2 peut prendre trois valeurs E_2 , $-E_2$, 0 . Mais la valeur E_2 n'est plus obtenue pendant l'intervalle $(0, \pi)$ pendant laquelle la tension v_1 vaut E_1 . D'où les quatre valeurs possibles de v :

$$E_1, E_1 - E_2, -E_1 + E_2, -E_1$$



- 4.4. On peut régler la puissance par action sur l'angle d'amorçage ψ à fréquence fixe. Il n'y a avec ce convertisseur plus de difficulté théorique à obtenir un courant de charge i_2 nul.

Agrégation

(Concours Interne)

SECTION : SCIENCES PHYSIQUES

Composition avec exercices d'application - Session : 1995

Option : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

DEUXIÈME PROBLÈME

PREMIÈRE PARTIE

I-1-1

-a. $v_1 = v_{BE1} - v_{BE2}$
 $i_{C1} + i_{C2} = I_0$

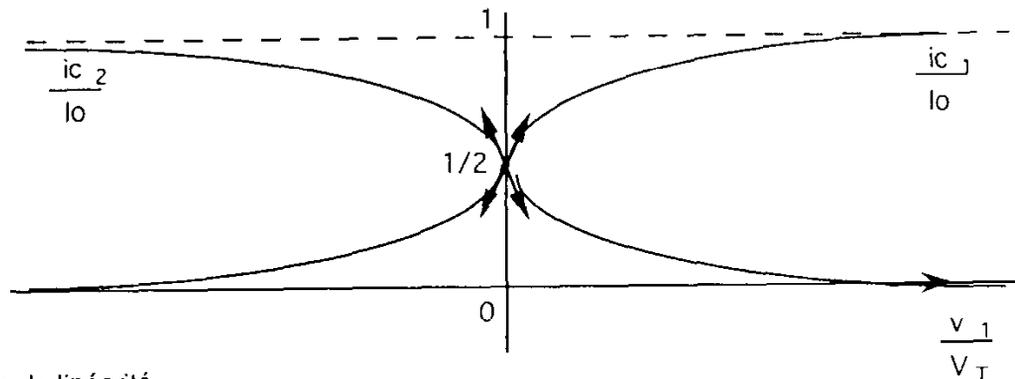
-b. $i_{C1} = I_{S1} \exp \frac{v_{BE1}}{V_T}$ $i_{C2} = I_{S2} \exp \frac{v_{BE2}}{V_T}$

$I_{S1} = I_{S2} = I_S$ dans les mêmes conditions

$$I_{S1} \exp \frac{v_{BE1}}{V_T} + I_{S2} \exp \frac{v_{BE2}}{V_T} = I_0$$

$$i_{C1} = \frac{I_0}{1 + \exp \frac{v_1}{V_T}} = \frac{I_0}{2} \left(1 + \operatorname{th} \frac{v_1}{2V_T} \right) \quad i_{C2} = \frac{I_0}{1 + \exp \frac{v_1}{V_T}} = \frac{I_0}{2} \left(1 - \operatorname{th} \frac{v_1}{2V_T} \right)$$

-c.



-d. Zone de linéarité

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots \approx x \quad \text{à 10\% près si } \frac{x^3}{3} < \frac{x}{10} \quad x < 0,55$$

$$\operatorname{th} \frac{v_1}{2V_T} \approx \frac{v_1}{2V_T} \quad \text{si } \frac{v_1}{2V_T} < 0,55 \quad v_1 < 0,55 \cdot 2 \cdot 25 \text{ mV} = 27 \text{ mV}$$

-e. $i_{C1} - i_{C2} = I_0 \frac{\exp \frac{v_1}{2V_T} - \exp - \frac{v_1}{2V_T}}{\exp \frac{v_1}{2V_T} + \exp - \frac{v_1}{2V_T}} = I_0 \operatorname{th} \frac{v_1}{2V_T}$

I-1-2

$$\text{-a. } i_{c3} - i_{c4} = i_{c1} \operatorname{th} \frac{v_2}{2V_T} \quad i_{c6} - i_{c5} = i_{c2} \operatorname{th} \frac{v_2}{2V_T}$$

$$\text{-b. } v_s = -R_c (i_{c6} + i_{c4}) + R_c (i_{c3} + i_{c5})$$

$$= R_c [i_{c1} - i_{c2}] \operatorname{th} \frac{v_2}{2V_T}$$

$$= R_c I_0 \operatorname{th} \frac{v_1}{2V_T} \cdot \operatorname{th} \frac{v_2}{2V_T}$$

I-1-3

$$\text{-a. } v_1 \text{ et } v_2 \text{ petits signaux } \operatorname{th} x \simeq x$$

$$v_s = \frac{R_c I_0}{4V_T^2} v_1 \cdot v_2$$

$$\text{-b. } v_1 = V_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad v_2 = V_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$v_s = \frac{R_c I_0}{4V_T^2} V_1 V_2 [\sin(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)]$$

$$v_s = \frac{R_c I_0 V_1 V_2}{8V_T^2} [\sin[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2] + \sin[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2]]$$

Les pulsations contenues dans le spectre sont:

$$\cdot \omega_1 + \omega_2 + \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt}$$

$$\cdot \omega_1 - \omega_2 + \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt}$$

$$\text{-c. } \text{PLL verrouillée } \omega_1 = \omega_2$$

$\omega_c = \omega_{\text{coupure}}$ du filtre passe bas

$$\omega_c \ll 2\omega_1 + \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt}$$

il ne reste que la pulsation $\frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt}$

$$v_s = \frac{R_c I_0 V_1 V_2}{8V_T^2} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$\varphi_1 - \varphi_2$ assez petit pour que $\sin x \simeq x$

DL au 1^{er} ordre

$$v_s = K_d (\varphi_1 - \varphi_2) \quad K_d = \frac{R_c I_0 V_1 V_2}{8V_T^2}$$

$$\text{-d. } \text{th } x \simeq x \quad \frac{v_1}{2V_T} < 0,55$$

$$V_T \sim 25 \text{ mv} \quad V_1 < 27 \text{ mv} \quad V_2 < 27 \text{ mv}$$

$$K_d = \frac{6 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^2} V_1 V_2 = 600 \cdot V_1 V_2$$

I-1-4

-a. Dans cette approximation

$$\text{th } \frac{v_1}{2V_T} \simeq \frac{v_1}{2V_T}$$

$$\text{th } \frac{v_2}{2V_T} = \pm 1 \text{ suivant le signe de } v_2$$

$$+1 \quad v_2 > 0$$

$$-1 \quad v_2 < 0$$

$$v_s = \pm \frac{R_{clo}}{2V_T} v_1 \quad (\text{voir figure})$$

$$\text{après le filtre passe bas} \quad \frac{R_{clo}}{2V_T} v_1 = V_{\max}$$

$$v_F = \frac{2V_{\max}}{T_1} \left[\int_0^{t_1} -\sin(\omega_1 t + \varphi_1) dt + \int_{t_1}^{T_1/2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) dt \right]$$

$$\frac{2V_{\max}}{T_1 \omega_1} \left[(\cos \omega_1 t + \varphi_1) \Big|_0^{t_1} - (\cos \omega_1 t + \varphi_1) \Big|_{t_1}^{T_1/2} \right]$$

$$\frac{2V_{\max}}{T_1 \omega_1} [2 \cos(\omega_1 t_1 + \varphi_1)]$$

$$\omega_1 t_1 + \varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_2 = \phi$$

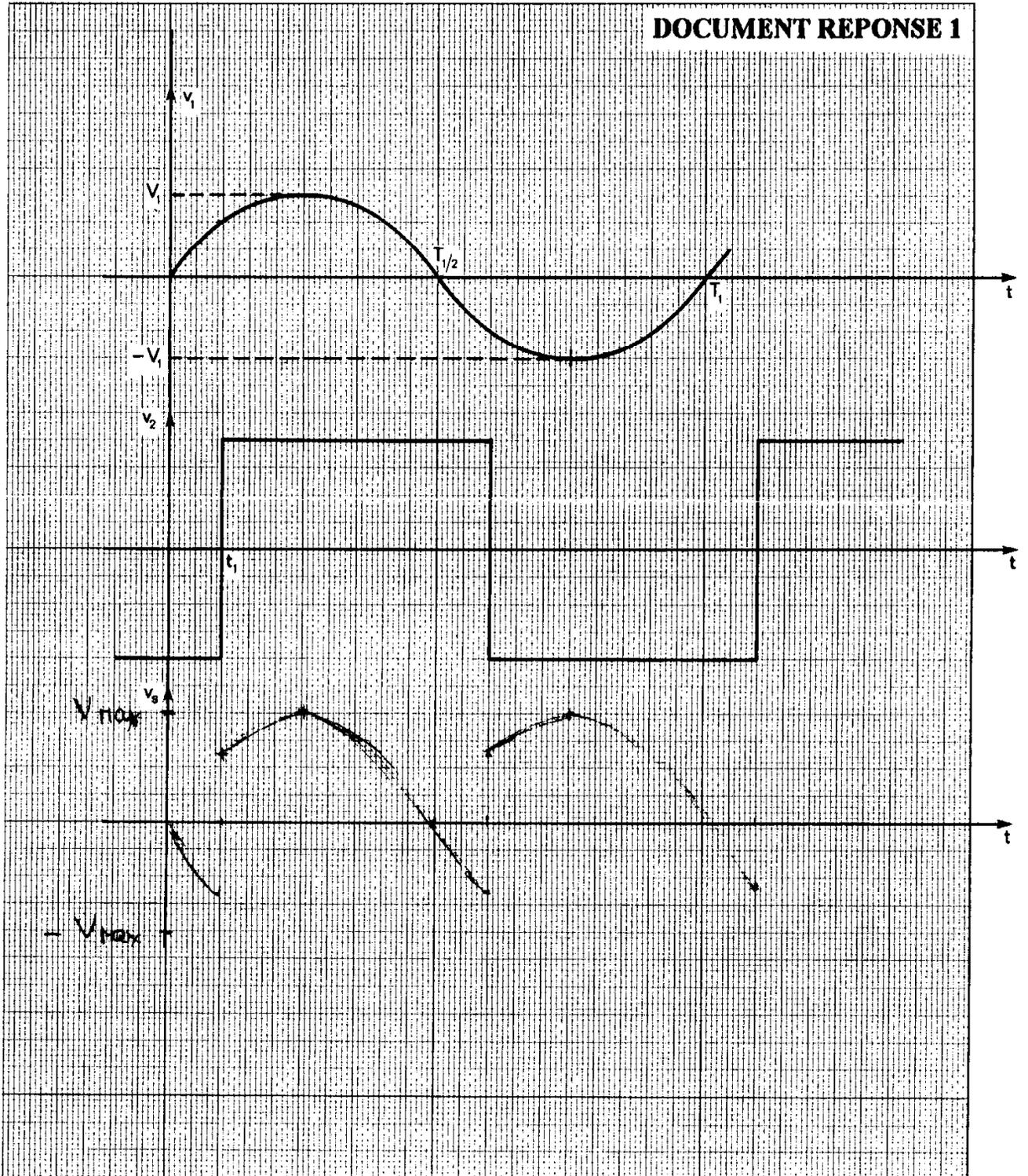
$$v_F = \frac{2V_m}{\pi} \cos \phi = \frac{R_{clo} V_1}{\pi V_T} \cos \phi$$

c. Autour de $\phi_0 = \pi/2$

$$K_d = \frac{R_{clo} V_1}{\pi V_T}$$

$$\text{d. } K_d = \frac{120}{\pi} V_1$$

DOCUMENT REPONSE 1



I-2-1

-a. $t = 0$ C déchargé $v_A - v_B = 0$

T_{10} bloqué T_{11} passant T_{12} passant

R_1 $i_{b12} \ll V_D \Rightarrow D_1$ bloquée

D_2 passante

$$v_B = V_{CC} - R_1 i_{b12} - V_{BE12} - V_{BE11}$$

$$v_B \simeq V_{CC} - 2V_{BE} = \text{constante}$$

$$-C \frac{d(v_A - v_B)}{dt} = I_1$$

$$v_A - v_B = -\frac{I_1 t}{C} + K \text{ avec } K = 0$$

$$v_A = V_{CC} - 2V_{BE} - \frac{I_1}{C} t$$

le basculement a lieu quant T_{10} devient passant, c'est-à-dire quand :

$$\begin{aligned} v_A &= V_{CC} - V_{D2} - V_{BE13} - V_{BE10} \\ &= V_{CC} - 3V_{BE} \end{aligned}$$

$$V_{CC} - 3V_{BE} = V_{CC} - 2V_{BE} - I_1 \frac{t_1}{C}$$

$$t_1 = \frac{CV_{BE}}{I_1}$$

-b. Après le basculement

T_{10} passant D_1 passante

$$V_{BE11} = V_{CC} - V_{D1} - V_{BE12} - V_B = V_{CC} - 2V_{BE} - V_B = 0$$

$\Rightarrow T_{11}$ se bloque $\rightarrow D_2$ se bloque

$$v_A \text{ passe à } V_{CC} - R_2 I_{B13} - V_{BE13} - V_{BE10} = V_{CC} - 2V_{BE}$$

Avant basculement	D_1 bloquée	$V_M = V_{CC} - V_{BE12}$
	T_{12} passant	$V_M = V_{CC} - V_{BE}$

Après basculement	D_1 passante	$V_M = V_{CC} - 2V_{BE}$
-------------------	----------------	--------------------------

Avant basculement	D_2 passante	$V_N = V_{CC} - 2V_{BE}$
	T_{13} passant	

Après basculement	D_2 bloquée	$V_N = V_{CC} - V_{BE}$
-------------------	---------------	-------------------------

-c. $t = t_1 \quad v_A - v_B = -V_{BE}$

Avant basculement $\left\{ \begin{array}{l} v_B = V_{CC} - 2V_{BE} \\ v_A = V_{CC} - 3V_{BE} \end{array} \right.$

Après basculement $\left\{ \begin{array}{l} v_A - v_B = -V_{BE} \\ v_A = V_{CC} - 2V_{BE} \\ v_B = V_{CC} - V_{BE} \end{array} \right.$

v_A reste constant. C est chargé par l'autre courant I_1

$$C \frac{d(v_A - v_B)}{dt} = I_1$$

$$v_A - v_B = \frac{I_1}{C} (t - t_1) + cst \quad : \text{ changement de l'origine des temps, on prend } t_1 \text{ comme nouvelle origine}$$

avec $cst = -V_{BE}$

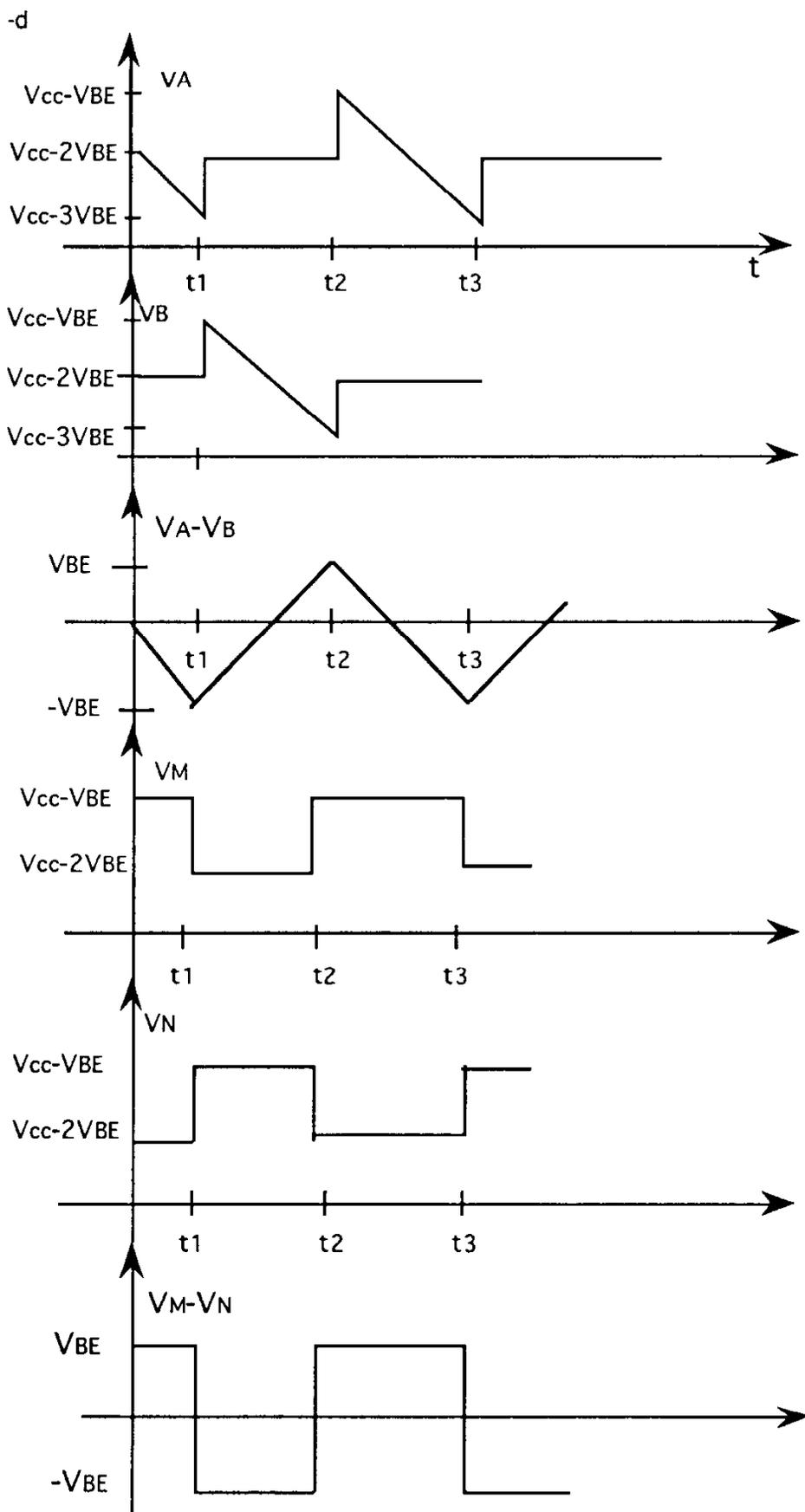
v_B passe de $V_{CC} - V_{BE}$ à $V_{CC} - 3V_{BE}$

v_A reste à $V_{CC} - 2V_{BE}$

$v_A - v_B$ passe de $-V_{BE}$ à $+V_{BE}$ à $t = t_2$

$$t_2 - t_1 = \frac{2 V_{BE}}{I_1} \cdot C = \frac{T}{2} = t_3 - t_2$$

$$\Rightarrow T = 4 \frac{V_{BE} C}{I_1}$$



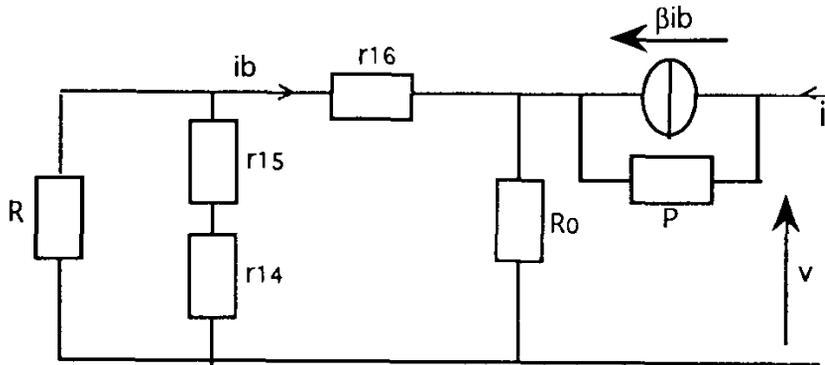
I-2-2

-a. $V_{BE14} + V_{BE15} = V_{BE16} + R_{olo}$

$$R_{olo} = V_{BE}$$

$$I_o = \frac{0,6}{1,2 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

-b.



$$R_{\text{sortie}} = \frac{v}{i}$$

$$v = R_o (i_b + i) + \rho (i - \beta i_b)$$

$$R_{\text{eq}} = R // (r_{15} + r_{14}) + r_{16}$$

$$\frac{i_b}{i} = - \frac{R_o}{R_o + R_{\text{eq}}}$$

$$r_{16} = r = 1 \text{ k}\Omega$$

$$r_{15} = r_{14} = \frac{r}{\beta} = 10 \Omega$$

$$R_{\text{sortie}} = \frac{v}{i} = R_o \left(1 - \frac{R_o}{R_o + R_{\text{eq}}}\right) + \rho \left(1 + \frac{\beta R_o}{R_o + R_{\text{eq}}}\right)$$

$$R \gg r_{15} \text{ et } r_{14} \quad R_{\text{eq}} \simeq 1 \text{ k}\Omega$$

$$R_{\text{sortie}} \simeq \rho \left(1 + 100 \times \frac{1,2}{2,2}\right) \simeq 5 \text{ M}\Omega$$

-c. $I_2 = \frac{I_o}{2 \left(1 + \exp \frac{v_f}{V_T}\right)} = \frac{I_o}{4} \left(1 - \tanh \frac{v_f}{2V_T}\right)$

I-2-3

$$\text{-a. } v_f = 0 \quad I_{20} = \frac{I_0}{4} = 125 \mu\text{A}$$

$$I_{10} = I_0 + I_{20} = 625 \mu\text{A}$$

$$f_0 = \frac{I_{10}}{4C V_{BE}} = \frac{625 \cdot 10^{-6}}{4 \times 0,6 \cdot C} = \frac{260}{C \mu\text{F}}$$

$$C = 1 \text{ nF} \quad f_0 = 260 \text{ kHz}$$

$$C = 100 \text{ pF} \quad f_0 = 2,6 \text{ MHz}$$

$$\text{-b. } v_f > 0 \quad v_f \gg V_T \quad I_2 = 0 \quad I_1 = 500 \mu\text{A}$$

$$f_{\min} = \frac{500}{4C \cdot V_{BE}} = \frac{208}{C (\mu\text{F})} \text{ Hz}$$

$$v_f < 0 \quad |v_f| \ll V_T \quad I_2 = \frac{I_0}{2} \quad I_1 = 750 \mu\text{A}$$

$$f_{\max} = \frac{750}{4C \cdot V_{BE}} = \frac{312,5}{C (\mu\text{F})} \text{ Hz}$$

⇒ excursion en fréquence du VCO

$$\text{-c. } K_0 = \frac{d\omega}{dv_f} = \frac{d\omega}{dI_1} \cdot \frac{dI_1}{dv_f}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi I_1}{4C \cdot V_{BE}} = \frac{\pi I_1}{2C \cdot V_{BE}} \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{\pi \cdot I_{10}}{2C \cdot V_{BE}}$$

$$\frac{d\omega}{dI_1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{C \cdot V_{BE}} = \frac{\omega_0}{I_{10}}$$

$$\text{Pour 1 transistor } i_c = I_s \exp \frac{V_{BE}}{V_T}$$

$$\frac{di_c}{dV_{BE}} = \frac{i_c}{V_T}$$

$$\text{Pour le T20 } r_{20} = \frac{dV_{BE}}{di_e} \approx \frac{dV_{BE}}{di_c} = \frac{V_T}{I_0/2} = \frac{2V_T}{I_0}$$

$$\text{Pour les T21 et T22 } r_{21} = r_{22} = \frac{V_T}{I_0/4} = \frac{4V_T}{I_0}$$

$$v_f = (r_{20} + R) i_{e1} - R \cdot i_{e2} - r_{21} \cdot \frac{i_{e2}}{2}$$

en mode différentiel $i_{e1} = -i_{e2}$

$$v_f = \left(\frac{2V_T}{I_0} + R \right) (i_{e1} - i_{e2}) = -2 \left(\frac{2V_T}{I_0} + R \right) i_{e2}$$

$$\left| \frac{di_1}{dV_f} \right| = \left| \frac{di_2}{dV_f} \right| = \frac{1}{4 \left(\frac{2V_T}{I_0} + R \right)}$$

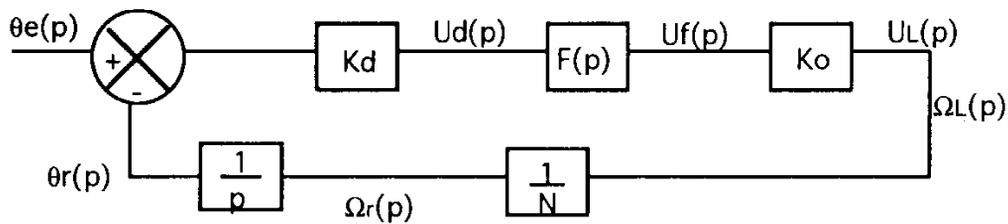
$$\frac{2V_T}{I_0} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 100$$

$$k_0 = \frac{\omega_0}{I_{10}} \times \frac{1}{4 \left(100 + 500 \right)} = \frac{\omega_0}{0,625 \cdot 10^{-3}} \times \frac{1}{2400} = 0,66 \omega_0$$

DEUXIEME PARTIE

II-1-1

-a.

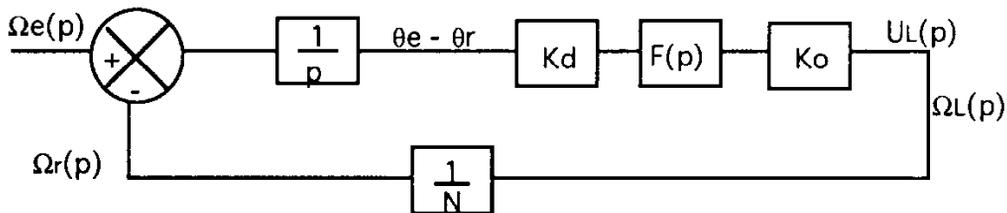


-b $H(p) = K_d \cdot F(p) \quad K_1 = K_o \frac{1}{Np}$

-c $T(p) = \frac{K_o K_d F(p)}{p \cdot N}$

II-1-2

-a



-b $H_1(p) = K_o K_d \frac{F(p)}{p} \quad K_1 = \frac{1}{N}$

-c $T(p) = T_1(p) = \frac{K_o K_d F(p)}{p \cdot N}$

II-1-3

-a $F(p) = \frac{A}{(1 + \tau p)^2}$

-b $T(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)^2}$

II-2-1

$$\frac{\Omega_e(p) - \Omega_r(p)}{\Omega_e(p)} = \frac{1}{1 + T(p)} = \frac{1}{1 + \frac{K}{p(1 + \tau p)^2}}$$

II-2-2

$$-a \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [\Omega_e(t) - \Omega_r(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} p [\Omega_e(p) - \Omega_r(p)]$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\frac{\Omega_e}{p}}{1 + \frac{K}{p(1 + \tau p)^2}} \quad \Omega_e(t) = \Omega_e \quad \Omega_e(p) = \frac{\Omega_e}{p}$$

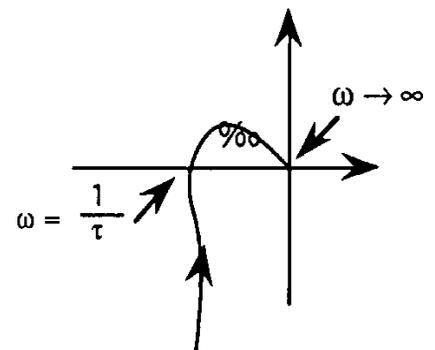
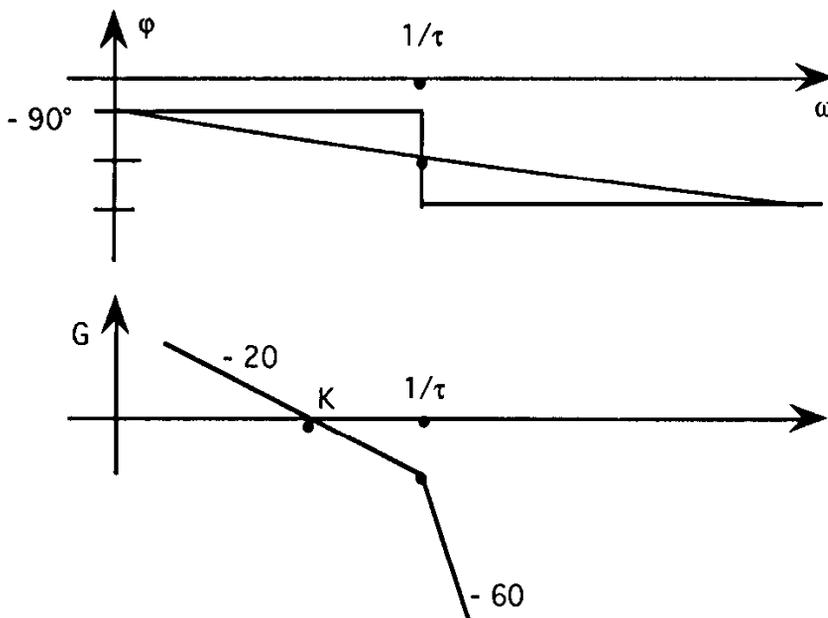
$$-b \quad \Omega_e = \Omega_r \text{ en régime établi} \quad \Omega_L = N\Omega_e \quad f_L = Nf_e$$

-c L'écart entre 2 fréquences synthétisées consécutives est $f_e = 10 \text{ kHz}$

II-2-3

$$N1 = \frac{f_L}{f_e} = \frac{5 \cdot 10^6}{10^4} = 500$$

II-3-1



II-3-2

$$-a \quad T(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)^2} \quad \underline{T}(j\omega) = \frac{K}{j\omega (1 + \tau j\omega)^2}$$

$$\varphi = -180^\circ \text{ pour } \omega = \frac{1}{\tau}$$

$|I|$ doit être < 1 pour assurer la stabilité

$$\text{à } \omega = \frac{1}{\tau} \quad |I| = \frac{K\tau}{2} < 1 \quad K\tau < 2$$

$$\text{-b. } K = \frac{K_d K_o A}{N} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot A}{500} = 4 \cdot 10^3 A. \quad \tau = 5 \cdot 10^{-5}$$

$$4 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^{-5} \cdot A < 2 \quad A < 10$$

II-3-3

a- marge de phase de 45° $|T| \simeq 1$ pour $\omega \simeq K$

$$\arg I = \frac{-\pi}{2} - 2 \arctg \tau \omega = -135^\circ$$

$$2 \arctg \tau \omega = 45^\circ \quad \tau \omega = 0,414 = K\tau$$

$$A = 2,07$$

$$\text{à } \omega = K \quad |I| = \frac{1}{1 + (0,414)^2} = \frac{1}{1 + 0,17} \sim 0,85 \sim 1$$

b- Marge de gain

$$\varphi = -\pi \quad |I| = \frac{K\tau}{2} = 0,207 \quad G = 20 \log 0,207 = -13,68 \text{ dB}$$

$$\text{Marge de gain} = 13,6 \text{ dB}$$

II-4-1

$$T_{BF}(p) = \frac{\Omega_r(p)}{\Omega_e(p)} = \frac{\frac{K}{p(1 + \tau p)^2}}{1 + \frac{K}{p(1 + \tau p)^2}}$$

$$T_{BF} = \frac{K}{K + p(1 + \tau p)^2} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K} + \frac{2\tau p^2}{K} + \frac{\tau^2 p^3}{K}}$$

II-4-2

Critère de Routh

p^3	$\frac{\tau^2}{K}$	$\frac{1}{K}$
p^2	$\frac{2\tau}{K}$	1
p^1	$\frac{\frac{2\tau}{K^2} - \frac{\tau^2}{K}}{\frac{2\tau}{K}}$	0
p^0	1	0

tous les termes de la 1ère colonne doivent être > 0

$$\frac{\frac{2\tau}{K^2} - \frac{\tau^2}{K}}{\frac{2\tau}{K}} > 0 \Rightarrow \frac{1}{K} - \frac{\tau}{2} > 0$$

donc $K\tau < 2$

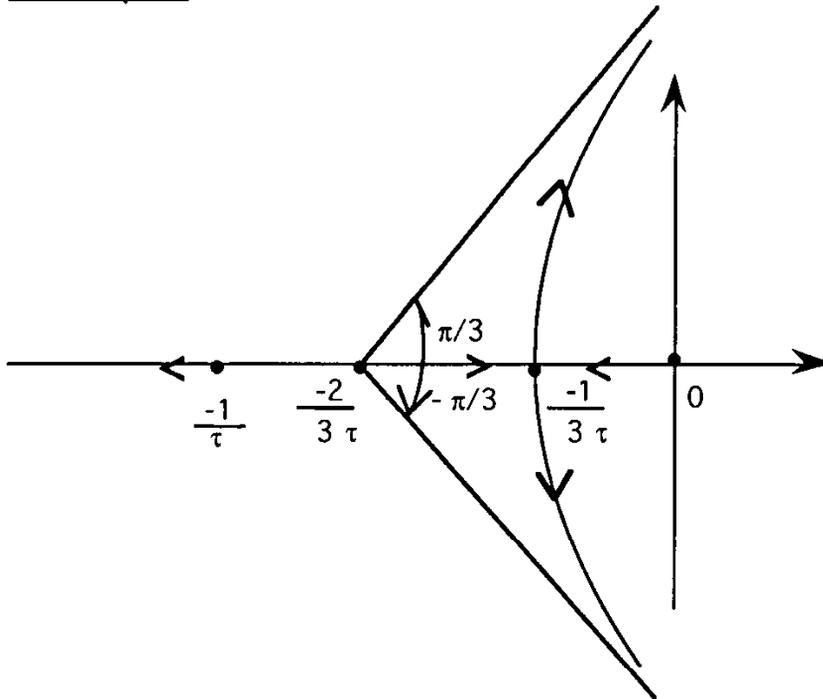
II-4-3

$$a. \quad TBF(p) = \frac{\frac{K}{\tau^2} \times \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau}\right)^2}}{1 + \frac{K}{\tau^2} \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau}\right)^2}}$$

$$= \frac{k G(p)}{1 + k G(p)}$$

$$b. \quad k = \frac{K}{\tau^2}$$

$$G(p) = \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{\tau}\right)^2}$$

c- Lieu des pôles

$$k = 0 \quad p = 0 \quad k \rightarrow \infty \quad n = 3 \text{ nbr de pôles}$$

$$p = -\frac{1}{\tau} \text{ racine double} \quad m = 0 \text{ nbr de zéro}$$

$n - m = 3$ asymptotes de direction : $\pi/3, \pi, -\pi/3$

Point de concours des asymptotes

$$x_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} = \frac{0 - \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau} - 0}{3} = -\frac{2}{3\tau}$$

$$k = 0 \quad p = 0 \text{ et } p = -\frac{1}{\tau}$$

lorsque k augmente les racines vont de $-\frac{1}{\tau}$ à $l'∞$ sur l'axe

de 0 à X sur l'axe puis le long de la courbe \rightarrow asympt

de $-\frac{1}{\tau}$ à X puis le long de la courbe \rightarrow asympt

$$X \text{ tel que } \frac{d}{dp} (k + p(p + \frac{1}{\tau})^2) = 0$$

$$3p^2 + \frac{4}{\tau}p + \frac{1}{\tau^2} = 0$$

$$p = \frac{-\frac{2}{\tau} \pm \sqrt{\frac{4}{\tau^2} - \frac{3}{\tau^2}}}{3} \rightarrow \text{les valeurs sont } -\frac{1}{\tau} \text{ et } -\frac{1}{3\tau}$$

$$\text{en } p = -\frac{1}{3\tau} \quad k = \frac{4}{27\tau^3}$$

-d Pour que les 3 racines soient réelles, il faut :

$$0 \leq k \leq \frac{4}{27\tau^3} \quad k = \frac{K}{\tau^2}$$

$$0 \leq \frac{K}{\tau^2} \leq \frac{4}{27\tau^3} \quad K\tau \leq \frac{4}{27}$$

II-4-4

$$w_a = -\frac{1}{10\tau} \text{ pôle dominant}$$

$$\frac{\Omega_r(p)}{\Omega_e(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{w_0}}$$

$$\Omega_r(t) + \frac{1}{w_0} \frac{d\Omega_r}{dt} = \Omega_e(t) \quad \Omega_r = \frac{\Omega_L}{N}$$

$$\Omega_L(t) + \frac{1}{w_0} \frac{d\Omega_L}{dt} = N\Omega_e(t)$$

II-4-5

-a. $t = 0 \quad \Omega_L = N_1 \Omega_e$

N passe de N_1 à N_2

$$\Omega_L(t) = N_2 \Omega_e + \text{cste} \cdot e^{-w_a t}$$

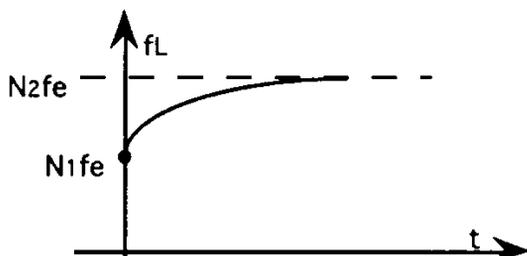
$$t = 0 \quad N_1 \Omega_e = N_2 \Omega_e + \text{cte}$$

$$\Omega_L(t) = \Omega_e [N_2 + (N_1 - N_2) e^{-w_a t}]$$

$$f_L = f_e [N_2 + (N_1 - N_2) e^{-w_a t}]$$

$$f_L = 10^4 [510 - 10 \cdot e^{-w_a t}]$$

-b



-c $t = t_1 \quad f_L = 10^4 \cdot 510 - 10^3$

$$\Rightarrow 10^5 e^{-w_a t} = 10^3 \quad t_1 = \frac{1}{w_a} \ln 10^2 = 2,3 \text{ ms}$$

TROISIEME PARTIE

III-1-1

$$v(t) = V_p \cos(\omega_p t + m \sin \omega_m t)$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_p + m \omega_m \cos \omega_m t$$

$$\Delta \omega = m \omega_m \quad \Delta f = m f_m$$

III-1-2

à $v(t) = V_p \cos(\omega_p t + m \sin \omega_m t)$, on associe

$$\underline{v} = V_p e^{j\omega_p t} \times e^{jm \sin \omega_m t}$$

$$= V_p e^{j\omega_p t} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(m) \exp(jn\omega_m t)$$

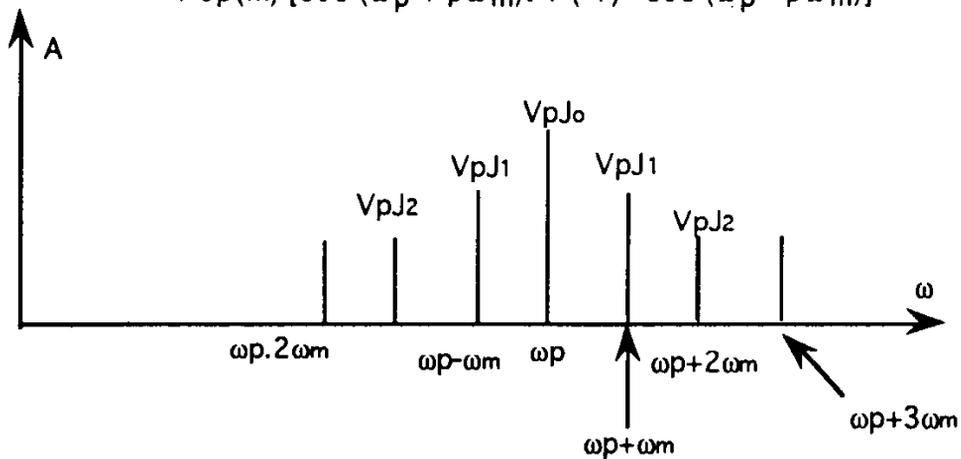
$$= V_p \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(m) e^{j(\omega_p t + n\omega_m t)}$$

comme $J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$

pour les termes pairs : $J_{-n} = J_n$

pour les termes impairs : $J_{-n} = -J_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(t) = & V_p [J_0(m) \cos \omega_p t \\ & + J_1(m) (\cos(\omega_p + \omega_m)t - \cos(\omega_p - \omega_m)t) \\ & + J_2(m) (\cos(\omega_p + 2\omega_m)t + \cos(\omega_p - 2\omega_m)t) \\ & + \dots \\ & + \dots \\ & + J_p(m) [\cos(\omega_p + p\omega_m)t + (-1)^p \cos(\omega_p - p\omega_m)t] \end{aligned}$$



III-1-3

$$P = \frac{V_p^2}{2R}$$

indépendant de f_m car

$$\sqrt{J_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m)^2} = 1$$

III-1-4

-a. $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ $\omega_p = 6 \cdot 10^8 \text{ rd/s}$

$$f_p = 95,493 \text{ MHz}$$

-b. $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ $\omega_m = 10^4 \text{ rd/s}$

$$f_m = 1,59 \text{ kHz}$$

-c. $\Delta f = m \cdot f_m = 5 \times \frac{10^4}{2\pi} = \frac{5}{2\pi} 10^4 = 7,95 \text{ kHz}$
pour $m = 5$

-d. à $f_p = 95,493 \text{ MHz}$ $1,4 \cdot J_0(5)$
 $1,4 \times | -0,18 |$

à $95,493 \pm 0,0016$ $1,4 \cdot J_1(5)$
 $1,4 \times | -0,33 |$

à $95,493 \pm 2 \times 0,0016$ $1,4 \cdot J_2(5)$
 $1,4 \times | +0,05 |$

à $95,493 \pm 3 \times 0,0016$ $1,4 \cdot J_3(5)$
 $1,4 \times | 0,36 |$

à $95,493 + 4 \times 0,0016$ $1,4 \cdot J_4(5)$
 $1,4 \times | 0,39 |$

à $95,493 + 5 \times 0,0016$ $1,4 \cdot J_5(5)$
 $1,4 \times | 0,26 |$

à $95,493 + 6 \times 0,0016$ $1,4 \cdot J_6(5)$
 $1,4 \times | 0,13 |$

à $95,493 + 7 \times 0,0016$ $1,4 \cdot J_7(5)$
 $1,4 \times | 0,05 |$

à $95,493 + 8 \times 0,0016$ $1,4 \cdot J_8(5)$
 $1,4 \times | 0,02 |$

au-delà, on négligera les $J_n(m)$

-e. Bande de fréquence

$$\Rightarrow J_8(5) \quad 2 \times 8 \times f_m = 16 \times f_m = 25,4 \text{ kHz}$$

-f. $P = \frac{1,4^2}{2 \times 50} = 20 \text{ mW}$

III-2-1

-a.
$$\frac{V}{I} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{R}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega} \right)}$$

-b. $v(t) = V(\omega) \cdot \cos [\omega_p t + m \sin \omega_m t + \varphi(\omega)]$

$$V(\omega) = I \cdot \frac{R}{\sqrt{1 + [Q \left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega} \right)]^2}}$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega_1 \omega} = \frac{(\omega - \omega_1)(\omega + \omega_1)}{\omega_1 \omega}$$

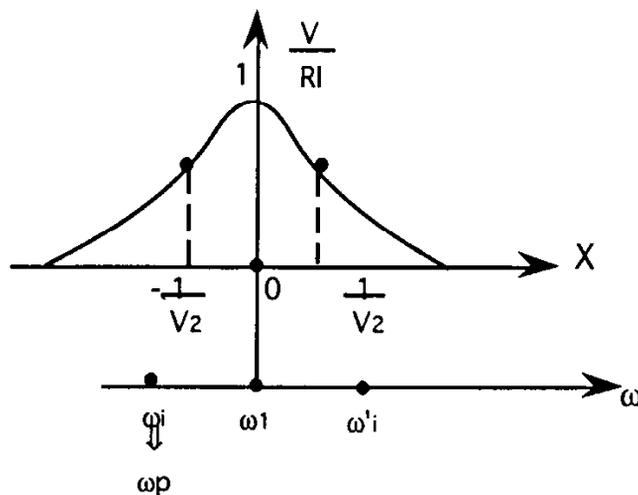
ω et ω_1 étant très voisins $\omega + \omega_1 \simeq 2\omega$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega} = 2 \frac{(\omega - \omega_1)}{\omega_1}$$

$$V(\omega) = \frac{R I}{\sqrt{1 + X^2}} \quad X = \frac{2Q (\omega - \omega_1)}{\omega_1}$$

-c. Point d'inflexion :

$$\frac{d^2V}{d\omega^2} = 0 = \frac{d^2V}{dX^2}$$



$$\frac{dV}{dX} = \frac{-X}{(1 + X^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d^2V}{dX^2} = \frac{2X^2 - 1}{(1 + X^2)^{5/2}} = 0 \Rightarrow X^2 = \frac{1}{2}$$

$$X^2 = \frac{1}{2} \quad X_i = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\omega_i - \omega_1}{\omega_1} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}Q}$$

$$\omega_i = \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}Q}\right) \quad \omega'_i = \omega_1 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}Q}\right)$$

III-2-2

-a. $X_p = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \omega_p = \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}Q}\right)$

-b. $\omega_p - \omega_1 = \frac{\omega_1}{2\sqrt{2}Q} = \Delta\omega$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}Q}$$

$$X = 2Q \cdot \underbrace{\frac{\omega_p - \omega_1}{\omega_1}}_{X_p} + \underbrace{\frac{2Q\Delta\omega}{\omega_1}}_{\Delta X} \cos \omega_m t$$

-c. $V(x) = \frac{R I}{\sqrt{1 + X^2}}$

au voisinage de $X_p \quad X = X_p + \Delta X \cos \omega_m t$

$$V(X) = V(X_p) + \Delta X \cos \omega_m t V'(X_p) + \frac{(\Delta X \cos \omega_m t)^2}{2} V''(X_p) + \frac{(\Delta X \cos \omega_m t)^3}{6} V'''(X_p) + \dots$$

$$V''(X_p) = 0$$

Sensibilité du discriminateur

$$\sigma = \frac{dV}{d\omega} = \frac{dV}{dX} \cdot \frac{dX}{d\omega} \quad \frac{dX}{d\omega} = \frac{2Q}{\omega_1}$$

$$\text{autour de } X_p \quad \frac{dV}{dX} = - \frac{X}{(1 + X^2)^{3/2}} \cdot R I$$

$$X_p = - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{dV}{dX} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R I}{\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot R I$$

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{Q R I}{\sqrt{3} \omega_1}$$

-d Le terme de rang 2 est nul

$$\text{Terme de rang 3 amplitude} \quad \frac{(\Delta X)^3}{6} \cdot V'''(X_p)$$

$$\text{Terme de rang 1 amplitude} \quad \Delta X V'(X_p)$$

$$\frac{(\Delta X)^3}{6} \frac{V'''(X_p)}{\Delta X V'(X_p)} \leq \frac{1}{100}$$

$$V' = - R I \frac{X}{(1 + X^2)^{3/2}} \quad V''' = R I \times \frac{3X(3 - 2X^2)}{(1 + X^2)^{7/2}}$$

$$\text{pour } X_p = - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V'(X_p) = \frac{2 R I}{3\sqrt{3}} \quad V''' = - \frac{16 R I}{9\sqrt{3}}$$

$$\Delta X = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_1}$$

$$\frac{(\Delta X)^2}{6} \cdot \left| \frac{- \frac{16 R I}{9\sqrt{3}}}{\frac{2 R I}{3\sqrt{3}}} \right| \leq \frac{1}{100}$$

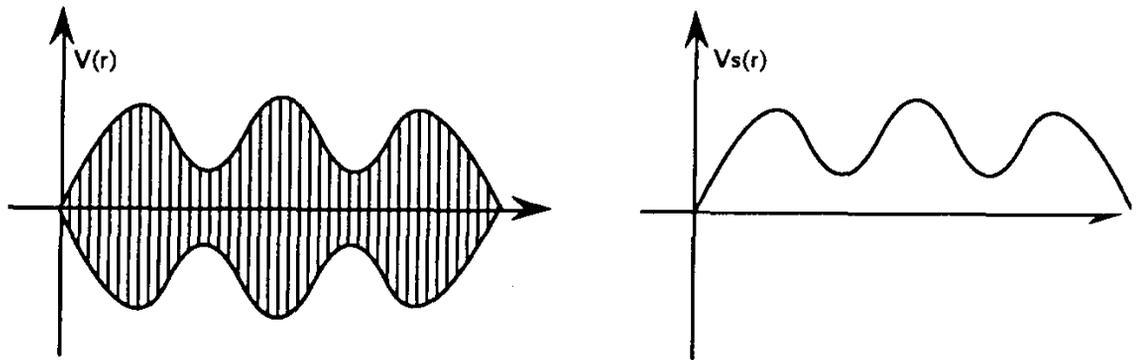
$$\frac{4}{9} \Delta X^2 \leq \frac{1}{100} \quad \Delta X \leq \frac{3}{20}$$

$$2Q m_M \leq \frac{3}{20}$$

$$m_M \leq \frac{3}{40 Q}$$

III-2-3

-a.



$v(t)$ est modulée en fréquence et en amplitude, le détecteur ne récupère que l'enveloppe.

-b. Redressement sur l'alternance > 0 par la diode D_3

Filtrage par le $R'C'$.

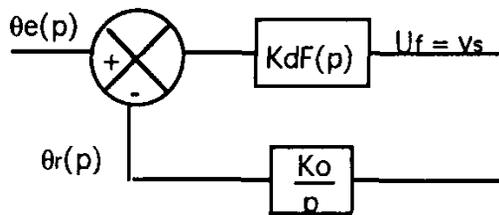
-c. $T_p \ll R'C' \ll T_m$

$R'C'$ doit être très grand devant la période de la porteuse, mais doit être très petit devant la période de l'onde modulante.

La diode D_4 évite la saturation de l'AOp:
 quand $v(t)$ est < 0 la sortie de l'AOp est maintenue à $-0,6$ V
 quand $v(t)$ devient > 0 s' passe à $+0,6$ V
 la commutation sera plus rapide.

III-3-1

-a.



$$-b \quad F(p) = \frac{1 + pR_1C_1}{1 + p(R_1 + R_2)C_1}$$

$$T(p) = \frac{KoKd}{p} \cdot \frac{1 + R_1C_1p}{1 + (R_1 + R_2)C_1P}$$

$$-c. \quad T_{BF} = \frac{\theta_r(p)}{\theta_e(p)} = \frac{\frac{KoKd}{p} \cdot \frac{1 + R_1C_1p}{1 + (R_1 + R_2)C_1P}}{1 + \frac{KoKd}{p} \cdot \frac{1 + R_1C_1p}{1 + (R_1 + R_2)C_1P}}$$

$$-d \quad T_{BF} = \frac{1 + R_1 C_1 p}{1 + p \left(\frac{1}{K_0 K_d} + R_1 C_1 \right) + p^2 \cdot \frac{(R_1 + R_2) C_1}{K_0 K_d}}$$

$$T_0 = 1$$

$$-e. \quad \omega_n = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$\omega_d^2 = \frac{K_0 K_d}{(R_1 + R_2) C_1} \quad 2 \zeta / \omega_d = \frac{1}{K_0 K_d} + R_1 C_1$$

$$2 \zeta = \omega_d \cdot \left(\frac{1}{K_0 K_d} + R_1 C_1 \right)$$

$$\omega_d^2 = (5 \cdot 10^4)^2 = \frac{K_0 K_d}{(R_1 + R_2) C_1} = \frac{2 \cdot 10^6}{(R_1 + R_2) 10^{-8}}$$

$$C = 10^{-8} f = 10 \text{ nf}$$

$$2 \frac{\zeta}{\omega_d} = \frac{\sqrt{2}}{5 \cdot 10^4} = \frac{1}{2 \cdot 10^6} + R_1 C_1$$

$$R_1 C_1 = 2,78 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$R_1 = \frac{2,78 \cdot 10^{-5}}{10^{-8}} = 2780 \Omega$$

$$R_1 + R_2 = \frac{2 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^8 \cdot 10^{-7}} = 80 \cdot 10^3 \Omega$$

$$R_2 = 80000 - 2780 = 77220 \Omega$$

III-3-2

-a. La boucle est verrouillée

$$\theta_e(r) = \omega_e t + \varphi_e(t)$$

$$\omega_e = \omega_0$$

$$\theta_r(r) = \omega_0 t + \varphi_r(t)$$

$$\theta_e - \theta_r = \varphi_e - \varphi_r \quad \Omega_e = \omega_0 + \frac{d\varphi_e}{dt} \quad \Omega_r = \omega_0 + \frac{d\varphi_r}{dt}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(r) - \theta_r(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_e(t) - \varphi_r(t)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p [\varphi_e(p) - \varphi_r(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\varphi_e(p)}{1 + T(p)}$$

$$\Omega_e - \omega_0 = \frac{d\varphi_e}{dt} \quad p \cdot \varphi_e(p) = \frac{\Omega_e - \omega_0}{p} \quad \varphi_e(p) = \frac{\Omega_e - \omega_0}{p^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t) - \theta_r(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\frac{\Omega_e - \omega_0}{p^2}}{1 + \frac{K_0 K_d}{p} \frac{(1 + R_1) C_1 p}{1 + (R_1 + R_2) C_1 p}}$$

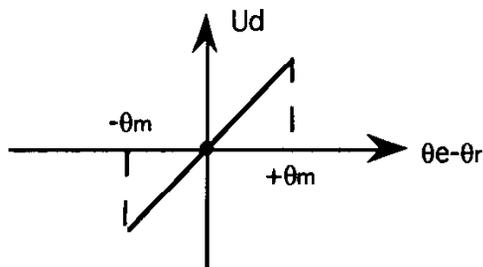
$$= \frac{\Omega_e - \omega_0}{K_0 K_d} = \text{cst}$$

$$\omega_0 - \omega_d \leq \Omega_e \leq \omega_0 + \omega_d$$

$$-\omega_d \leq \Omega_e - \omega_0 \leq +\omega_d$$

$$\theta_e - \theta_r = \pm \frac{\omega_d}{K_0 K_d} = \pm \frac{5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^6} = \pm 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ rd}$$

- b. Le verrouillage se conserve tant que $\theta_e - \theta_r$ reste dans la zone de linéarité du comparateur.



$$-\theta_M \leq \frac{\Omega_v - \omega_0}{K_0 K_d} \leq \theta_M$$

$$-\theta_M K_0 K_d \leq \Omega_v - \omega_0 \leq \theta_M K_0 K_d$$

$$-0,5 \times 2 \cdot 10^{-6} \leq \Omega_v - \omega_0 \leq 0,5 \times 2 \cdot 10^6 \text{ rd/s}$$

III-3-3

-a. $\theta_r(t) = \omega_0 t + \varphi_r(t)$

$$\frac{d\theta_r}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi_r}{dt}$$

$$\frac{d\varphi_r}{dt} = \frac{d\varphi_e}{dt} = K_0 u_f$$

$$K_0 \cdot u_f = \frac{d\varphi_e}{dt} = m\omega_m \cos.\omega_m t$$

$$u_f = \frac{1}{K_0} \Delta\omega \cos.\omega_m t$$

$$u_f = \alpha \cdot s(t)$$

↑ signal modulant

-b. $\theta_e - \theta_r = \varphi_e - \varphi_r$

$$\varphi_e(j\omega) - \varphi_r(j\omega) = \varphi_e(j\omega) \times \frac{1}{1 + T(j\omega)}$$

Pour ω_m le module du complexe associé à $\frac{d\varphi_e}{dt}$ est $m\omega_m$

$$|\varphi_e(j\omega_m)| = m$$

$$|\varphi_e - \varphi_r| = m \cdot \left| \frac{1}{1 + T(j\omega_m)} \right|$$

$$m = 5 \quad \omega_m = 10^4$$

$$\left| \frac{1}{1 + T(j\omega_m)} \right| = 0,04$$

$$|\varphi_e - \varphi_r| = 5 \times 0,04 = 0,2 \text{ rd}$$