Agrégation
(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

Épreuve C : Problème de Physique - Session : 1994

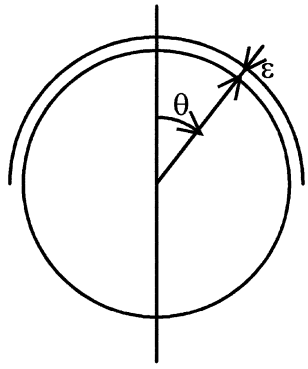
par Yves GALERNE

PROBLÈME A

UN EXEMPLE DE TRANSITION MÉCANIQUE

1. *a.* Le moment d'inertie de la bille par rapport à un axe passant par son centre peut se trouver sans calcul, en utilisant les symétries de la sphère :

$$I_0 = \int \rho\,(x^2 + y^2)\,dV = \frac{2}{3}\int \rho\,(x^2 + y^2 + z^2)\,dV$$

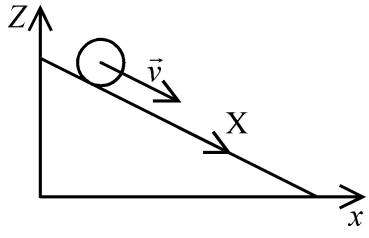


Soit : $\boxed{I_0 = \frac{2}{3} m r^2}$

b. Le lagrangien de la bille est $L = E_c - V$, où :

$$V = mg\,z = -\,mg\,X \sin\alpha$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \Omega^2$$



Avec $v = \dot{X} = \Omega r$, puisque la bille roule sans glissement, on a :

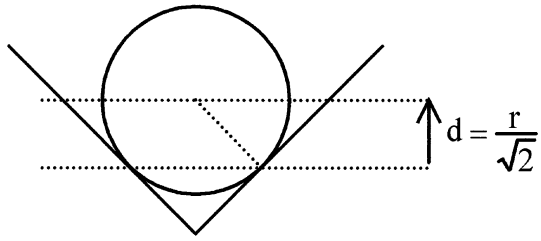
$$\boxed{L = \frac{5}{6} m\dot{X}^2 + mg \sin\alpha\, X}$$

c. L'équation de Lagrange s'écrit : $\boxed{\ddot{X} = \frac{3}{5} g \sin\alpha}$

Elle détermine un mouvement uniformément accéléré.

2. Maintenant, $v = \dot{X} = \Omega d = \Omega \frac{r}{\sqrt{2}}$

et : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \left(2 \frac{v^2}{r^2}\right) = \frac{7}{6} m \dot{X}^2$



La bille effectue par conséquent un mouvement uniformément accéléré tel que :

$$\boxed{\ddot{X} = \frac{3}{7} g \sin\alpha}$$

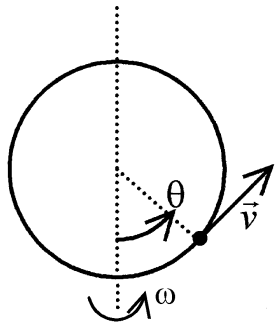
3. *a.* Le mouvement de la bille dans le référentiel terrestre, est la combinaison d'un mouvement de rotation autour de l'axe vertical du rail circulaire, et d'un mouvement de roulement sur le rail. Les vitesses correspondant à ces mouvements étant orthogonales, l'énergie cinétique de la bille peut s'écrire :

$$E_c = E_c\,(\text{roulement}) + E_c\,(\omega)$$

$$E_c\,(\text{roulement}) = \frac{7}{6} mv^2 \qquad \text{avec } v = R\dot{\theta},$$

et : $E_c\,(\omega) = \frac{1}{2} I \omega^2$

où d'après le théorème de Koenig : $I = I_0 + m R^2 \sin^2\theta$



On déduit : $\boxed{E_c = \frac{7}{6} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2\theta + \frac{1}{3} m \omega^2 r^2}$

b. L'énergie potentielle de la bille est : $V = mg\,R\,(1 - \cos\theta)$.

On déduit $L = \frac{7}{6} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \sin^2\theta + \frac{1}{3} m \omega^2 r^2 - mg\,R\,(1 - \cos\theta)$, ainsi que l'équation de son mouvement : $\frac{7}{3}\ddot{\theta} = \left[\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right]\sin\theta$.

La constante numérique de l'énoncé est donc : $\boxed{\alpha = \frac{7}{3}}$

c. A l'équilibre $\dot{\theta} = 0$, par conséquent : $\left[\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right]\sin\theta = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = 0 & \Rightarrow \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \theta = \pi \\ \cos\theta = \dfrac{g}{\omega^2 R} \end{cases}$$

α/ **Équilibre $\theta_0 = \pi$**.

La bille quitte le rail dans ce cas.

Supposons qu'elle y soit quand même assujettie. Posons $\theta = \theta_0 + \delta\theta$.

L'équation de son mouvement au premier ordre autour de cet équilibre s'écrit :

$$\frac{7}{3}\ddot{\delta\theta} = \left(\frac{g}{R} + \omega^2\right)\delta\theta \Rightarrow \text{Équilibre } \textbf{toujours instable}.$$

β/ **Équilibre $\theta_0 = 0$**.

L'équation des petits mouvements autour de cet équilibre est :

$$\frac{7}{3}\ddot{\delta\theta} = \left[\omega^2 - \frac{g}{R}\right]\delta\theta.$$

Elle montre que l'équilibre est stable si : $\boxed{\omega^2 < \omega_0^2 = \frac{g}{R}}$, instable sinon.

γ/ **Équilibre $\theta_0 = \pm$ Arc cos $\frac{g}{\omega^2 R}$** (possible si $\frac{g}{\omega^2 R} < 1$, c'est-à-dire si $\omega > \omega_0$).

L'équation des petits mouvements $\frac{7}{3}\ddot{\delta\theta} + \omega^2 \sin^2\theta_0\,\delta\theta = 0$ montre que cet équilibre est **stable**.

d. En résumé, on observe une transition mécanique pour $\omega = \omega_0$.

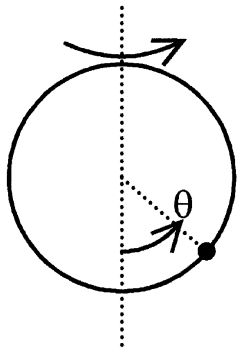
Pour $\omega < \omega_0$, l'état stable est : $\theta_0 = 0$.

Pour $\omega > \omega_0$, l'état stable est : $\theta_0 = \text{Arc}\cos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$.

Remarque 1 : La transition est continue (deuxième ordre).

Remarque 2 : Il y a en réalité deux états stables pour $\omega > \omega_0$: $\theta_0 = \pm \operatorname{Arc}\cos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right) \Rightarrow$ **bifurcation**.

Remarque 3 : Il y a alors rupture de symétrie du système, pourtant symétrique au départ.



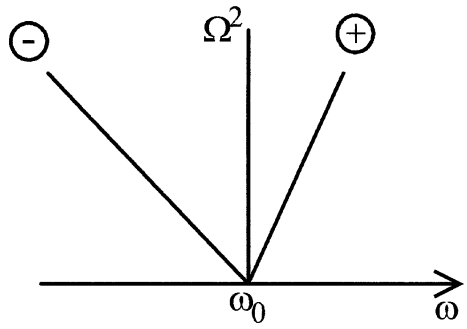
4. a. L'équation différentielle (3.*c*.β.) : $\frac{7}{3}\ddot{\delta\theta} = \left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right)\delta\theta$, montre que les petits mouvements autour de l'équilibre $\theta_0 = 0$, sont sinusoïdaux pour $\Delta\omega < 0$, et de pulsation Ω_- telle que :

$$\Omega_-^2 = \frac{3}{7}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = -\frac{6}{7}\,\omega_0\,\Delta\omega.$$

b. De même, l'équation (3.*c*.γ.) : $\frac{7}{3}\ddot{\delta\theta} + \omega^2\left(1 - \frac{g^2}{R^2\,\omega^4}\right)\delta\theta = 0$, montre que les mouvements sont sinusoïdaux autour de l'équilibre $\theta_0 = \operatorname{Arc}\cos\frac{g}{\omega^2 R}$ pour $\Delta\omega > 0$, et de pulsation Ω_+ telle que :

$$\Omega_+^2 = \frac{7}{3}\left(\omega^2 - \frac{\omega_0^4}{\omega^2}\right) = \frac{12}{7}\,\omega_0\,\Delta\omega.$$

c. En résumé, on a au 1er ordre en $\Delta\omega$, la relation : $\boldsymbol{\Omega_+^2(\Delta\omega) = -2\,\Omega_-^2(\Delta\omega)}$ qui exprime le ralentissement critique des mouvements à la transition.



5. a. La fonction de dissipation de la bille étant $F = \frac{1}{2}\eta\,v^2 \approx \frac{1}{2}\eta\,R^2\,\dot{\theta}^2$, l'équation du mouvement devient :

$$\boldsymbol{\frac{7}{3}\ddot{\theta} + \frac{\eta}{m}\dot{\theta} + \sin\theta\left(\frac{g}{R} - \omega^2\cos\theta\right) = 0}\ .$$

Le terme inertiel, en $\ddot{\theta}$, est négligeable s'il est beaucoup plus petit que les 2 autres, en particulier, s'il est très inférieur au terme dissipatif, c'est-à-dire si $\mathbf{m << \eta\tau}$, où τ est le temps de réponse caractéristique du système.

b. Les positions d'équilibre ($\dot{\theta} = 0$) sont les mêmes que précédemment.

α/ $\boldsymbol{\omega < \omega_0}$ **:** Équilibre $\theta_0 = 0$.

L'équation des petits mouvements autour de cet équilibre devient :

$$\frac{\eta}{m}\,\dot{\delta\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\delta\theta = 0.$$

Elle montre que le retour à l'équilibre est amorti avec un temps de relaxation τ_- (stabilité) tel que :

$$\boxed{\frac{1}{\tau_-} = \frac{m}{\eta}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

β/ $\boldsymbol{\omega > \omega_0}$ **:** Équilibre pour $\theta_0 = \pm \text{ Arc cos}\,\dfrac{g}{\omega^2 R}$.

L'équation des petits mouvements autour de cet équilibre est :

$$\frac{\eta}{m}\,\dot{\delta\theta} + \omega^2 \sin^2\theta_0\,\delta\theta = 0.$$

Elle montre la stabilité de l'équilibre avec un temps caractéristique d'amortissement des petits mouvements τ_+ tel que :

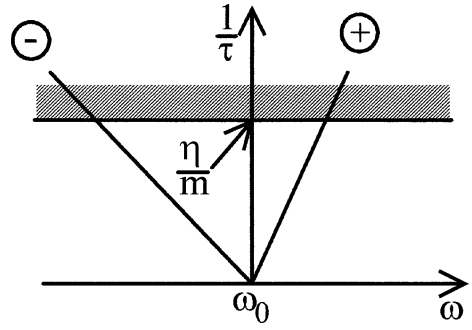
$$\boxed{\frac{1}{\tau_+} = \frac{m}{\eta}\,\omega^2 \sin^2\theta_0 = \frac{m}{\eta}\,\omega^2\left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\right)}ii$$

c. En résumé :

$$\boxed{\frac{1}{\tau_-} = -2\,\frac{m}{\eta}\,\omega_0\,\Delta\omega} \quad \text{si} \quad \Delta\omega < 0, \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{\tau_+} = 4\,\frac{m}{\eta}\,\omega_0\,\Delta\omega} \quad \text{si} \quad \Delta\omega > 0.$$

d. Par conséquent : $\mathbf{\frac{1}{\tau_+}(\Delta\omega) = -2\frac{1}{\tau_-}(\Delta\omega)}$.

Et graphiquement :



où on remarque à nouveau le ralentissement critique à la transition.

PROBLÈME B

QUELQUES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES SYSTÈMES FEUILLETÉS

I. Densité d'énergie élastique d'un smectique

1. a. L'expression (1) est le 1er terme du développement de p en $\frac{\delta e}{e_0}$, ou **approximation linéaire**, valide si $\left|\frac{\delta e}{e_0}\right| << 1$.

p est une pression de rappel, par conséquent $B > 0$.

B est mesuré en Pascals $= J/m^3$.

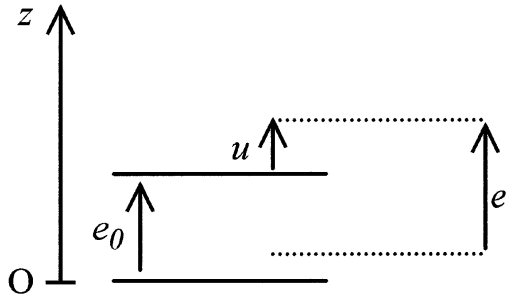
b. Force de pression reçue par la surface S du système : $f = pS$.

$$\text{Travail } dW = \underbrace{-f}_{\text{reçu}}\,de \quad \Rightarrow \quad F_{\text{élast.}} = \int_{e_0}^{e} BS\frac{e-e_0}{e_0}\,de = \frac{1}{2}B\underbrace{Se_0}_{V=1}\left(\frac{e-e_0}{e_0}\right)^2$$

Par conséquent : $\mathbf{F_{él} = \frac{1}{2}B\gamma^2}$ où $\gamma =$ dilatation linéaire relative.

Remarque : $B > 0 \Rightarrow F_{él}$ minimum pour $\gamma = 0$ (stabilité).

c.



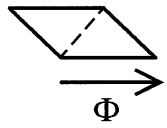
$e = e_0 + u(e_0) - u(0) \Rightarrow \delta u = e - e_0$ pour $\delta z = e_0$,

$\Rightarrow \gamma = \dfrac{\partial u}{\partial z}$ et $\mathbf{f_b = \frac{1}{2} B \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$.

d. $\gamma_{max} = 1$ correspond à l'énergie maximale par molécule $k_b T = \frac{1}{2} B \times v_{mol}$

v_{mol}= volume occupé par une molécule.

$v_{mol} = e_0 \times \Phi^2 \underbrace{\cos \frac{\pi}{6}}_{\sqrt{3}/2}$, car la maille est :

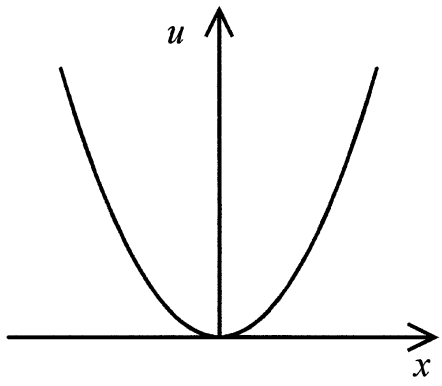


On déduit : $\mathbf{B = \frac{2\, k_b T}{v_{mol}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{k_b T}{e_0\, \Phi^2} = 1{,}28.10^7\ J.m^{-3}}$.

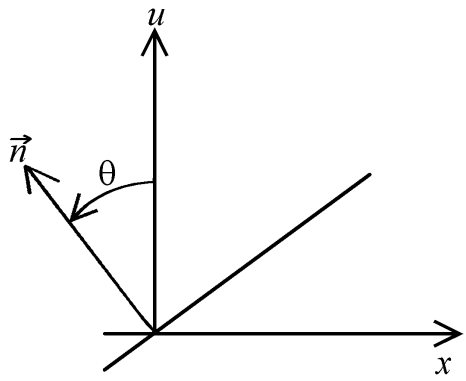
2. *a.* **Approximation linéaire :** cf. 1.*a.* $\Rightarrow K > 0$ (stabilité). Approximation valide pour c suffisamment petit, c'est-à-dire $R >> e_0$.

b. $c = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, et par conséquent :

$\mathbf{f_c = \frac{1}{2} K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2}$.

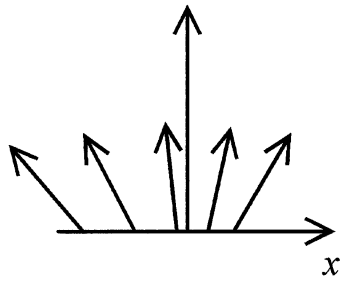


c.

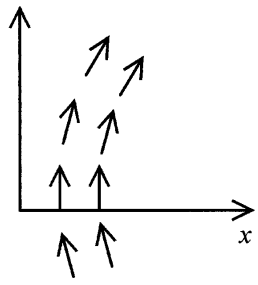


$$\vec{n}\begin{cases} n_x = -\sin\theta \approx -\theta \\ n_y = 0 \\ n_z = \cos\theta \approx 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg}\theta \approx \theta \quad \text{si } \boldsymbol{\theta} \textbf{ est petit}.$$

Par conséquent, $\mathbf{f_c = \frac{1}{2} K \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2}$, qui peut également s'interpréter comme la densité d'énergie élastique de la déformation **orientationnelle** de la normale aux couches selon l'axe x :



d. Cette densité d'énergie peut aussi s'écrire $f_c = \frac{1}{2} K \left(\frac{\partial n_x}{\partial x}\right)^2$, et suggère l'existence d'un terme supplémentaire en $\frac{1}{2} K' \left(\frac{\partial n_x}{\partial z}\right)^2$ correspondant à la déformation :



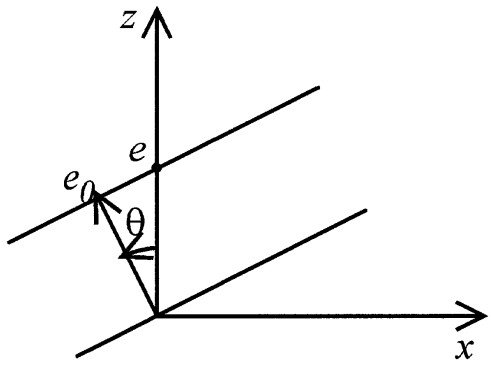
Remarque 1 : On peut faire l'hypothèse que K' = K.

Remarque 2 : Les termes en ∂n_z sont d'ordre inférieur, car $\theta \sim 0$.

e. L'analyse dimensionnelle $\left\{[f_b] = [B] \text{ et } [f_c] = \frac{[K]}{L^2}\right\}$ montre que $\sqrt{\frac{K}{B}} = \lambda$ est une longueur. Par conséquent, $\lambda \approx e_0$ qui est la **seule** longueur présente dans ce problème.

$$\mathbf{K = e_0^2 B = 1{,}15.10^{-10}\ N}.$$

3. *a.*



$$e = \frac{e_0}{\cos\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{e - e_0}{e_0} = \frac{1}{\cos\theta} - 1 \approx \frac{\theta^2}{2}$$ si θ est petit.

b. Au 1er ordre, la dilatation réelle est :

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\cos\theta} + 1 \approx \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\theta^2}{2},$$

et par conséquent :

$$f_b = \frac{1}{2} B \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\cos\theta} + 1 \right)^2 \approx \frac{1}{2} B \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\theta^2}{2} \right)^2.$$

c. Avec $\theta \approx \frac{\partial u}{\partial x}$, I.3.*b.* et l'équation (3), on déduit l'expression (4).

d. Si $\theta^2 << \frac{\partial u}{\partial z}$, c'est-à-dire $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << \frac{\partial u}{\partial z}$, la dilatation apparente peut être négligée.

II. **Distance de pénétration d'une déformation des couches smectiques**

1. Lorsque le terme en θ^2 dans (4) est négligeable, c'est-à-dire lorsque $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ est suffisamment petit, les déformations cylindriques contribuent linéairement à l'énergie libre (cf. I.3.*d.*). On peut alors décomposer la déformation (et donc la rugosité quelconque qui est à son origine) en série de Fourier, et considérer séparément chacun de ses termes (5). On a alors $u_0\, q << 1$.

2. *a.* $$F = \frac{1}{2} B \int_0^\infty dz \int_S ds \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)^2 \right] \right\}.$$

b. On envisage une variation quelconque δu, mais nulle aux limites :

$$\delta \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz = \int_0^\infty 2\,\frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial \delta u}{\partial z}\,dz = \cancel{2\,\frac{\partial u}{\partial z}\,\delta u\Big|_0^\infty} - 2\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,\delta u\,dz,$$

$$\begin{cases} w = \dfrac{\partial u}{\partial z} & dw = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z} \\ dv = d\delta u & v = \delta u \end{cases}$$

De même :

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)^2 dz\,dx = \iint 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\,\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial z}\,dz\,dx = 2\int \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\,\frac{\partial \delta u}{\partial x}\Big|_0^\infty}\,dx - 2\iint \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2}\,\frac{\partial \delta u}{\partial x}\,dx\,dz$$

$$\begin{cases} w = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} & dw = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial z} \\ dv = d\,\dfrac{\partial \delta u}{\partial x} & v = \dfrac{\partial \delta u}{\partial x} \end{cases} \qquad \text{car} \quad \delta u\,(z=0) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \delta u}{\partial x}(z=0) = 0$$

$$= \cancel{-2\int \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2}\right)\delta u\Big|\,dz} + 2\iint \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial z^2}\,\delta u\,dx\,dz$$

$$\begin{cases} w = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} & dw = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial z^2} \\ dv = d\delta u & v = \delta u \end{cases}$$

De même :

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dz = \iint 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}\,dx\,dz = -2\iint \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,\frac{\partial \delta u}{\partial x}\,dx\,dz = 2\iint \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\,\delta u\,dx\,dz.$$

On déduit : $$\delta F = \frac{1}{2}\,B \iint dz\,dS\;2\,\delta u\;.\left\{-\frac{\delta^2 u}{\partial z^2} + \lambda^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial z^2}\right)\right\} = 0 \qquad \forall \quad \delta u\,(x, z),$$

et par conséquent : $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial z^2}\right).}$$

c. Au minimum d'énergie, $f_{él}\,(\infty) = 0$. Il en résulte que la compression à l'infini $\dfrac{\partial u}{\partial z}\,(\infty)$ est nulle, et que $u\,(x, z = \infty) = \text{Cte}$.

d. La solution de (6) de la forme $u\,(x, z) = v\,(x)\;w\,(z)$, satisfait à l'équation :

$$vw'' - \lambda^2\,[v'''' \,w + v''\,w''] = 0,$$

ou en divisant par $\lambda^4\, v'''' \, w''$, à : $\frac{v}{\lambda^4 v''''} - \frac{v''}{\lambda^2 v''''} = \frac{w}{\lambda^2 w''} = \alpha$, c'est-à-dire à :

$$\begin{cases} \alpha\,\lambda^2\, w'' - w = 0 & \text{(I)} \\ \alpha\,\lambda^2\, v'''' + v'' - \frac{v}{\lambda^2} = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

La solution de (I) est de la forme $\mathbf{w(z) = A \exp -\frac{z}{l} + B \exp \frac{z}{l}}$ avec $l = \lambda\sqrt{\alpha}$. Les formes oscillatoires non amorties doivent être écartées au minimum d'énergie. Par conséquent, l est réel et $\alpha > 0$. De même la solution divergeante doit être rejetée $\Rightarrow B = 0$.

La solution de (II) est du type $v(x) = u_0 \cos q\, x$, avec $l^2\, q^4 - q^2 - \frac{1}{\lambda^2} = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{l = \frac{1}{q^2}\sqrt{q^2 + \frac{1}{\lambda^2}}}$$

Au total, la solution de l'équation (6) est : $\mathbf{u(x, z) = u_0 \cos q\, x \exp -\frac{z}{l}}$.

C'est bien la solution du problème, car elle satisfait aux conditions aux limites et qu'elle est unique.

e. Le problème reste linéaire si le terme $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ est négligeable devant $\frac{\partial u}{\partial z}$, c'est-à-dire si $\frac{u_0}{l} >> \frac{1}{2} u_0^2\, q^2$, ou si $\mathbf{u_0 << \frac{1}{q^2 l} \approx \lambda = 3\ nm}$.

f. $\mathbf{l \approx \frac{1}{\lambda q^2} = 75\ \mu m}$.

3. *a.* Les conditions aux limites sont données par l'équation (5) et :

$$u(x, y, z = d) = d - Ne_0 = 0$$

b. La solution $w(z) = A \exp -\frac{z}{l} + B \exp \frac{z}{l}$ satisfait maintenant aux conditions aux limites :

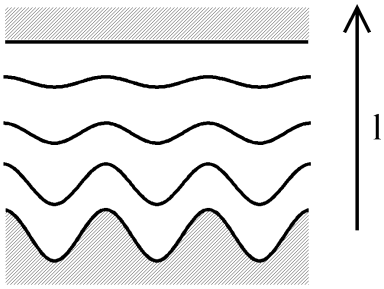
$$\begin{cases} w(z = 0) = A + B = u_0 \\ w(z = d) = 0 = A\, e^{-\frac{d}{l}} + B\, e^{\frac{d}{l}} \end{cases}$$

Par conséquent : $A = \frac{u_0\, e^{d/l}}{2 \operatorname{sh} d/l}$ et $B = \frac{u_0\, e^{-d/l}}{2 \operatorname{sh} -\frac{d}{l}}$,

et : $\boxed{w(z) = u_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{d - z}{l}}{\operatorname{sh} d/l}}$ Au total : $\boxed{u(x, y, z) = u_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{d - z}{l}}{\operatorname{sh} \frac{d}{l}} \cos q\, x}$

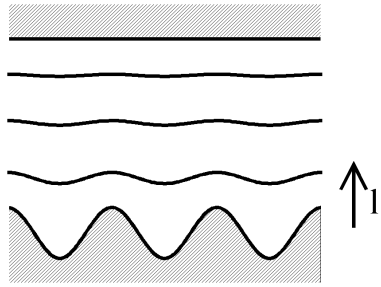
c. Deux géométries extrêmes :

α)



$l > d$

β)



$l < d$

q_e peut être défini par : $l\,(q = q_c) = d$, c'est-à-dire : $d^2\, q_c^4 = q_c^2 + \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Soit : $$\mathbf{q_c^2 = \frac{1}{2d^2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2}\right)}.$$

Remarque : $l > d$ correspond à $\left(\dfrac{d}{\lambda}\right)^2 X^2 - X - 1 < 0$ où $X = \lambda^2 q^2$, donc à $q < q_c$.

d. $$F = \frac{1}{2} B \iint_0^d dx\, dz \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}\right)^2 \right] \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{u_0}{l} \frac{\operatorname{ch} \dfrac{d - z}{l}}{\operatorname{sh} \dfrac{d}{l}} \cos q x$$

$$F = \frac{B}{2} \frac{u_0^2}{2l^2 \operatorname{sh}^2 \dfrac{d}{l}} \int_0^d \left\{ \operatorname{ch}^2 \left(\frac{d - z}{l}\right)^2 \cdot \left[1 + \lambda^2 q^2\right] + l^2 \lambda^2 q^4 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{d - z}{l}\right) \right\} dz$$

$$\mathbf{F = \frac{B}{4} \frac{u_0^2 \lambda^2 q^4}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{d}{l}} \int_0^d \operatorname{ch} 2 \left(\frac{d - z}{l}\right) dz}\ .$$

α) Cas **l >> d** : $$\operatorname{sh} \frac{d}{l} \sim \frac{d}{l} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} 2 \left(\frac{d - z}{l}\right) \sim 1$$

$$\mathbf{F = u_0^2 \frac{B}{4d} (\lambda l q^2)^2} = u_0^2 \frac{B}{4d} (1 + \lambda^2 q^2)\ .$$

β) Cas **d >> *l*** : $$\operatorname{sh} \frac{d}{l} \sim \frac{e^{d/l}}{2}$$

$$F = \frac{B u_0^2}{4} \frac{\lambda^2 q^4}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{d}{l}} \left(-\frac{l}{2}\right) \int_0^d \operatorname{ch} 2 \left(\frac{d - z}{l}\right) d \left(\frac{-2z}{l}\right) = \frac{B u_0^2 \lambda^2 q^4}{4 \operatorname{sh}^2 \dfrac{d}{l}} \times \frac{l}{2} \operatorname{sh} \frac{2d}{l} = \mathbf{u_0^2 \frac{B}{4} l \lambda^2 q^4}.$$

Remarque : $\frac{F_\alpha}{F_\beta} = \frac{l}{d}$: L'échantillon smectique s'impose lui-même la distance de pénétration l lorsque l'épaisseur d'échantillon le lui permet. Son énergie s'en trouve réduite d'autant.

4. a. $$l = \frac{1}{q^2}\sqrt{q^2 + \frac{1}{\lambda^2}}$$

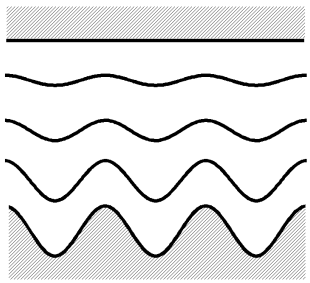
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda q << 1 \Rightarrow l \approx \frac{1}{\lambda q^2} : \text{ correspond au cas étudié dans le problème.} \\ \lambda q >> 1 \Rightarrow l \approx \frac{1}{q} : \text{ correspond à } \lambda >> \Lambda \text{ (couches smectiques très épaisses).} \end{cases}$$

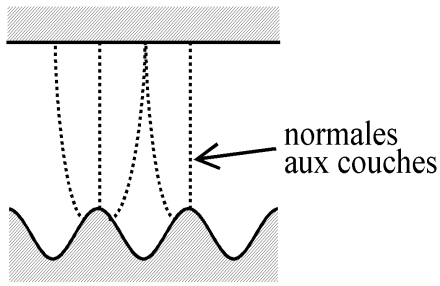
b. $\boldsymbol{\lambda q << 1} \Rightarrow l \approx \frac{1}{\lambda q^2} = d \Rightarrow \mathbf{q_c \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda d}}}$,

$\boldsymbol{\lambda q >> 1} \Rightarrow l \approx \frac{1}{q} = d \Rightarrow \mathbf{q_c \approx \frac{1}{d}}$.

Remarque : Dans ce cas, on a $\lambda >> \frac{1}{q} \sim d \Rightarrow$ Il n'y a plus de couches en réalité ! (Nématique).

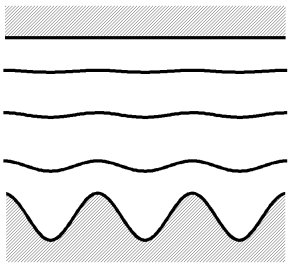
c. α) $\boldsymbol{l >> d}$: $\boldsymbol{\lambda q << 1} \Rightarrow F_{Sm} = \frac{B u_0^2}{4d}$ $\boldsymbol{\lambda q >> 1} \Rightarrow F_{Ném} = \frac{K q^2}{4d} u_0^2$.



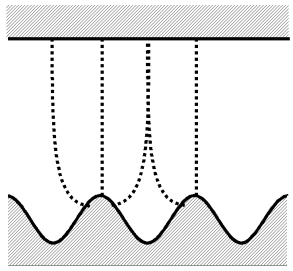


Remarque : Même dépendance en $\frac{1}{d}$.

β) $\boldsymbol{l << d}$: $\boldsymbol{\lambda q << 1} \Rightarrow F_{Sm} = \frac{B u_0^2}{4l} = \frac{\sqrt{KB}}{4} q^2 u_0^2$ $\boldsymbol{\lambda q >> 1} \Rightarrow F_{Ném} = \frac{K q^3}{4} u_0^2$.



Pénétration en $l = \frac{1}{\lambda q^2}$.



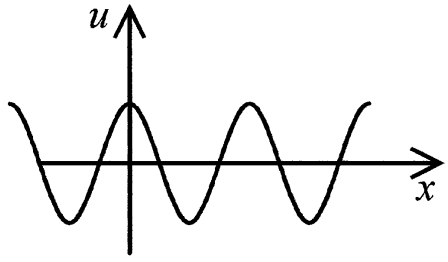
Pénétration en $\frac{1}{q}$, car $l = \frac{1}{q}$.

III. **Tension superficielle d'un système smectique**

1. *a.* **Microscopiquement** : L'énergie de surface provient :
   – des interactions rompues par la surface entre les molécules (van der Waals, liaison hydrogène, ...),
   – de l'ordre moléculaire imposé par la surface qui abaisse son entropie S et augmente $F = U - TS$.

   Macroscopiquement : $F = A \times \text{Surface} > 0$ sinon il y aurait explosion du système par augmentation de sa surface à l'infini.

b.



$$u = u_0 \cos q\,x$$

$$dS = dx'\,dy$$

$$dx' = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = dx\left(1 + u_0^2\, q^2 \sin^2 q\,x\right)^{1/2}$$

$$F = A\int_{S=1} dS = A\int dy\,dx\left(1 + \frac{u_0}{2}\, q^2 \sin^2 q\,x\right) \qquad (u_0\, q << 1)$$

$$\downarrow$$

$$1/2$$

$$\boldsymbol{\delta F = A\,\frac{q^2}{4}\,u_0^2} \qquad \text{pour } S = 1.$$

c. $$\delta F = A\int_{S=1}\left[\frac{1}{\cos\theta} - 1\right] dS = A\int\left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)^{-1} - 1\right] dS = A\int \frac{\theta^2}{2}\, dS \quad \text{si } \theta \text{ est petit.}$$

Remarque : θ n'est pas additif. Il faut revenir en u.

$$\theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

et Bessel-Parseval $\Rightarrow$

$$\frac{1}{S}\int_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dS = \sum_{\vec{q}} q_x^2 \left|u_{\vec{q}}\right|^2.$$

Par conséquent : $$\delta F = \frac{A}{2}\sum_{\vec{q}}\left(q_x^2 + q_y^2\right)\left|u_{\vec{q}}\right|^2 = \boldsymbol{\frac{A}{2}\sum_{\vec{q}} q^2 \left|u_{\vec{q}}\right|^2}.$$

Remarque : Cas de 1.*b.* : $u = u_0 \cos qx = \frac{u_0}{2} [\exp iqx + \exp - iqx]$ qui correspond à :

$$\begin{cases} u_q = \frac{u_0}{2} \\ u_{-q} = \frac{u_0}{2} \end{cases}$$

Avec $\sum_q q^2 \left|u_q\right|^2 = q^2 \frac{u_0^2}{2}$, on retrouve bien l'augmentation d'énergie δF de la question III.1.*b.*

2. *a.* En plus de l'énergie libre de tension superficielle proprement dite, on a l'énergie smectique (cf. II.4.*c.*β) : $F_{Sm} = \frac{\sqrt{KB}}{4} q^2 u_0^2$.

b. Elle renormalise la constante A qui devient $A + \delta A$, tel que :
$\boldsymbol{\delta A = \sqrt{KB} = \lambda B}$.

Application Numérique : $\boldsymbol{\delta A = 3{,}8 \cdot 10^{-2}\ Jm^{-2}}$.

c. Comme en II.1., on peut alors décomposer F_{Sm} en série de Fourier. On peut ensuite additionner chaque terme de Fourier de F_{Sm} au terme correspondant de δF dans III.1.*c.*, et voir que **A devient $\mathbf{A + \sqrt{KB}}$**, comme en 2.*b.*

IV. **Flambement des couches**

1. *a.* Le terme Xz est le terme de déplacement uniforme (ou linéaire). Pour z = d, $Xz = \delta$. A cela peut s'ajouter une perturbation périodique décomposable en série de Fourier :

$$\underset{\text{facultatif}}{\uparrow} \Re e \sum_{q_x, q_y, q_z} u_{\vec{q}, q_z} \exp j\, \vec{q} \cdot \vec{r} (\cos q_z z + j \sin q_z z).$$

Les conditions aux limites imposent que cette perturbation s'annule pour $\begin{cases} z = 0 \\ z = d \end{cases}$, $\forall \vec{r}$.

$\mathbf{z = 0}$ $\Rightarrow$ $\Re e \left[u_{\vec{q}, q_z} e^{j \vec{q} \cdot \vec{r}} + u_{-\vec{q}, -q_z} e^{-j \vec{q} \cdot \vec{r}} \right] = 0$, car indépendance des $\vec{q}$.

Il n'y a donc pas de termes en $\cos q_z z$.

$\mathbf{z = d}$ $\Rightarrow$ $\Re e \left\{ \left[u_{\vec{q}, q_z} e^{j \vec{q} \cdot \vec{r}} - u_{-\vec{q}, -q_z} e^{-j \vec{q} \cdot \vec{r}} \right] \sin q_z d \right\} = 0$ $\Rightarrow$ $\sin q_z d = 0$,

et par conséquent : $\boldsymbol{q_z = \frac{n\pi}{d}}$.

D'autre part, $q_x = \frac{2 n_x \pi}{L}$, $q_y = \frac{2 n_y \pi}{L}$.

Au total, (7) peut s'écrire :

$$\mathbf{u(x, y, z) = Xz + \sum_{n, \vec{q}} U_{n, \vec{q}} \sin \frac{n \pi z}{d} \exp j \vec{q} . \vec{r}}$$

Remarque : Ce terme est réel, et $U_{n, \vec{q}} = j\, u_{n, \vec{q}} = j\, u_{\vec{q}, q_z (= n \pi / d)}$, où n est entier relatif.

b. On se place dans les conditions de linéarité de l'énergie élastique ($\theta << 1$). On peut alors considérer l'effet des différents modes indépendamment des autres, et ne garder dans l'expression de u qu'un seul terme oscillant (comme en II.1.). On commence par le plus important qui sera souvent le fondamental : $\mathbf{n = 1}$, avec $\vec{q}$ orienté selon l'axe x :

$$u(x, z) = Xz + \sin k_1 z \underbrace{\left[U_{1, q}\, e^{jqx} + U_{1, -q}\, e^{-jqx} - U_{-1, q}\, e^{jqx} - U_{-1, -q}\, e^{-jqx} \right]}_{u_1 \cos q x}$$

$$\text{où} \quad \mathbf{k_1 = \frac{\pi}{d}}.$$

u_1 est réel, puisque cette expression est réelle, et par choix judicieux de l'origine des x.

c. On reporte $u = Xz + \delta u$ où $\delta u = u_1 \sin k_1 z \cos q x$, dans (4) :

$$f_{el} = \frac{1}{2} B \left\{ \left[X + \frac{\partial \delta x}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] \right\}$$

$$f_{el} \approx \frac{1}{2} B \left\{ X^2 + \left(\frac{\partial \delta u}{\partial z} \right)^2 + 2X \cancel{\frac{\partial \delta u}{\partial z}} - X \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} \right)^2 - \cancel{\frac{\partial \delta u}{\partial z}} \cancel{\left(\frac{\partial \delta u}{\partial z} \right)^2} + \lambda^2 [\ \ ] \right\} \text{ à l'ordre 3 en } u_1.$$

Remarque : L'intégrale des termes impairs en u_1 est nulle.

$$\frac{\partial \delta u}{\partial z} = u_1 k_1 \cos k_1 z \cos q x \qquad \frac{\partial \delta u}{\partial x} = - u_1 q \sin k_1 z \sin q x$$

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial z} = - u_1 k_1 q \cos k_1 z \sin q x \qquad \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} = - u_1 q^2 \sin k_1 z \cos q x$$

$$F = \iint_{S = 1} f_{el}\, dS = \frac{1}{2} B \left\{ X^2 + \frac{u_1^2 k_1^2}{4} - X \frac{u_1^2 q^2}{4} + \lambda^4 \left[u_1^2 \frac{q^4}{4} + u_1^2 \frac{k_1^2 q^2}{4} \right] \right\}$$

puisque : $$\int \cos^2 q x\, dx = \frac{1}{2}\ .$$

Finalement : $$\mathbf{F = \frac{B}{2} \left\{ X^2 + \frac{u_1^2}{4} \left[k_1^2 - X q^2 + \lambda^2 \left(q^4 + k_1^2 q^2 \right) \right] \right\}} \quad + \text{termes en } u_1^4 + \ldots$$

2. *a.* On impose une dilatation X. Si $y = \left[k_1^2 - Xq^2 + \lambda^2\left(q^4 + k_1^2\, q^2\right)\right] > 0$, le minimum de F est obtenu pour $u_1 = 0$. Inversement, $y < 0 \Rightarrow u_1 \neq 0$,

$\Rightarrow$ ondulation

Il existe donc un seuil de dilatation X_s, tel que y = 0 :

$$\mathbf{X_s = k_1^2\left(\lambda^2 + \frac{1}{q^2}\right) + \lambda^2\, q^2 = \frac{\pi^2}{d^2}\left(\lambda^2 + \frac{1}{q^2}\right) + \lambda^2\, q^2.}$$

Justification physique : L'inclinaison des couches relaxe une partie de l'énergie de dilatation, mais en contrepartie cela nécessite de l'énergie de courbure. Le bilan n'est positif qu'au delà du seuil X_s.

b. Avant le seuil le système a une symétrie de translation parallèlement à x, qu'il perd au-dessus. Il y a donc brisure de symétrie.

c. Le 1er vecteur d'onde excité q_s est tel que $X_s\left(q_s^2\right)$ est minimum, c'est-à-dire :

$$\lambda^2 - \frac{k_1^2}{q_s^4} = 0 \ ,$$

ou : $$\mathbf{q_s = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} = \sqrt{\pi}\, q_c} \qquad \text{(cf II.4.}b\text{.)}$$

puisque : $$(\lambda q)^2 = \pi\lambda / d << 1.$$

d. On en déduit : $$X_s\,(q_s) = \frac{\pi^2}{d^2}\left(\lambda^2 + \frac{\lambda d}{\pi}\right) + \frac{\lambda\pi}{d} = \mathbf{\frac{\pi^2\,\lambda^2}{d^2} + 2\pi\,\frac{\lambda}{d} \approx \frac{2\pi\,\lambda}{d}}$$

et : $$\mathbf{\delta_s = 2\pi\,\lambda + \pi^2\,\frac{\lambda^2}{d} \approx 2\pi\,\lambda.}$$

e. On peut exciter a priori les modes $u_n\,(q, k_n)$, tels que $k_n = \frac{n\pi}{d}$. Les caractéristiques du seuil s'obtiennent en remplaçant π par $n\pi$ dans le calcul précédent.

$$\mathbf{q_{sn} = \sqrt{\frac{n\pi}{\lambda d}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{X_{sn} \approx \frac{2n\,\pi\,\lambda}{d}.}$$

Le second mode d'ondulation qui apparaît est donc $\mathbf{n = 2}$.

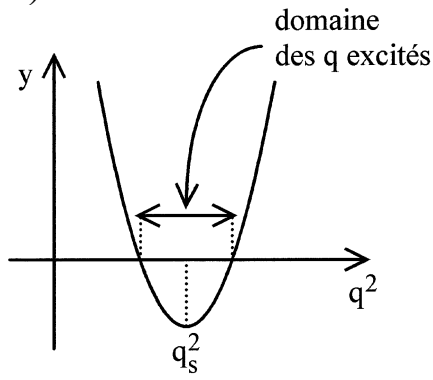
$$\mathbf{q_{s2} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda d}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{\delta_{s2} \approx 4\pi\,\lambda.}$$

f. Avec $\lambda = 3$ nm, on a : $\mathbf{\delta_s = 2\pi\,\lambda = 19\ nm}$ $\qquad$ $\mathbf{q_s = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda d}} = 1{,}87 \cdot 10^6\ m^{-1}}$

$$\mathbf{\delta_{s2} = 38\ nm} \qquad \mathbf{q_{s2} = 2{,}64 \cdot 10^6\ m^{-1}.}$$

3. *a.* On est dans le régime linéaire, si $\theta << 1$; dans cette limite, on peut considérer les modes séparément. Comme la dilatation envisagée est très voisine du 1er seuil, aucun autre mode q_z n'est excité. Par contre, les modes de q voisin de q_s apparaissent ; ceux pour lesquels $y < 0$.

C'est-à-dire : $\lambda^2 q^4 + \left(\lambda^2 k_1^2 - X\right) q^2 + k_1^2 < 0.$



Remarque : Ces modes sont très voisins de q_s ; de plus leur amplitude est plus faible que u_1 car elle est proportionnelle à $\sqrt{\delta X(q)}$ (cf plus loin).
↑ écart au seuil

L'ensemble va donc se superposer pour donner une ondulation à peu près sinusoïdale à l'intérieur d'un paquet d'onde de largeur inversement proportionnelle à Δq, largeur en q du domaine excité. Le vecteur d'onde moyen est donc $\approx q_s$.

b. En I.3.*b*. on avait :

$$f = \frac{B}{2}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\cos\theta} + 1\right]^2 + \lambda^2\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right)^2\right]\right\},$$

où : $\theta = \text{atn}\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3$,

$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \varepsilon\,\theta^4 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4$, ce qui donne : $\frac{1}{\cos\theta} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4$, et montre par suite que l'expression (4) est correcte jusqu'à l'ordre 3 en u_1.

Avec : $u = Xz + u_1 \sin k_1 z \cos q x$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = X + u_1 k_1 \cos k_1 z \cos q x \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -u_1 q \sin k_1 z \sin q x \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -u_1 k_1 q \cos k_1 z \sin q x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u_1 q^2 \sin k_1 z \cos q x \end{cases}$$

on a : $$f = \frac{B}{2}\left\{\left[X + u_1 k_1 \cos k_1 z \cos q x - \frac{1}{2} u_1^2 q^2 \sin^2 k_1 z \sin^2 q x + \varepsilon u_1^4\right]^2 + \lambda^2\left[u_1^2 q^4 \sin k_1 z \cos^2 q x + u_1^2 k_1^2 q^2 \cos^2 k_1 z \sin^2 q x\right]\right\}.$$

Remarque : X est toujours très petit devant 1.

$\Rightarrow$ le terme $2X\,\varepsilon\,u_1^4$, peut être négligé : inutile de le calculer.

c. On intègre f sur une surface S = 1 unité (m^2 !) dont les dimensions sont très grandes devant $\frac{1}{q}$ et $\frac{1}{k_1}$.

On peut alors remplacer les intégrales $\frac{1}{L}\int_0^L \cos^n q\,x\,dx$ par les moyennes $\langle \cos^n q\,x \rangle$.

On a : $$\langle \cos q\,x \rangle = \langle \sin q\,x \rangle = \ldots = 0,$$

$$\langle \cos^2 q\,x \rangle = \langle \sin^2 q\,x \rangle = \ldots = \frac{1}{2}.$$

$$\cos^4 q\,x = \frac{1}{4}(1 + \cos^2 2q\,x + 2\cos 2q\,x) \Rightarrow \langle \cos^4 q\,x \rangle = \langle \sin^4 q\,x \rangle = \frac{3}{8}.$$

↑ par déphasage

Il en résulte que : $F = \frac{B}{2}\left\{X^2 + \frac{1}{4}u_1^2 k_1^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^2 u_1^4 q^4 - \frac{1}{4}u_1^2 X q^2 + \lambda^2\left[\frac{1}{4}u_1^2 q^2 + \frac{1}{4}u_1^2 k_1^2 q^2\right]\right\}$,

$$F = \frac{B}{2}\left\{X^2 + \frac{u_1^2}{4}\underbrace{\left[k_1^2 - X q^2 + \lambda^2\left(q^4 + k_1^2 q^2\right)\right]}_{\downarrow\ y} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^2 u_1^4 q^4\right\}$$

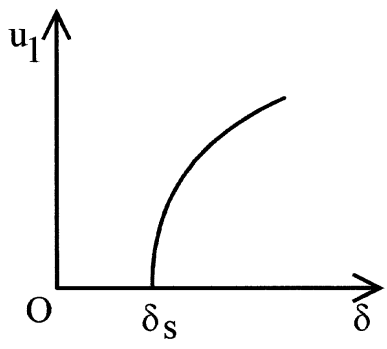
u_1 est donné par le minimum de F : $\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} = 0 = y + 2\left(\frac{3}{8}\right)^2 u_1^2 q^4$.

Pour $q = q_s$, $y = Cte - X q_s^2 = q_s^2 (X_s - X)$ puisque y = 0 au seuil.

On déduit : $u_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right)^2 \frac{X - X_s}{q_s^2}$. Avec : $\frac{1}{q_s^2} = \frac{\lambda d}{\pi}$ et $X - X_s = \frac{\delta - \delta_s}{d} = \frac{2\pi\lambda}{d} \times \frac{\delta - \delta_s}{\delta_s}$, l'amplitude d'ondulation des couches s'écrit :

$$\mathbf{u_1 = \frac{8\lambda}{3}\sqrt{\frac{\delta - \delta_s}{\delta_s}}}.$$

d.



$\begin{cases} \text{Continuité de } u_1\ (\delta) \\ \text{discontinuité de } u_1' \end{cases} \Rightarrow$ **transition du 2e ordre.**

Analogue à la transition de phase : paramagnétisme - ferromagnétisme (pt de Curie) où :

$$\delta \rightarrow -T \quad \text{et} \quad u_1 \rightarrow M.$$

e. Il faut $|\theta| << 1$. Compte tenu que : $\theta = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, cette condition s'écrit : $q_s\, u_1 << 1$, ou $q_s\, \lambda \sqrt{\dfrac{\delta X}{X_s}} << 1$ ou encore : $\boldsymbol{\dfrac{\delta X}{X_s} << \dfrac{d}{\lambda}}$.

Cette condition est aisément satisfaite, compte tenu des ordres de grandeur. Autre limitation, il ne faut pas exciter d'autres modes. Il faut donc que : $\boldsymbol{X < X_{s2} = \dfrac{4\pi\lambda}{d}}$.

f. De 3.*c.* on tire : $F_{orient} = \dfrac{B}{2}\lambda^2 \dfrac{u_1^2}{4}\left(q_s^4 + k_1^2 q_s^2\right)$, ce qui car $\dfrac{1}{\lambda d^3} << \dfrac{1}{\lambda^2 d^2}$

avec : $\lambda dq_s^2 = \pi$, s'écrit : $\boldsymbol{F_{orient} = \dfrac{B}{2}\left\{\dfrac{4}{9} X_s\, \delta X\right\}}$ où : $X_s = \dfrac{2\pi\lambda}{d}$.

Également 3.*c.* $\Rightarrow$ $F_{tot} = \dfrac{B}{2}\left\{X^2 + \dfrac{q_s^2}{4}(X_s - X)\left(\dfrac{8\lambda}{3}\right)^2 \dfrac{\delta X}{X_s} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{8}{3}\right)^2 \lambda^4 \left(\dfrac{\delta X}{X_s}\right)^2 q_s^4\right\}$

$$\boldsymbol{F_{tot} = \dfrac{B}{2}\left\{X^2 - \dfrac{4}{9}(\delta X)^2\right\}}.$$

Par conséquent : $\boldsymbol{F_{comp} = F_{tot} - F_{orient} = \dfrac{B}{2}\left\{X^2 - \dfrac{4}{9} X \delta X\right\}}$.

Remarque : Calcul valable pour $\delta X > 0$ seulement, car on a utilisé l'expression $u_1(\delta X)$ pour introduire δX.

g. On remarque alors qu'au-dessus du seuil, $F_{orient} > 0$, mais que l'énergie de compression F_{comp} est suffisamment diminuée pour que F_{tot} soit inférieure à $\dfrac{B}{2}X^2$, l'énergie de compression d'un échantillon non distordu. Le flambement apporte donc, bien sûr, un gain d'énergie pour l'échantillon. Ce gain est nul au seuil.

h. On ne peut pas dire à ce stade comment est déterminée la phase ou la direction de l'ondulation des couches.

V. **Dynamique de l'ondulation des couches smectiques**

1. On restreint momentanément l'étude aux déformations de $\vec{q}$ parallèle à $\vec{x}$ dans le développement :

$$u = Xz + \sum_{n,\vec{q}} U_{n,\vec{q}} \sin\frac{n\pi z}{d} \exp j\,\vec{q}.\vec{r}$$

$$\downarrow$$

$$\delta u$$

L'énergie élastique de l'échantillon s'écrit :

$$F = \frac{1}{2} B \int \left\{ \left[X + \frac{\partial \delta u}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right)^2 \right]^2 + \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial z}\right)^2 \right] \right\} dV$$

$$F = \frac{1}{2} B \int \left[X^2 + \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right)^2 - X\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right)^2 + \lambda^2 [\quad\quad] \right] dV,$$

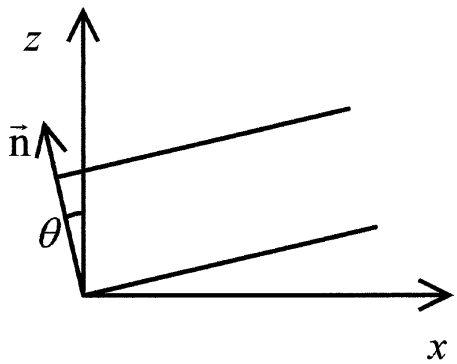
à l'ordre le plus bas en δu.

Avec : $\int \left(\frac{\partial \delta u}{\partial z}\right)^2 dV = S\,d \sum \left| U_{n,\vec{q}} . \frac{n\pi}{d} \right|^2$, . . . , $\int \left(\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}\right)^2 dV = S\,d \sum \left| U_{n,\vec{q}} q^2 \right|^2$,

on a : $\mathbf{F = \frac{1}{2} BSd \left\{ X^2 + \sum_{n,\vec{q}} \left| U_{n,\vec{q}} \right|^2 \left[\frac{n^2 \pi^2}{d^2} - X\,q^2 + \lambda^2 \left(q^4 + q^2 \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \right) \right] \right\}}$.

Dans cette expression, on a formellement rajouté les contributions des déformations de $\vec{q}$ non parallèles à $\vec{x}$. Ceci est possible puisqu'elles sont simplement additives (cf. I.3.*d*.) dans la mesure où θ est petit, c'est-à-dire au 1er ordre en $U_{n,\vec{q}}$. Dans cette limite, une déformation quelconque des couches peut être considérée comme une superposition linéaire de modes de déformation indépendants, individuellement couplés à la dilatation X.

2. *a.*



$\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ (cf. I.2.*c*.).

Considérons le mode $(n, \vec{q})$, et choisissons l'axe x parallèlement à $\vec{q}$. Son amplitude de déformation s'écrit : $U_{n,\vec{q}} \sin\frac{n\pi z}{d} \exp j\,\vec{q}.\vec{x},$

et son inclinaison : $\Theta_{n,\vec{q}} = j\,q\,U_{n,\vec{q}}$.

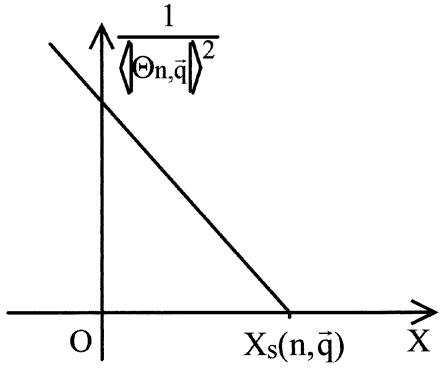
Par conséquent : $$F_{n,\vec{q}} = \frac{1}{2} BSd \left\{ \frac{n^2\pi^2}{d^2 q^2} - X + \lambda^2 \left(q^2 + \frac{n^2\pi^2}{d^2} \right) \right\} \left| \Theta_{n,\vec{q}} \right|^2 .$$

La décomposition en série de Fourier étant unique, $\Theta_{n,\vec{q}}$ s'identifie à la composante de Fourier de l'inclinaison des couches de vecteur d'onde $\left(\frac{n\pi}{d}, \vec{q} \right)$.

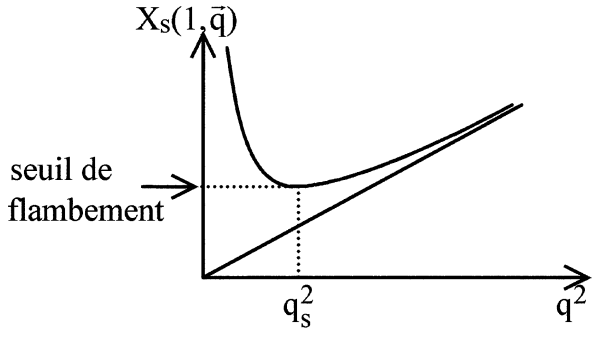
b. La thermodynamique distribue $\frac{1}{2} k_B T$ par degré de liberté, c'est-à-dire par mode, en moyenne. On en déduit :

$$\langle |\Theta_{n,\vec{q}}|^2 \rangle = \frac{k_B T}{BSd \left\{ \frac{n^2\pi^2}{d^2 q^2} - X + \lambda^2 \left(q^2 + \frac{n^2\pi^2}{d^2} \right) \right\}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\langle |\Theta^2_{n,\vec{q}}| \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{BSd \left\{ \frac{n^2\pi^2}{d^2 q^2} - X + \lambda^2 (\;) \right\}}} .$$

c. $\frac{1}{\langle |\Theta_{n,\vec{q}}|^2 \rangle} = \frac{BSd}{k_B T} \left\{ X_s(n,\vec{q}) - X \right\}$ avec : $X_s(n,\vec{q}) = k_n^2 \left(\lambda^2 + \frac{1}{q^2} \right) + \lambda^2 q^2$, et : $k_n = \frac{n\pi}{d}$.



L'amplitude du mode $(n, \vec{q})$ diverge lorsque $X \to X_s(n,\vec{q})$. Par contre, si $X < 0$ (compression), l'amplitude du mode est diminuée : Effet stabilisateur, car on tend les couches. Le 1er mode à diverger est celui de plus petit $X_s(n,\vec{q})$; c'est-à-dire tel que $n = 1$ et $q = q_s$.



d. Lorsque X est augmenté, l'amplitude de tous les modes augmente. Celui qui diverge le premier est $(n = 1, q = q_s)$. Il produit la transition de flambement discutée en IV.

3. a. $\dot{F} = \int \dot{f}\, dv$ = variation d'énergie du système par unité de temps.

$\dot{f}$ = densité de puissance dissipée (< 0).

$\dot{f} = -\vec{\gamma} . \vec{\omega} = -\eta\, \omega^2 = -\eta\, \dot{\theta}^2$

b. On a : $\dot{F} = -\eta \int \dot{\theta}^2\, d\,V = -\eta\, S\, d \sum_{n,\vec{q}} \left|\dot{\Theta}_{n,\vec{q}}\right|^2$, en utilisant l'égalité de Bessel-Parseval.

c. $F = \sum_{n,\vec{q}} F_{n,\vec{q}} = \frac{1}{2} BSd \sum_{n,\vec{q}} \left\{\frac{n^2\pi^2}{d^2 q^2} - X + \lambda^2\left(q^2 + \frac{n^2\pi^2}{d^2}\right)\right\} \left|\Theta_{n,\vec{q}}\right|^2$

$\dot{F} = \frac{1}{2} BSd \sum_{n,\vec{q}} \{\ \}(\Theta_{n,\vec{q}}\, \dot{\Theta}^*_{n,\vec{q}} + c.c.)$.

Remarque : $\Theta^*_{n,\vec{q}} = \Theta_{n,-\vec{q}}$; par conséquent, en regroupant les termes complexes conjugués avec les termes provenant du choix de $-\vec{q}$ dans la sommation, on a :

$$\dot{F} = BSd \sum_{n,\vec{q}} \{\ \}\Theta_{n,\vec{q}}\, \dot{\Theta}^*_{n,\vec{q}} = -\eta\, S\, d \sum_{n,\vec{q}} \dot{\Theta}_{n,\vec{q}}\, \dot{\Theta}^*_{n,\vec{q}}\,.$$

On en déduit l'équation différentielle :

$$\sum_{n,\vec{q}} \left[B\{\ \}\Theta_{n,\vec{q}} + \eta\, \dot{\Theta}_{n,\vec{q}}\right] \dot{\Theta}^*_{n,\vec{q}} = 0$$

d. L'indépendance des $\dot{\Theta}_{n,\vec{q}}$ entre eux conduit à l'équation différentielle :

$$B\left\{\frac{k_n^2}{q^2} - X + \lambda^2\left(q^2 + k_n^2\right)\right\}\Theta_{n,\vec{q}} + \eta\, \dot{\Theta}_{n,\vec{q}} = 0,$$

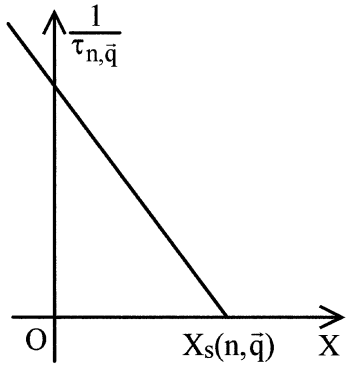
pour chaque $\Theta_{n,\vec{q}}$.

e. Par intégration, on déduit la loi de retour à l'équilibre :

$$\Theta_{n,\vec{q}} = \Theta_{n,\vec{q}}\,(0) \exp -\frac{t}{\tau_{n,\vec{q}}},$$

et $\frac{1}{\tau_{n,\vec{q}}} = \frac{B}{\eta}\left\{\frac{k_n^2}{q^2} - X + \lambda^2\left(q^2 + k_n^2\right)\right\} = \frac{B}{\eta}\left(X_s(\vec{n};\ \vec{q}) - X\right)$

f.

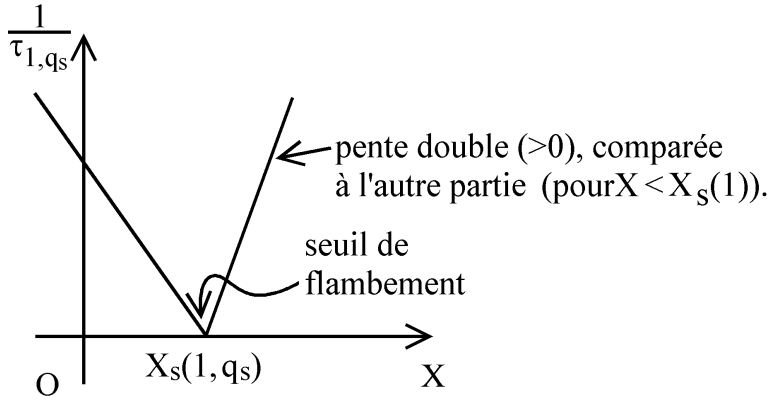


X ajoute une raideur supplémentaire aux couches. Par conséquent les fluctuations sont plus rapidement ramenées à zéro en présence de la compression (X < 0), et leur amplitude est statistiquement plus faible (cf. 2.*c*.) alors. Inversement en dépression. Il y a un ralentissement critique en approchant la transition de flambement du mode (n, $\vec{q}$).

g. Lorsque X est augmenté, tous les modes sont ralentis. Celui tel que n = 1 et $q = q_s$ est le plus ralenti. Il reste de plus en plus longtemps, avec une amplitude de plus en plus grande (cf. 2.*c*.) jusqu'à la transition.

h. La phase de l'ondulation des couches après la transition est donc celle du mode (n = 1, $q = q_s$) qu'on a figé au moment de la transition.

i. Pour un même écart à la transition $\left|X - X_s(1)\right|$, la constante de temps du mode (1, q_s) est 2 fois plus courte après qu'avant la transition (cf. Pb.A).



Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

Épreuve A : Composition de Chimie - Session : 1994

par A. FUCHS, P. LEMETTAIS, C. RIPERT et D. ZANN

PARTIE A/ LA LIAISON HYDROGENE

I INTRODUCTION

I.1/

I.1.1/ Les composés hydrogénés sont apolaires : les interactions intermoléculaires sont donc de type dipôle induit - dipôle induit et leur importance augmente avec la polarisabilité des molécules (et donc leur taille) .

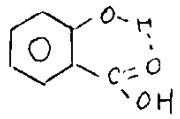
I.1.2/ L'anomalie observée pour NH_3 et H_2O est due à l'existence , en plus des liaisons de Van der Waals , de liaisons hydrogène .

Comparaison entre les deux familles (par exemple : Téb(H_2S) > Téb(PH_3)) : ici, il s'agit de molécules polaires , H_2S étant plus polaire que PH_3 les interactions de type dipôle permanent- dipôle permanent sont plus importantes pour H_2S .

I.2/ Liaison hydrogène

- condition d'existence : pour qu'il y ait possibilité de formation d'une liaison hydrogène entre un atome d'hydrogène et un atome B , l'hydrogène doit être lié à un atome A très électronégatif et de petite taille et l'atome B doit posséder un doublet non liant
- représentation schématique : $A^{-\delta}\!\!-\!\!H^{+\delta}\cdots B$
- il s'agit d'une liaison de nature électrostatique ; la géométrie la plus favorable correspond à un alignement des trois atomes A ,H et B
-énergie : quelques dizaines de $kJ.mol^{-1}$ (le 1/10 de l'énergie d'une liaison covalente)
-il peut s'agir d'une liaison inter ou intramoléculaire

exemples : H-F- - -H-F



- quelques conséquences : températures et chaleurs latentes de changement d'état anormalement élevées , structure lacunaire de la glace , miscibilité de 2 liquides, spectre I.R des alcools, mobilités particulièrement élevées de H^+ et OH^- dans l'eau , structure en hélice des protéines .....

II LIAISON HYDROGENE ET ACIDITE

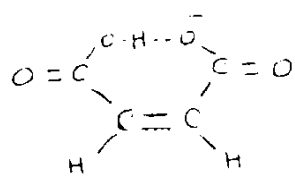
II.1/ L'effet attracteur du groupe -COOH augmente l'acidité

II.2/ pKa2 - pKa1 = 0,3

II.3/ pKa1(ac.succ) < pKa1(ac.ad) : l'effet (-I) de -COOH diminue avec la distance
ΔpKa(ac.succ) > ΔpKa(ac.ad) :la différence est liée à la distance entre les 2 groupes COOH

II.4/ pKa1(Z) < pKa1(E) et pKa2(Z) > pKa2(E)

Dans le cas de l'acide maléïque AH_2 , l'anion AH^- est stabilisé par liaison H :



III LIAISON HYDROGENE ET SPECTROSCOPIE INFRA-ROUGE

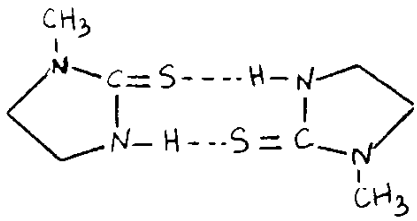
III.1/ Il s'agit d'une spectroscopie d'absorption. Le rayonnement I.R (nombre d'onde variant de 700 à 4000 cm^{-1}) induit des transitions entre niveaux énergétiques de vibration. Ces niveaux sont quantifiés . Le spectre (transmittance = 100 I / I° en fonction du nombre d'onde) est formé de bandes plus ou moins larges du fait qu'à chaque transition de vibration peuvent être associées diverses transitions d'énergie de rotation qui correspondent à des énergies environ 100 fois plus faibles.
Il y a 2 types de vibrations : les vibrations d'élongation des liaisons qui font varier les longueurs des liaisons (vibrations de valence symétriques et asymétriques) et les vibrations de déformation des liaisons qui font varier les angles des liaisons (déformations dans le plan : cisaillement , balancement et déformations hors du plan : torsion , va et vient)

Le nombre d'onde correspondant à la vibration d'élongation d'une liaison dépend de la masse des atomes liés et de l'énergie de la liaison : on peut donner la formule approchée $1/\lambda = 1/2\pi c\ (k/\mu)^{1/2}$
k désigne la constante de force de la liaison et μ la masse réduite
L'énergie mise en jeu par les vibrations de déformation est généralement plus faible : il en résulte des bandes apparaissant à des nombres d'onde plus faibles.
Il existe des règles de sélection : ne sont actives que les vibrations qui entrainent une variation du moment dipolaire de la molécule
Nombre d'onde C-H < N-H < O-H : il y a 2 effets opposés k (C-H) < k (N-H) < k(O-H) mais
μ (C-H) < μ(N-H) <μ(O-H)
Le premier l'emporte .

III.2/

III.2.1/

a) Représentation du dimère :



b) 3468 cm^{-1} correspond à N-H libre
3218 cm^{-1} correspond à N-H affaibli par liaison H

c) On applique la loi de Beer-Lambert : $A = \varepsilon\, l\, [M]$ à 3468 cm^{-1}
ε : coefficient d'extinction moléculaire (qui dépend de la nature de la substance et de la longueur d'onde)
l : longueur de la cuve

	2 M =	D	
E.I	c°	0	$A = \varepsilon\, l\, (c° - 2x)$ donc $x = 1/2\,(c° - A/\varepsilon\, l)$
Eq	c°-2x	x	

$$Kd = [D] / [M]^2 = x / (c° - 2x)^2$$

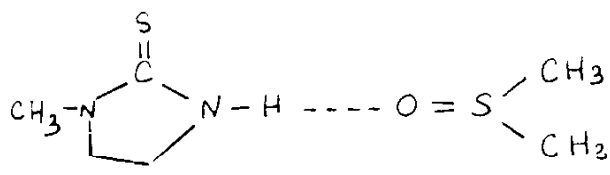
On obtient : $c°/A = 1/\varepsilon\, l + (2\,Kd / \varepsilon^2 l^2)\, A$

Donc : $a = 1 / \varepsilon\, l$ et $b = 2\,Kd / \varepsilon^2 l^2$

d) A.N : $\varepsilon\, l = 243{,}3\ mol^{-1}.L$ et $\varepsilon = 243{,}3\ mol^{-1}.L.cm^{-1}$ $Kd = 108$

III.2.2/

a) Représentation de C



b) On fait un bilan de matière :

	M	DMSO	C	D
E.I	$5{,}35\ 10^{-3}$	$2{,}9\ 10^{-2}$	0	0
Eq	$5{,}35\ 10^{-3}$ -x -2y	$2{,}9\ 10^{-2}$ - x	x	y

à 3468 cm^{-1} : $A = \varepsilon l [M]$ donc $[M] = 2{,}055\ 10^{-3}$ mol L^{-1}
$Kd = [D] / [M]^2 = 108$ donc $[D] = 4{,}56\ 10^{-4}$ mol L^{-1}

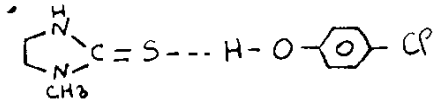
On en déduit $y = 4{,}56\ 10^{-4}$ mol L^{-1} et $x = 2{,}38\ 10^{-3}$ mol L^{-1} , donc $[DMSO] = 2{,}66\ 10^{-2}$ mol L^{-1}

$Ka = [C] / [M][DMSO] = 43{,}5$

c) Kd > Ka
explication : - il y a 1 seule liaison H dans le composé C et 2 liaisons H dans D
- la bande N-H est moins déplacée dans le 2° cas : elle est donc moins affaiblie

III.3/

III.3.1/ Ka mesure le caractère "acide" de M (donneur de H) et Kb mesure son caractère "basique" (accepteur de H)
La structure de C' est en effet :

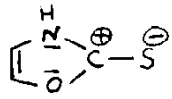


Ka(M1) < Ka(M2) et Kb(M1) > Kb(M2) : S étant plus volumineux que O , la liaison H est plus faible avec S qu'avec O et S accepte plus facilement une charge négative ce qui renforce le caractère acide de M2

III.3.2/ M3 est plus acide et M4 est plus basique

III.4/

III.4.1/ Cela s'explique par le phénomène de mésomérie : il y a aromaticité



La délocalisation de la charge + sur le cycle explique le caractère acide et la charge - sur l'atome de soufre le caractère basique .
C'est l'aromaticité qui compte : la nature de l'atome X importe peu (à condition qu'il possède un doublet non liant)

III.4.2/ La formation du dimère mettant en jeu à la fois le caractère acide et basique de M la valeur de Kd sera donc élevée si les valeurs de Ka et de Kb sont toutes deux élevées : M5 et M6 présentent donc les plus fortes valeurs de Kd

PARTIE B / TITRAGE D'UN ACIDE FAIBLE : L'ION AMMONIUM

I TITRAGE DE L'ION AMMONIUM PAR UNE BASE FORTE EN SOLUTION AQUEUSE

I.1/ Titrage pHmétrique : on mesure le pH de la solution à l'aide d'un millivoltmètre préalablement étalonné , muni de 2 électrodes plongeant dans la solution à étudier : une électrode de mesure (électrode de verre indicatrice d'ions H+) et une électrode de référence (électrode au calomel saturé) . L'équivalence se traduit par un saut de pH .

Titrage conductimétrique : on mesure la conductance de la solution à l'aide d'un conductimètre muni de sa cellule formée de 2 plaques de platine parallèles plongeant dans la solution. La conductance étant fonction linéaire des concentrations de tous les ions présents en solution ,les titrages mettant en jeu des ions peuvent être suivis par conductimétrie . La courbe de titrage est formée de branches de droites (si la dilution est négligeable) qui se coupent au point équivalent .

I.2/ Titrage pHmétrique

équation-bilan du dosage : $NH_4^+ + OH^- \longrightarrow NH_3 + H_2O$

volume équivalent : 10 mL

V=0 pH = 1/2 (pKa + pc) = 5,6 ($[NH_4^+] >> [NH_3]$)

V= 5 mL pH = pKa = 9,2 ($[NH_4^+] = [NH_3] = 4{,}8\ 10^{-3}$ mol L^{-1} >> $[OH^-]$)

V= 10 mL $[NH_3] = 1/110 = 9{,}1\ 10^{-3}$ mol L^{-1} pOH = 1/2 (pKb + pc)

pH = 10,6 ($[NH_3] >> [NH_4^+]$)

Le saut de pH est trop faible à l'équivalence pour envisager l'emploi d'un indicateur coloré (voir Fig. 1)

I.3/ Titrage conductimétrique

La conductivité de la solution s'exprime par la relation : $\gamma = \Sigma\ ci|zi|\lambda i$

V < 10 mL : les ions qui prédominent en solution sont NH_4^+ , Cl^- et Na^+

$[NH_4^+] = (1- 0{,}1V)/(100 + V)$; $[Cl^-] = 1/(100+ V)$; $[Na^+] = 0{,}1V/(100 + V)$ en mol L^{-1} (V en mL)

$\gamma\ (100 + V) = 10^3\ [\ 0{,}1V(\lambda_{Na+}-\lambda_{NH4+}) + \lambda_{Cl-} + \lambda_{NH4+}\ ] = 10^3\ (\ 14{,}9 - 0{,}23\ V\ )$ en mS m^{-1}

V > 10 mL : les ions qui prédominent en solution sont OH- , Cl- et Na+

$[OH^-] = (0{,}1V - 1)/(100 + V)$; $[Cl^-] = 1/(100 + V)$; $[Na^+] = 0{,}1V/(100 + V)$

$\gamma(100 + V) = 10^3\ [0{,}1V(\lambda_{OH-} + \lambda_{Na+}) + \lambda_{Cl-} - \lambda_{OH-}\ ] = 10^3\ (\ -12{,}3 + 2{,}49\ V\ )$

Remarque : ces formules ne s'appliquent pas au voisinage de l'équivalence

Représentation linéaire : on trace $\gamma(100 + V)$ en fonction de V ; on obtient 2 portions de droites (la première a une pente légèrement négative et la seconde a une pente positive) (voir Fig 1)

I.4/ $\tau = 100/\ (\ 1 + h/Ka\ ) = 96$

La réaction n'est donc pas quantitative à 100% à l'équivalence ; la précision théorique du titrage est de 4% ce qui est très médiocre . Le dosage pHmétrique sera peu précis . Le titrage conductimétrique est plus précis dans la mesure où pour obtenir l'équivalence il suffit de prolonger les 2 portions de droites .

II TITRAGE DE L'ION AMMONIUM PAR UNE BASE FORTE EN MILIEU NON AQUEUX

II.1/

II.1.1/ $2\ SH = SH_2^+ + S^-$ $Ki = a(SH_2^+)\ a(S^-)$

II.1.2/ $AH + SH = A^- + SH_2^+$; $B + SH = BH^+ + S^-$

II.1.3/ acide le plus fort : SH_2^+ ; base la plus forte : S^-

acide le plus faible : SH ; base la plus faible : SH

II.1.4/ pH = - log a (SH_2^+) ; neutralité : pH = 1/2 pKi

étendue de l'échelle de pH : 0 à pKi

II.2/

II.2.1/ L'équation bilan du titrage s'écrit : $NH_4^+ + S^- \longrightarrow NH_3 + HS$

Soit K sa constante d'équilibre : log K = pKi - pKa . Le titrage est d'autant plus précis que la valeur de K est élevée : l'éthanol est donc le meilleur solvant.

II.2.2/ V= 0 pH = 1/2 (pKa + pc) = 6,2

V= 5 mL pH = pKa = 10,4

V = 10 mL pOH = 1/2(pKb + pc) = 1/2 (pKi-pKa +pc) = 5,37

pH = pKi - pOH =13,7

Précision théorique = 100 - τ = 100 h / Ka = $4{,}5\ 10^{-2}$ % : bien meilleure (voir Fig. 2)

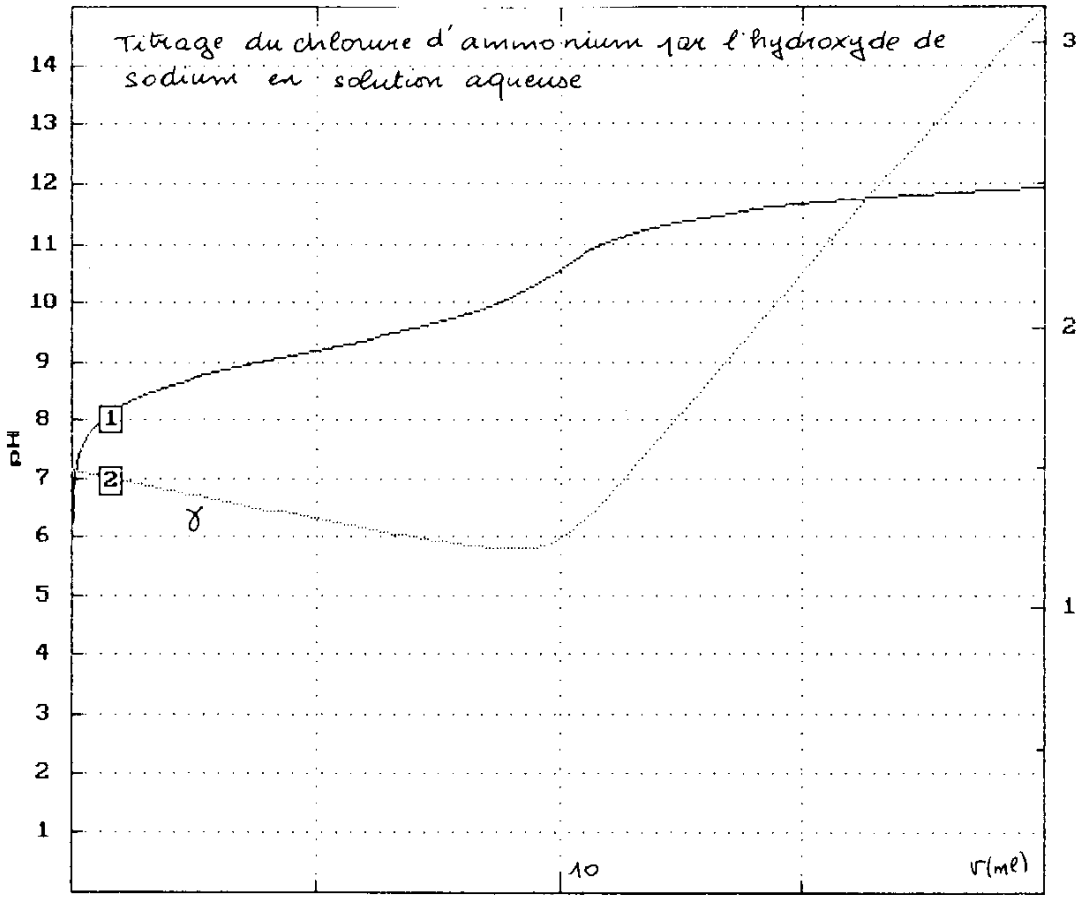


Figure 1

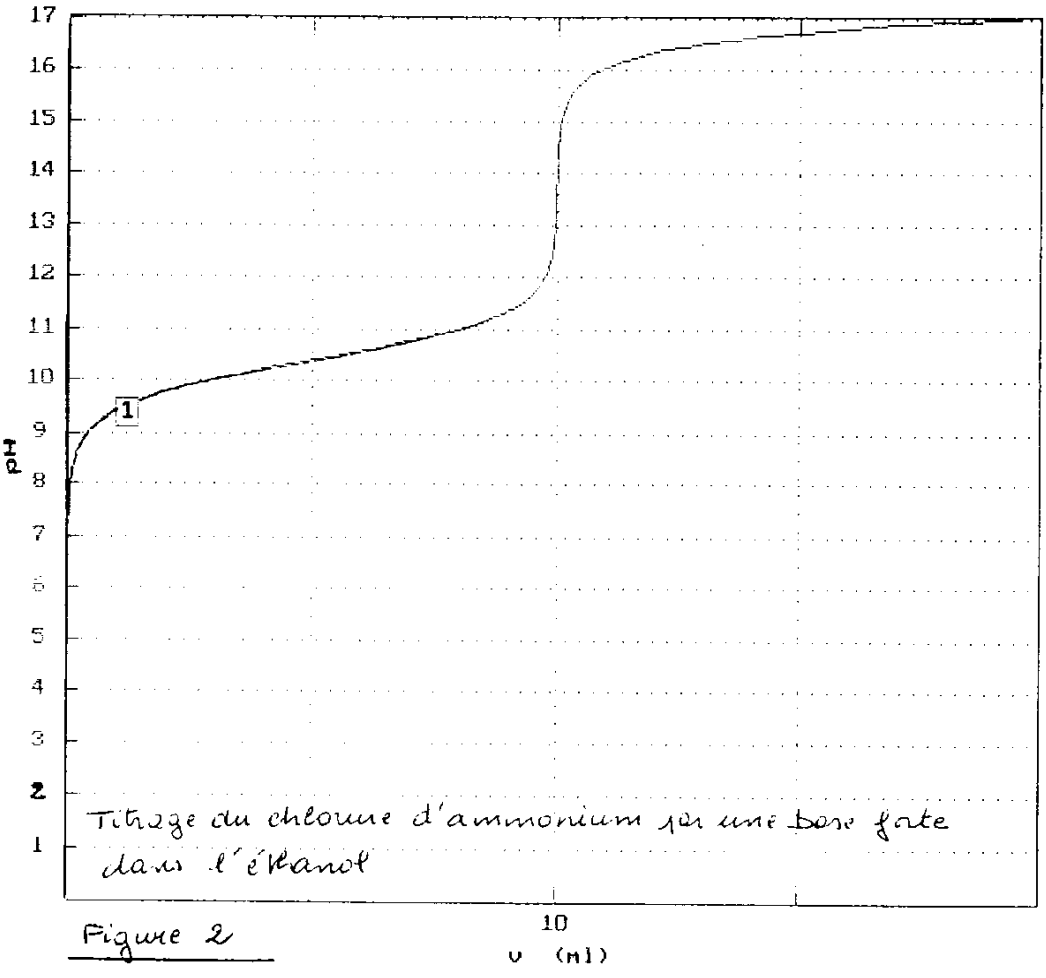


Figure 2

III COMPARAISON DE LA FORCE DES COUPLES ACIDE-BASE DANS L'EAU ET DANS L'ETHANOL

III.1/ $CH_3COOH + SH = CH_3COO^- + SH_2^+$
ε(éthanol) < ε(eau) : il ya donc plus de paires d'ions dans l'éthanol.

III.2/ $CH_3COO^- + NH_4^+ = CH_3COOH + NH_3$; $\log K = pKa(CH_3COOH) - pKa(NH_4^+)$
dans l'eau : log K = -4,5 ;les espèces CH_3COO^- et NH_4^+ prédominent devant CH_3COOH et NH_3
$[CH_3COO^-] = [NH_4^+] = 10^{-2}$ mol L^{-1}
dans l'éthanol : K = 1 , donc $[CH_3COO^-] = [CH_3COOH] = [NH_4^+] = [NH_3] = 0,5\ 10^{-2}$ mol L^{-1}

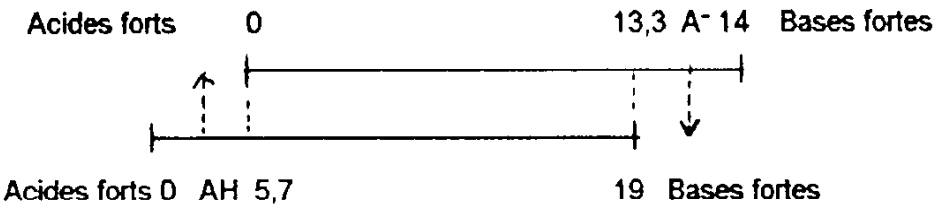
III.3/ NH_4^+ / NH_3 : pKa(éthanol) - pKa(eau) = 1,2
Pour un couple de type BH^+/B , on peut donc considérer que $\Delta pKa = 1,2$
ion anilinium/aniline : pKa(éthanol) = 5,8

CH3COOH/CH3COO- : pKa(éthanol) - pKa(eau) = 5,7
Pour un couple de type AH/A^- , on peut donc considérer que $\Delta pKa = 5,7$
acide benzoïque/ion benzoate : pKa(éthanol) = 9,9

III.4/ On prépare d'abord une solution aqueuse du mélange et on effectue un dosage pHmétrique par une solution de NaOH : on observe une 1° équivalence nette correspondant au dosage de l'acide benzoïque (ce qui permet de déterminer avec une bonne précision la concentration en acide benzoïque) . Le 2° saut de pH correspondant au titrage de l'ion ammonium est trop faible .
On dissout ensuite le mélange dans l'éthanol et on effectue un dosage pHmétrique par une base forte .Les 2 réactions de titrage sont simultanées et on observe un seul saut de pH net , ce qui permet de déterminer avec une bonne précision la somme des 2 concentrations : en utilisant le résultat du dosage en milieu aqueux on peut donc en déduire la concentration en ion ammonium.

III.5/ $H_2A + SH = HA^- + SH_2^+$: Ka1
$HA^- + SH = A^{2-} + SH_2^+$: Ka2
L'attraction dans l'éthanol entre A^{2-} et SH_2^+ est plus forte qu'entre HA^- et SH_2^+ , donc pKa2 - pKa1 augmente lorsqu'on passe de l'eau à l'éthanol.

III.6/ Décalage des échelles de pH pour les couples de type AH/A^- : $\Delta pKa = 5,7$



AH est faible dans l'éthanol et fort dans l'eau si : 0 < pKa(éthanol) < 5,7

III.7/ A^- est faible dans l'eau et forte dans l'éthanol si : 13,3 < pKa(eau) < 14

IV DETERMINATION DU PRODUIT IONIQUE D'UN SOLVANT

IV.1/ maintenir la force ionique constante

IV.2/ $e = 60 \log([SH_2^+]_+/[SH_2^+]_-)$ en mV
e_1 = 60 mV, HCl est donc un acide fort dans l'éthanolamine.
e_2 = 0 , NH_4^+ est aussi un acide fort.
$e_4 - e_3$ = 60 mV , KOH est une base forte.

IV.3/ NH_3 n'ayant pas de propriété basique dans l'éthanolamine , e ne varie pas (sauf s'il y a dilution)

IV.4/ Ki vrai = $a(SH_2^+)\, a(S^-) = \gamma(SH_2^+)\,[SH_2^+]\,\gamma(S^-)\,[S^-] = \gamma^2\,[SH_2^+]\,[S^-]$
(γ dépend de la force ionique) ; on note : Ki apparent = $[SH_2^+]\,[S^-]$
Pour la pile n°3 : $[SH_2^+]_+ = 0{,}1$ mol L^{-1}
$[SH_2^+]_- = Ki_{app} / [S^-] = 10\ Ki_{app}$ en mol L^{-1}
$e_3 = 210$ mV $= 60 \log(0{,}01 / Ki_{app})$; $\log Ki_{app} = -5{,}5$

IV.5/ L'autoprotolyse du solvant n'est pas négligeable :
solution A : $[SH_2^+] = 10^{-3} + x$ et $[S^-] = x$; $Ki_{app} = 10^{-3}\,(10^{-3} + x)$; $x = 1{,}35\ 10^{-3}$ mol L^{-1}
$[SH_2^+] = 2{,}35\ 10^{-3}$ mol L^{-1}
$e = 60 \log (0{,}1 / 2{,}35\ 10^{-3}) = 97{,}7$ mV (et non 120 mV qui serait la valeur calculée en négligeant l'autoprotolyse du solvant)

PARTIE C/ STABILITE D'UN INDICATEUR COLORE : DECOLORATION DE LA PHENOLPHTALEINE

1/ B est beaucoup plus conjugué , les niveaux d'énergie sont plus reserrés et la transition entre 2 niveaux correspond à une absorption dans le visible.

2/

2.1/ $[OH^-]o >> [B]o$: donc $[OH^-]$ reste constante au cours du temps

	B	OH^-	C
E.I	$[B]o$	$[OH^-]o$	0
t	$[B]t$	$[OH^-]o$	$[B]o - [B]t$
Eq	$[B]e$	$[OH^-]o$	$[B]o - [B]e$

à l'instant t : $d[B]/dt = -k_2\,[OH^-]o[B]t - k_{-2}([B]t - [B]o)$

à l'équilibre : $0 = -k_2\,[OH^-]o[B]e - k_{-2}([B]e - [B]o)$

On a donc : $d[B]/dt = -(k_2[OH^-]o + k_{-2})([B]t - [B]e)$
$Ln[([B]t - [B]e) / ([B]o - [B]e)] = -(k_2\,[OH^-]o + k_{-2})\,t$

D'après la loi de Beer-Lambert , $A = \varepsilon\, l\, [B]$ à 550 nm (puisque seul B absorbe dans le visible)
On obtient donc la relation : $Ln[(At - Ae) / (Ao - Ae)] = -\alpha t$ avec : $\alpha = k_2[OH^-]o + k_{-2}$
$F(Ao,At,Ae) = (Ao - Ae) / (At - Ae)$
Il suffit de tracer Ln F en fonctionde t : on obtient une droite de pente α

2.2/ $K = k_2 / k_{-2}$; $k_2 = \alpha K / (1 + [OH^-]o\,K)$

2.3/ $K = [C]e / [B]e\,[OH^-]o = ([B]o - [B]e) / [B]e\,[OH^-]o = (Ao - Ae) / Ae\,[OH^-]o$

A.N : $K = 55{,}9$
$k_2 = 7{,}21\ 10^{-3}$ mol^{-1} L s^{-1}
$k_{-2} = 1{,}29$ 10-4 s^{-1}

3/ Dans le cas d'une réaction élémentaire entre 2 ions de charge algébrique z_A et z_B , la constante de vitesse varie avec la force ionique I du milieu selon la loi : $\log k = \log k^\circ + z_A z_B\, I^{1/2}$
k° désigne la constante de vitesse relative à une solution infiniment diluée .

1°expérience : I = 0,02 mol L^{-1} et $k_2 = 7{,}21\ 10^{-3}$ mol^{-1} L s^{-1}
2°expérience : I' = 0,03 mol L^{-1} et $k_2' = 80{,}5\ 10^{-4}$ mol^{-1} L s^{-1}

Le fait que k2 augmente lorsque I augmente prouve qu'il s'agit d'une réaction entre 2 ions de même signe.
$\log k'_2 - \log k_2 = 0{,}048$; $z_A = -2$ et $z_B = -1$; $z_A z_B\,(I'^{1/2} - I^{1/2}) = 0{,}063$
La relation est approximativement vérifiée.

4/

4.1/ L'addition d'alcool fait diminuer la permittivité du milieu

4.2/ La théorie du complexe activé relie la constante de vitesse à l'enthalpie libre d'activation ΔG^* par la relation : $k_2 = k_B T/h \exp(-\Delta G^*/RT)$

$$\Delta G^* = \Delta G_1 + z_A z_B e^2 N / 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r d_{AB}$$

Puisque les ions sont de même signe , si ε_r diminue, ΔG^* augmente et k_2 diminue.

PARTIE D/ DETERMINATION D'UNE CONSTANTE D'ACIDITE PAR SPECTROSCOPIE

I ETUDE DES POLYENES LINEAIRES ALTERNES

I.0/ Cela s'explique par le phénomène de mésomérie :

$$C_aH_2=C_bH-C_cH=C_dH_2 \longleftrightarrow {}^+CH_2-CH=CH-CH_2^-$$

conséquence : $l(C_a-C_b) > l(C=C)$ et $l(C_c-C_b) < l(C-C)$

I.1/

I.1.1/ $L = (n-1)\, l$

I.1.2/ $-h^2/8\pi^2 m \, d^2\phi/dx^2 = E\phi$ si $-L/2 < x < L/2$

A l'extérieur : $\phi(x) = 0$

I.1.3/ On doit résoudre l'équation différentielle précédente :

La solution générale peut s'écrire : $\phi = A \sin(ax + b)$ avec $a = 2\pi (2mE)^{1/2}/h$

Conditions aux limites : la fonction étant continue , $\phi(-L/2) = \phi(L/2) = 0$

ce qui entraîne la relation : $a = j\pi / L$ où j est un entier

L'énergie est quantifiée : $E_j = j^2 h^2 / 8m L^2$

I.1.4/ Le polyène CnHn+2 possède n électrons π qui occupent n/2 niveaux d'énergie . Le dernier niveau d'énergie occupé correspond donc à j = n/2 et le premier niveau vacant à j + 1 = n/2 + 1

$E = E_{j+1} - E_j = h^2 (n+1) / 8 m L^2$; comme $L = (n-1)\, l$ $E = h^2 (n+1) / 8m l^2 (n-1)^2$

I.2/ MODELE DE HÜCKEL

I.2.1/ Les orbitales moléculaires Φ sont des combinaisons linéaires des orbitales atomiques ϕ_i : $\Phi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + \ldots\ldots$

On résout l'équation de Schrödinger par la méthode de variation en cherchant à minimiser

$$E = \frac{\int \Phi H \Phi \, d\tau}{\int \Phi^2 d\tau}$$

Dans l'équation précédente , E représente l'énergie de l'O.M , H désigne l'opérateur hamiltonien

On pose : $\alpha_i = \int \phi_i H \phi_i \, d\tau$: intégrales coulombiennes

$\beta_{ij} = \int \phi_i H \phi_j \, d\tau$: intégrales d'échange

$s_{ij} = \int \phi_i \phi_j \, d\tau$: intégrale de recouvrement

On admet , dans l'approximation de Hückel , que toutes les intégrales coulombiennes sont égales , que les intégrales d'échange sont nulles pour 2 atomes non liés et qu'elles sont toutes égales pour 2 atomes voisins , que les intégrales de recouvrement sont nulles si $i \neq j$ (les orbitales atomiques étant normalisées $s_{ii} = 1$)

I.2.2/

$$\begin{vmatrix} \alpha-E & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha-E & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha-E & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha-E & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha-E & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & \alpha-E \end{vmatrix}$$

I.2.3/ Il s'agit comme précédemment de la transition j = n/2 à j+1

$E' = 2\beta \{ \cos [(n+2)\pi / 2 (n+1)] - \cos [n \pi / 2 (n+1)] \} = - 4 \beta \sin [\pi / 2(n+1)]$

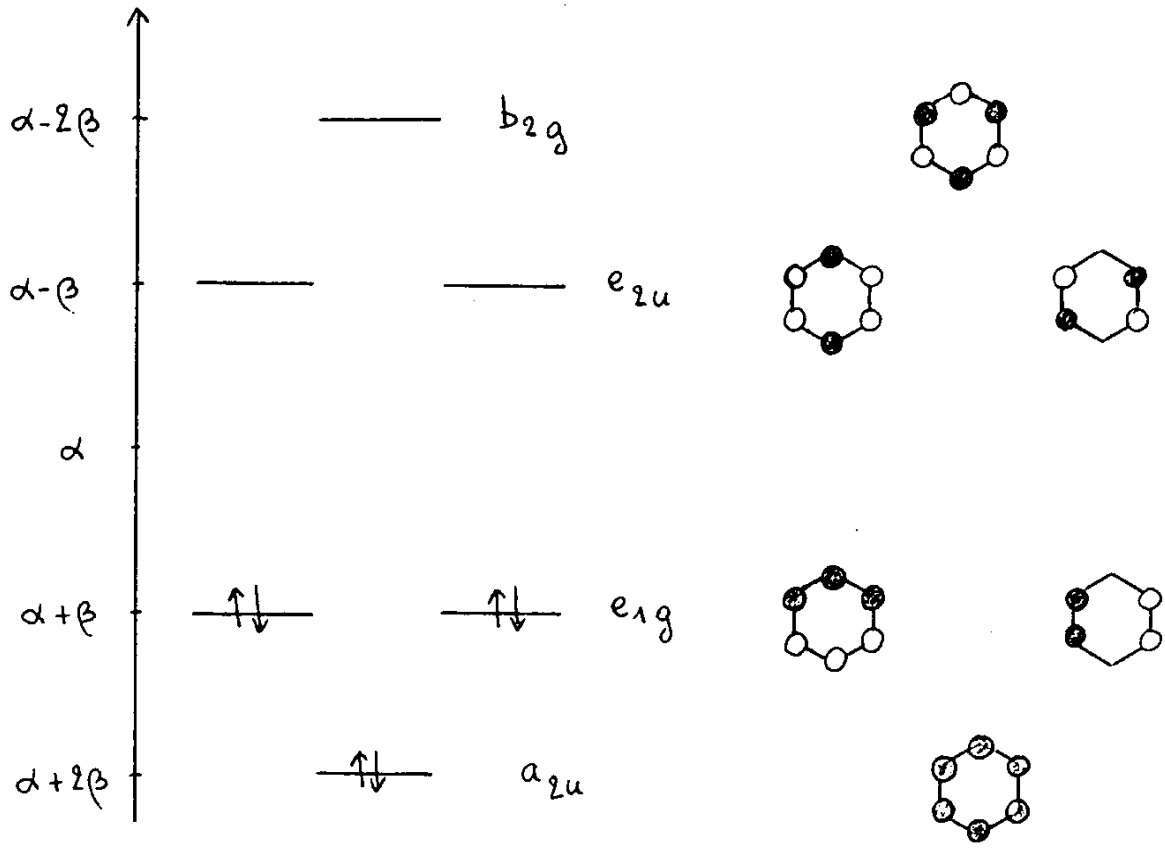
I.3/ Pour $n \to \infty$ $E' = - 4 \beta \pi / 2 (n+1) = E$; donc $\beta = - h^2 / 16 \pi m l^2$

Pour 1 mole : $\beta = -h^2 N / 16 \pi m l^2 = - 284$ kJ mol^{-1}

II ETUDE DES SPECTRES DE COMPOSES AROMATIQUES

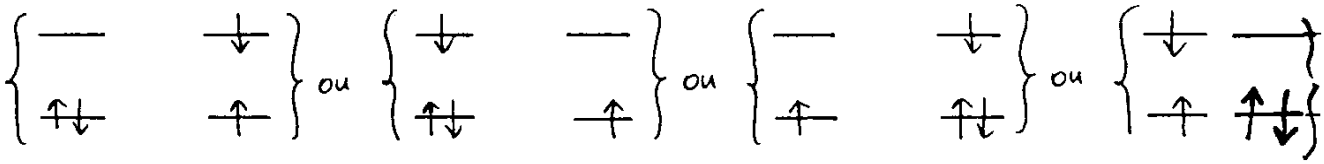
II.1/ j= 0 : E= α + 2 β ; j = 1 ou -1 : E = α + β ; j = 2 ou -2 : E = α - β ; j = 3 : E = α - 2 β

Représentation des niveaux d'énergie **Symétrie des orbitales**

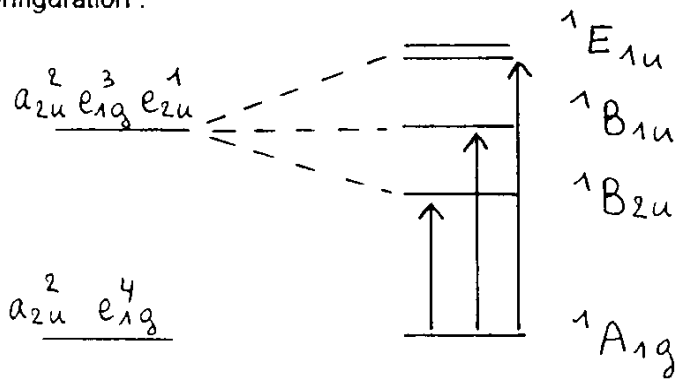


$\Delta E = 2 \beta = h c / \lambda$: $\lambda = 203$ nm

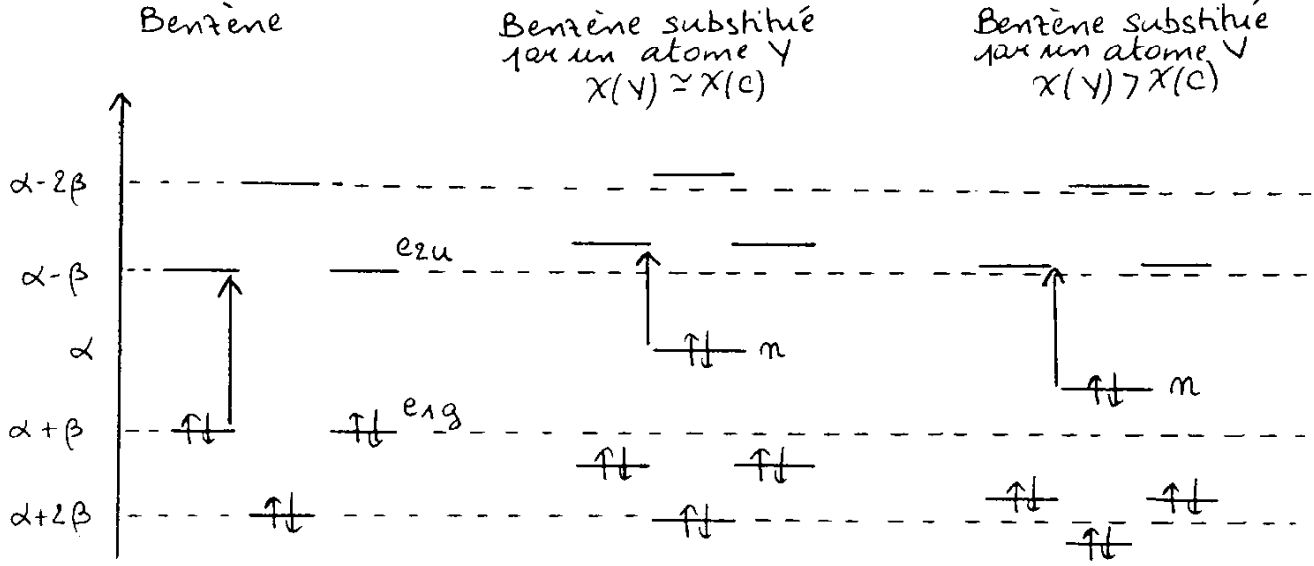
Il y a 4 possibilités pour la transition monoélectronique entre les 2 paires de niveaux (α+ β) et (α - β) comme le montre le schéma ci-dessous :



A la configuration $(a_{2u})^2(e_{1g})^3(e_{2u})^1$ correspondent plusieurs états électroniques distincts appelés termes de la configuration :



II.2/ La substitution d'un H par un atome de même électronégativité que C et possédant un doublet non liant , entraîne l'apparition d'un nouveau niveau n d'énergie α et provoque une augmentation d'énergie des niveaux e_u et b_{2g} ainsi qu'une diminution d'énergie des niveaux e_{1g} et a_{2u}.
Si l'électronégativité du substituant augmente , l'énergie du niveau n diminue , la perturbation devient de plus en plus faible pour les niveaux e_u et b_{2g} et de plus en plus forte pour les niveaux e_{1g} et a_{2u}.

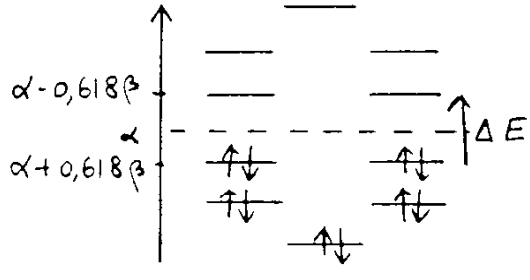


II.3/ Comparaison des électronégativités : $O^- < NH_2 < OH$
Avec O^- , la perturbation est donc faible ; la transition $n \rightarrow e_{2u}$ est nettement moins énergétique que la transition $e_{1g} \rightarrow e_{2u}$ du benzène non substitué : O^- a un effet bathochrome important.
Avec OH , la perturbation est importante et le schéma précédent montre que la transition $n \rightarrow e_{2u}$ a alors pratiquement la même énergie que la transition $e_{1g} \rightarrow e_{2u}$ du benzène non substitué .
Quand l'électronégativité du substituant augmmente, l'effet bathochrome diminue : $\lambda \rightarrow$ 203 nm .
Dans le cas du substituant NH_2 ,on observe une situation intermédiaire.

II.4/ On cherche d'abord les niveaux d'énergie du naphtalène (10 atomes de C)

$$E_j = \alpha + 2\beta \cos(j\pi/5)$$

$j = 0 : E = \alpha + 2\beta$; $j = 1$ ou $-1 : E = \alpha + 1{,}618\beta$; $j = 2$ ou $-2 : E = \alpha + 0{,}618\beta$
$j = 3$ ou $-3 : E = \alpha - 0{,}618\beta$; $j = 4$ ou $-4 : E = \alpha - 1{,}618\beta$; $j = 5 : E = \alpha - 2\beta$



Transition $\Delta E = -2.0{,}618\,\beta$
λ (naphtalène) = 328 nm

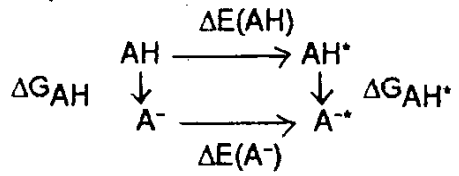
naphtol : on doit ajouter l'incrément dû à OH λ(naphtol) = 328 + 7 = 335 nm
base conjuguée : incrément dû à O- λ(base conjuguée) = 328 + 32 =360 nm

Cette méthode très simple permet de donner un bon ordre de grandeur des longueurs d'onde.

III DETERMINATION DU PKa DU NAPHT-2-OL DANS SON PREMIER ETAT EXCITE

III.1/ La transition qui conduit de l'état fondamental au 1° état excité du naphtol est de type $n\rightarrow\pi^*$: 1 électron d'un doublet non liant de l'oxygène passe dans une orbitale π^* , ce qui fait apparaitre une charge + sur O selon : $Ar^-\text{-}O^+\text{-}H$; cela renforce donc le caractère acide : $pKa^* < pKa$

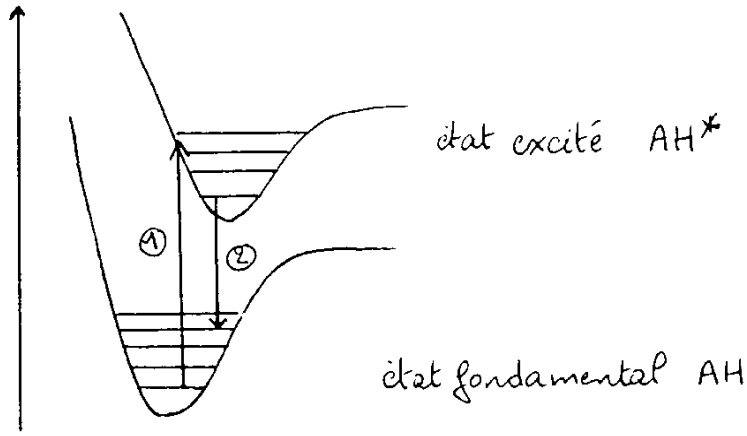
III.2/ En assimilant ΔH° et ΔG° , on peut obtenir la relation demandée à l'aide d'un cycle thermochimique :



$\Delta G_{AH} = -RT \ln Ka = 2{,}3\ RT\ pKa$; $\Delta G_{AH^*} = 2{,}3\ RT\ pKa^*$

On a donc : $\Delta E(AH) = 2{,}3\ RT\ pKa + \Delta E(A^-) - 2{,}3\ RT\ pKa^*$

III.3/ Lorsque la molécule AH absorbe l'énergie correspondant à σ(AH) (transition marquée 1 sur le schéma) , elle passe dans un état vibrationnellement excité de AH* qui peut perdre son énergie vibrationnelle et atteindre un niveau plus bas de celle-ci (relaxation vibrationnelle) .
L'état excité , vibrationnellement relaxé, peut retourner dans un état fondamental AH vibrationnellement excité en émettant une radiation de nombre d'onde σ'(AH) (transition marquée 2 sur le schéma) : cette émission s'appelle fluorescence.



On voit que $\sigma(AH) \neq \sigma'(AH)$ et on peut estimer : $\Delta E(AH) = 1/2\ h\ c\ (\ \sigma(AH) + \sigma'(AH)\ )$ pour 1 molécule .
$pKa^* = pKa + N\ (\ \Delta E(A^-) - \Delta E(AH)\ ) / 2{,}3\ RT = pKa + N\ h\ c\ (\ \sigma(A^-) + \sigma'(A^-) - \sigma(AH) - \sigma'(AH)\ ) / 4{,}6\ RT$
A.N : $pKa^* = 3{,}0$

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

Épreuve C : Composition de Chimie (applications) - Session : 1994

par Bernard BRÉHON, Alain FUXA et Anne SERANI
Agrégés Préparateurs à l'ENS* - Département de Chimie
24, rue Lhomond - 75231 Paris Cedex 05

Partie 1
Etude Théorique de la Structure et de la Réactivité des Composés Carbonylés

I. Réactivité du formaldéhyde

I.1.a. En notant 1 le carbone et 2 l'oxygène, le déterminant séculaire caractérisant le système π du formaldéhyde s'écrit:

$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha + \beta - E \end{vmatrix}$$

où $H_{11} = \alpha$ (carbone), $H_{22} = \alpha+\beta$ (oxygène: $\alpha_O=\alpha+\beta$),
$H_{12} = H_{21} = \beta$ (carbone/oxygène: $\beta_{CO}=\beta$),
$S_{11} = S_{22} = 1$, $S_{12} = S_{21} = 0$.
On pose habituellement: $x = (\alpha-E/\beta)$.
D'où à résoudre:

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x + 1 \end{vmatrix}$$

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

La résolution de cette équation conduit à deux valeurs d'énergie:

$E_1 = \alpha + (1 + \sqrt{5})/2\,\beta = \alpha + 1{,}62\,\beta$

$E_2 = \alpha + (1 - \sqrt{5})/2\,\beta = \alpha - 0{,}62\,\beta$ $\qquad (\beta < 0: E_1 < E_2)$

I.1.b. On reporte chacune des valeurs trouvées pour l'énergie dans le système d'équations obtenues en posant le déterminant séculaire, et on utilise la condition de normalisation des orbitales moléculaires. On obtient:

$c_1 (\alpha - E) + c_2 \beta = 0$

$c_1 \beta + c_2 (\alpha + \beta - E) = 0$ $\qquad$ et $c_1^2 + c_2^2 = 1$

* avec la collaboration de Florence Charbonnier

Pour $E = E_1$:

$c_1 = 0{,}62\ c_2$ et $c_1^2 + c_2^2 = 1$

$c_1 = 0{,}53$ et $c_2 = 0{,}85$ $\qquad \psi_1 = 0{,}53\ \chi_1 + 0{,}85\ \chi_2$

Pour $E = E_2$:

$c_1 = -1{,}62\ c_2$ et $c_1^2 + c_2^2 = 1$

$c_1 = 0{,}85$ et $c_2 = -0{,}53$ $\qquad \psi_2 = 0{,}85\ \chi_1 - 0{,}53\ \chi_2$

(seuls importent les signes relatifs des coefficients et pas le signe de chacun des coefficients en particulier)

I.1.c. L'orbitale moléculaire ψ_1, d'énergie la plus basse et correspondant à une combinaison linéaire des orbitales atomiques en phase, est l'orbitale liante π_{CO}. L'orbitale moléculaire ψ_2, la plus haute en énergie et correspondant à une combinaison linéaire des orbitales atomiques en opposition de phases, est l'orbitale moléculaire antiliante π_{CO}^*. D'où le diagramme des orbitales moléculaires du système π:

π_{CO}^* — $E_2 = \alpha - 0{,}62\ \beta$ $\qquad \psi_2 = 0{,}85\ \chi_1 - 0{,}53\ \chi_2$

π_{CO} ⇅ $E_1 = \alpha + 1{,}62\ \beta$ $\qquad \psi_1 = 0{,}53\ \chi_1 + 0{,}85\ \chi_2$ $\qquad (\beta < 0)$

I.2. L'approximation des orbitales frontières consiste à considérer que les interactions dominantes sont celles correspondant aux paires d'orbitales moléculaires occupées et vacantes les plus proches. Lors d'une addition nucléophile sur le groupe carbonyle du formaldéhyde, le nucléophile intervient par sa HOMO (highest occupied molecular orbital) et le formaldéhyde, qui joue le rôle du partenaire électrophile, intervient par sa LUMO (lowest unoccupied molecular orbital), soit l'orbitale π_{CO}^*.

LUMO $\quad \pi_{CO}^*\ \alpha - 0{,}62\ \beta$ — - - - - - ⇅ α HOMO

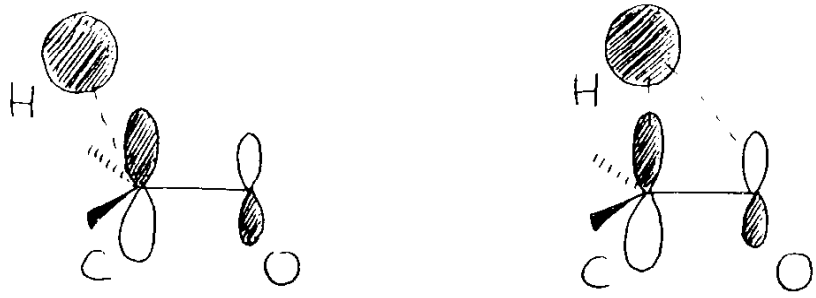
HOMO $\quad \pi_{CO}\ \alpha + 1{,}62\ \beta$ ⇅

électrophile nucléophile

I.3. Le plus gros coefficient dans la LUMO de l'électrophile est celui de l'atome de carbone: $\psi_2 = 0{,}85\ \chi_1 - 0{,}53\ \chi_2$ (1: carbone). Le réactif nucléophile attaque donc le carbone du carbonyle.

I.4. La meilleure approche du réactif est celle assurant le meilleur recouvrement des orbitales frontières. Il s'agit ici de l'orbitale 1s de l'ion

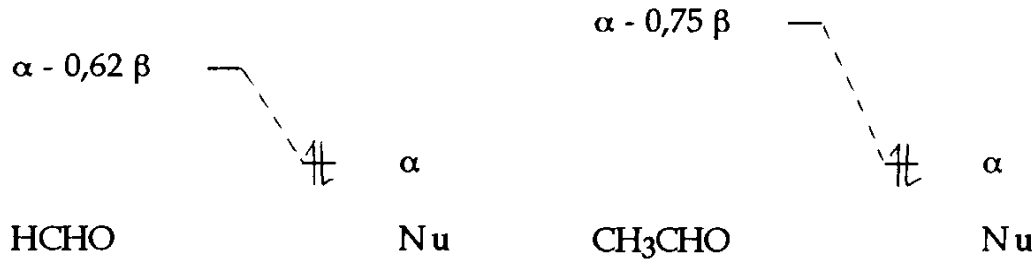
hydrure et de l'orbitale π_{CO}^* du carbonyle. Une approche à 90° assure un recouvrement excellent entre 1s et χ_1 mais il existe alors aussi un recouvrement important entre 1s et χ_2, en opposition de phases, donc défavorable. Une ouverture de l'angle d'approche limite cet effet. Ce phénomène est connu sous le nom d'attaque non-perpendiculaire de Dunitz-Bürgi (1).



II. Réactivité et conformation de l'acétaldéhyde

II.1. L'interaction qui gouverne la réactivité est l'interaction entre HOMO du nucléophile et LUMO du composé carbonylé. La réactivité étant d'autant plus grande que la différence d'énergie HOMO / LUMO est plus faible, on prévoit, vis à vis d'un nucléophile caractérisé par une énergie de HOMO donnée, une réactivité plus grande pour le composé carbonylé dont la LUMO est la plus proche en énergie.

Vis à vis d'un nucléophile dont la HOMO a pour énergie α, le formaldéhyde, dont la LUMO est la plus basse en énergie ($E_2 = \alpha - 0{,}62\beta$), est plus réactif que l'acétaldéhyde (LUMO: $E_3 = \alpha - 0{,}75\beta$).



II.2. On utilise la formule proposée, dans laquelle on introduit:

$E_i = E_2 = \alpha - 0{,}62\beta$ (ψ_2 du fragment formaldéhyde)

$c_{ir} = 0{,}85$ (coefficient de χ_1 dans ψ_2 pour le fragment formaldéhyde)

$c_{js} = 1$ (coefficient de l'unique orbitale atomique du fragment Me)

$\beta_{rs} = 0{,}7\beta$ ($\beta_{C\text{-}Me}$: la liaison impliquée dans la fragmentation est la liaison C-Me)

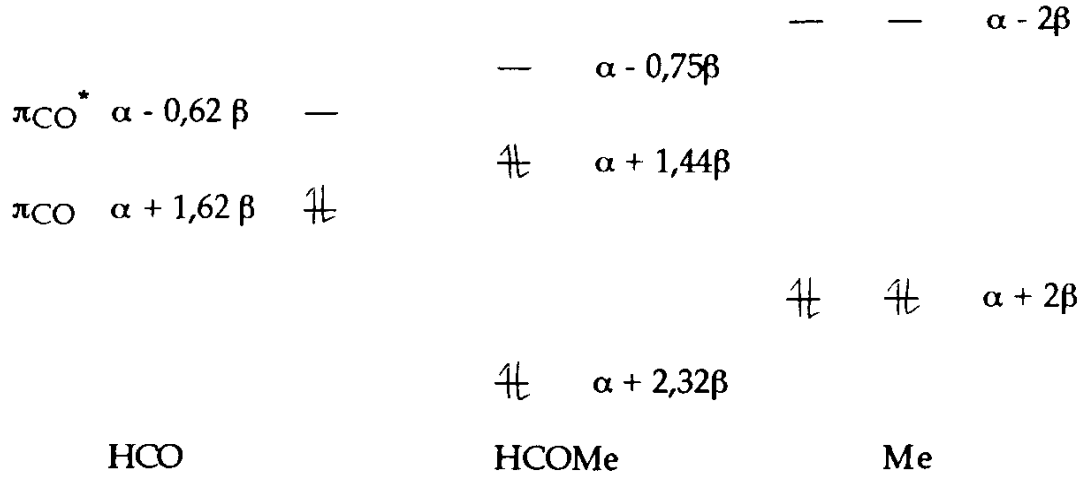
$E_j = \alpha + 2\beta$ ($\alpha_{C\text{-}Me}$: énergie de l'orbitale du fragment Me).

Le calcul donne: $E_3' = \alpha - 0{,}76\beta$ (une perturbation par une orbitale d'énergie plus basse déstabilise l'orbitale perturbée).

Cette valeur est à confronter avec la valeur proposée dans l'énoncé:

$E_3 = \alpha - 0{,}75\beta$. Le résultat est cohérent.

II.3.a. On considère l'interaction entre les systèmes π.



Les différences d'énergie entre les orbitales concernées dans chaque fragment sont respectivement:

ΔE (π^*de HCO et π de Me) = 2,62β pour la construction de ψ_1 de HCOMe

ΔE (π de HCO et π^* de Me) = 3,62β pour la construction de ψ_2 de HCOMe

Par ailleurs, les coefficients du C dans l'orbitale mise en jeu pour le fragment HCO sont respectivement:

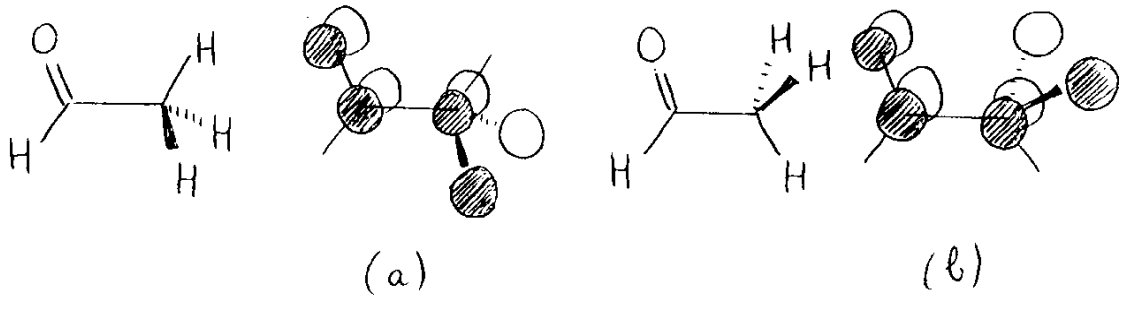
0,85 dans π^*de HCO ($\psi_2 = 0{,}85\,\chi_C - 0{,}53\,\chi_O$) pour la construction de ψ_1 de HCOMe

0,53 dans π de HCO ($\psi_1 = 0{,}53\,\chi_C + 0{,}85\,\chi_O$) pour la construction de ψ_2 de HCOMe

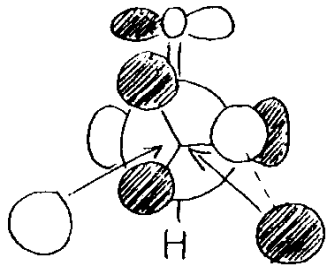
Le transfert d'électrons de l'orbitale liante vers l'orbitale antiliante est d'autant plus efficace que les deux orbitales sont voisines en énergie et que le coefficient du C est plus grand dans l'orbitale du fragment HCO.

L'interaction entre les deux fragments se traduit donc principalement par un transfert d'électrons de π de Me vers π^* de HCO (construction de ψ_1 de HCOMe).

II.3.b. Pour l'interaction principale, qui correspond au transfert d'électrons de π de Me vers π^* de HCO, on constate un meilleur recouvrement pour une conformation de type (a).



II.3.c. Sur une conformation (c), les deux approches de type "non-perpendiculaire" de l'acétaldéhyde par l'ion hydrure ne font pas intervenir les mêmes interactions. Du côté de la liaison C-H perpendiculaire, il existe une interaction de répulsion plus forte entre la HOMO de l'ion hydrure (1s) et l'orbitale 1s du H en α.



II.4.a. ε_r a les dimensions d'une énergie. r_0 est la distance minimale entre atomes non liés: c'est la somme des rayons de Van der Waals des deux atomes (2).

II.4.b. Si on représente les variations de l'énergie stérique en fonction de l'angle dièdre ϕ, on constate l'existence d'un minimum pour $\phi = 15°$ et l'énergie passe par un maximum pour $\phi = 60°$. La barrière d'activation est donnée par la différence entre les énergies du maximum et du minimum:

$\Delta E = E_{60°} - E_{15°}$. Soit: $\Delta E = 1{,}021$ kJ.mol^{-1}.

Les distances interatomiques (allongement = 0,006) et les angles de valence (0,261) étant maintenus fixes, il s'agit d'une barrière de rotation rigide.

II.4.c. On peut considérer que ces résultats sont compatibles avec les analyses effectuées à partir des orbitales de fragments (**II.3.b.**), la conformation "décalée" apparaissant comme défavorisée dans les deux cas, l'angle dièdre assurant une stabilité maximale étant déterminé avec plus de précision par la mécanique moléculaire.

III. Réactivité de l'alcool vinylique, énol de l'acétaldéhyde

III.1. Avec $H_{11} = H_{22} = \alpha$, $H_{33} = \alpha_O = \alpha + 2\beta$

$H_{12} = H_{21} = \beta$

$H_{23} = H_{32} = \beta_{CO} = 0{,}8\beta$

$H_{13} = H_{31} = 0$ (atomes non liés), on obtient:

$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & 0 \\ \beta & \alpha - E & 0{,}8\beta \\ 0 & 0{,}8\beta & \alpha + 2\beta - E \end{vmatrix}$$

III.2. Le système π de l'énol est un système à quatre électrons. Les orbitales frontières sont donc les orbitales ψ_2 (HOMO) et ψ_3 (LUMO). L'énol joue ici le rôle de nucléophile: il intervient donc par sa HOMO:

$$\psi_2 = 0{,}735\chi_1 + 0{,}568\chi_2 - 0{,}370\chi_3$$

On prévoit une attaque d'un réactif électrophile par l'atome de carbone 1, dont l'orbitale atomique porte le plus gros coefficient dans ψ_2.

III.3. Un processus péricyclique est permis du point de vue des considérations de symétrie repectivement par voie photochimique ou par voie thermique suivant que le nombre total de composants (4r)a et (4q+2)s est pair ou impair.
Une sigmatropie 1,3 dans des conditions photochimiques (l'espace interstellaire ne permet pas de réaction par voie thermique) est permise suivant un processus antarafacial, qui correspond à une profonde réorganisation, d'où une énergie d'activation élevée.

III.4. On considère un modèle hétéroatomique d'oxygène à 1 électron (correspondant à la forme où la charge est localisée sur l'atome de carbone 1:, l'oxygène n'apporte qu'un seul électron à la liaison C=O.

III.5. La valeur de la différence des énergies n'a une signification que si chacune des énergies est calculée avec la même référence, ce qui n'est pas le cas ici (valeurs l_0, θ_0, r_0). On ne peut donc pas tirer du tableau fourni une estimation de l'enthalpie de l'équilibre de tautomérie.

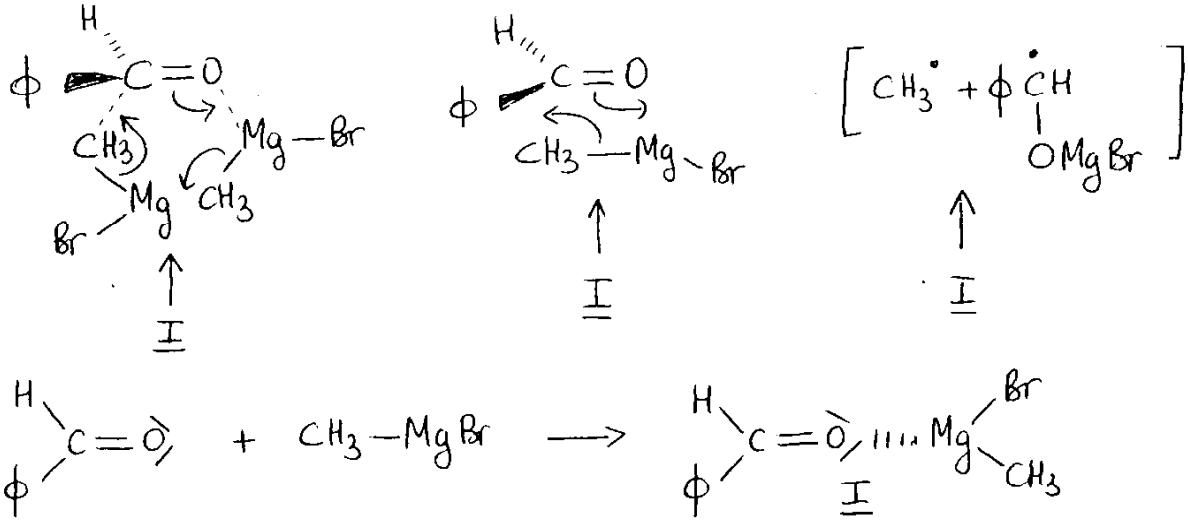
(1) H.B. Bürgi, J.D. Dunitz, J.M. Lehn, G. Wipff *Tetrahedron* **1974**, *30*, 1563-1572.

(2) K.B. Lipkowitz, M.A. Peterson *Chem. Rev.* **1993**, *93*, 2463-2486

Partie 2
Stéréochimie des Additions au Groupe Carbonyle

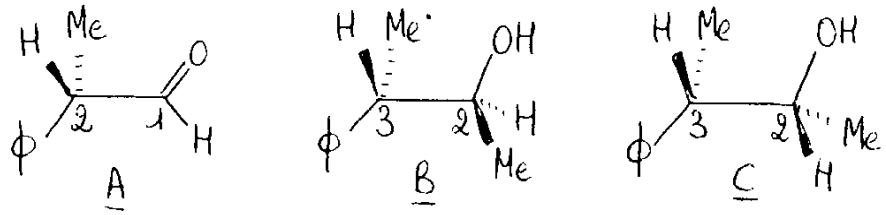
I.1. Le produit obtenu est un alcool secondaire, le 1-phényléthan-1-ol. C'est une addition nucléophile sur le groupe carbonyle, avec assistance électrophile du magnésium.
Deux types de mécanismes ont principalement été proposés: par transfert du groupe carboné de l'organomagnésien avec sa paire d'électrons ou bien par transfert monoélectronique avec passage par un intermédiaire radicalaire.
Pour le transfert du groupe carboné avec sa paire d'électrons, la nature exacte de l'état de transition n'a pas été élucidée; des états cycliques à 4 et 6 centres ont été proposés.

Toutefois, l'existence d'une étape initiale de complexation du métal par le groupe carbonyle est admise dans tous les cas (1, 2).



I.2. L'alcool formé existe sous deux formes énantiomères, dans lesquelles le carbone fonctionnel a respectivement les configurations absolues R et S.
L'attaque peut se faire par le dessus du plan du groupe carbonyle ou par le dessous. Les deux produits sont obtenus et en proportions égales car les vitesses d'approche des réactifs sur les deux faces sont les mêmes.

II.1.



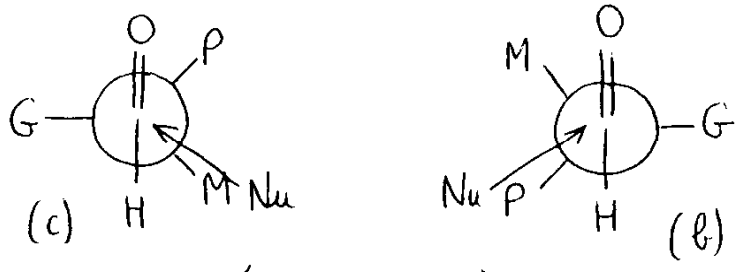
A: le carbone 2 est S (CHO > ϕ > Me > H).
B: le carbone 2 est S (carbone 2: OH > chaine > Me > H) et le carbone 3 est S (carbone 3: chaine > f > Me > H). C: le carbone 2 est R et le carbone 3 est S.
B et C sont des diastéréoisomères.

II.2. Les faces du groupe aldéhyde de A sont dites diastéréotopiques car lorsqu'elles sont attaquées par un même réactif achiral, les produits de la réaction sont diastéréoisomères.
Lors d'une attaque du benzaldéhyde par un réactif achiral, les états de transition correspondant à une approche par l'une ou l'autre face et les produits en résultant sont énantiomères. Les deux faces sont donc énantiotopiques.

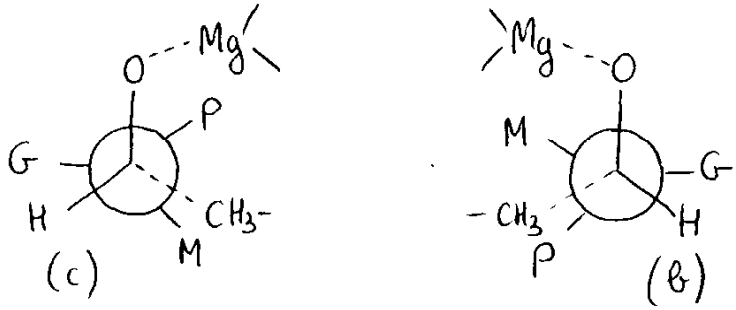
III. Modèle de Felkin-Anh

III.1. Ce n'est applicable que sous contrôle cinétique car on raisonne sur les états de transition. On ne s'intéresse pas à la stabilité relative des produits susceptibles de se former.

III.2.



III.3.



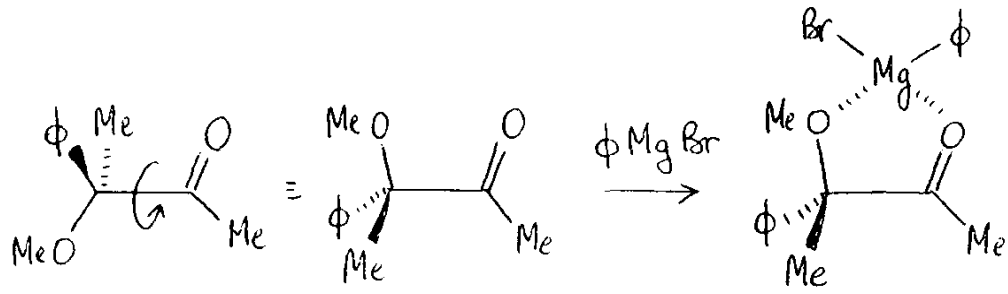
Ces deux états de transition sont diastéréoisomères. On peut prévoir une énergie d'activation plus faible pour la formation de **B**, issu d'un état de transition moins encombré.

III.4. On obtient alors 4 stéréoisomères. On prévoit la même diastéréosélection pour chaque énantiomère de **A**, avec une configuration inversée du carbone 2 dans le produit majoritaire.

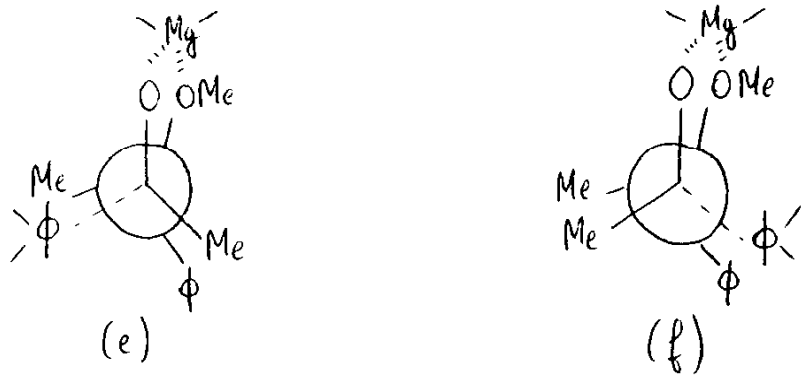
50% du composé de départ est (2R) et conduit à 34% de (2S, 3R) et 66% de (2R, 3R)
50% du composé de départ est (2S) et conduit à 66% de (2S, 3S) et 34% de (2R, 3S

Le mélange final ne possède pas d'activité optique car les énantiomères sont formés en égales proportions.

IV.1. La complexation du magnésium peut faire intervenir l'oxygène du groupe OMe.



IV.2. On en déduit donc les états de transition suivants:



IV.3. Il apparaît dans le cadre de ce modèle que le produit E est issu de l'état de transition le moins encombré: E correspond à l'attaque nécessitant la plus faible énergie d'activation.

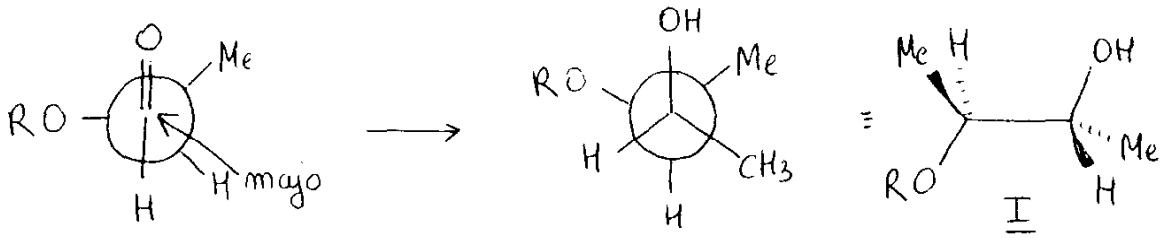
V.1. Les bilans de transmétallation sont les suivants :

$$CH_3Li + TiCl_4 \qquad CH_3TiCl_3 + LiCl$$

$$CH_3Li + ClTi(OCH(CH_3)_2)_3 \qquad CH_3Ti(OCH(CH_3)_2)_3 + LiCl$$

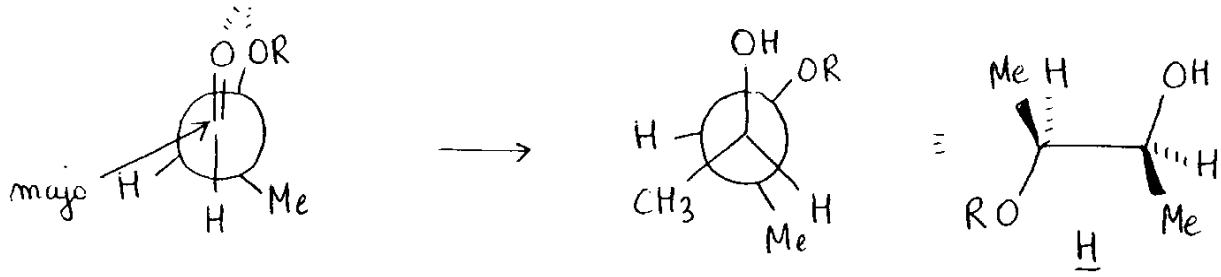
V.2. Pour le trichlorure de méthyltitane, on a l'état de transition IV c'est-à-dire le modèle où il y a une chélation. En revanche, pour le triisopropanolate de méthyltitane c'est l'état de transition III qui rend compte de la formation du produit majoritaire (modèle de Felkin-Anh).

modèle de Felkin-Anh



réaction de $CH_3Ti(OCH(CH_3)_2)_3$

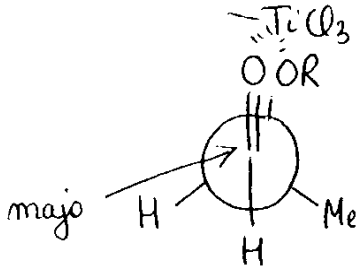
modèle avec chélation



réaction de CH_3TiCl_3

V.3. L'amplitude de l'effet de chélation est gouvernée par l'acidité de Lewis du métal. Les halogènes sont électroattracteurs et augmentent ainsi l'acidité et le pouvoir chélatant du métal (3).

V.4. On peut proposer la structure suivante:



VI.1. L' isomère **K** est l'alcool exo (approche endo du réactif) et l'isomère **L** l'isomère endo.

VI.2. Dans le cas b, l'approche privilégiée est la face du dessous car elle est beaucoup moins encombrée. En revanche quand il n'y a pas de gêne stérique particulière c'est la face exo qui est privilégiée car elle supprime des contraintes de torsion.

VI.3. La stéréosélectivité est différente à cause de la gêne stérique créée par le pont gemdiméthyle du camphre.

VI.4. De prime abord cela ne correspond pas à la sélectivité observée. Mais les proportions obtenues sous contrôle cinétique ne préfigurent pas de celles obtenues dans des conditions équilibrantes, où le produit le plus stable s'accumule.

(1) F.A. Carey, R.J. Sundberg *Advanced Organic Chemistry,* Plenum Press **1990,** 3rd edition, Part A, p. 457 et références citées.

(2) J. March *Advanced Organic Chemistry,* Wiley **1992,** 4th edition, p. 920 et références citées.

E.C. Ashby, J. Laemmle, H.M. Neumann *Acc. Chem. Res.* **1974,** *7,* 272-280
E.C. Ashby, J. Laemmle, H.M. Neumann *J. Am. Chem. Soc.* **1972,** *94,* 5421-5434

(3) *Comprehensive Organic Synthesis* , B.M. Trost, I. Fleming ed., Pergamon Press **1991** Volume 1, "Additions to CX π-Bonds, Part 1", Chapitre 1.5

"Organotitanium and Organozirconium Reagents" C. Ferreri, G. Palumbo, R. Caputo. p. 153 et références citées:

Exemple d'induction asymétrique controlée en 1,2 et 1,3 sur des alkoxyaldéhydes chiraux avec $MeTiCl_3$ (composé majoritaire prévu par le modèle avec chélation):
- M.T. Reetz, K. Keeseler, S. Schmidtberger, B.W. Enderoth and R. Steinbach, *Angew. Chem., Int. Ed. Engl.*, **1983**, *22*, 89;*Angew. Chem.*, **1983**, *95*, 1007;*Angew.. Chem.. Suppl.*, **1983**, 1511.
- M.T. Reetz, A. Jung, *J.Am.Chem.Soc*, **1983**, *105*, 4833.
- M.T. Reetz, M. Hüllemann and T. Seitz,*Angew.Chem.,Int.Ed.Engl.*, **1987**, *26*, 477.

Exemple de chélation empêchée et prévision par le modèle de Felkhin-Anh:
M.T. Reetz, R. Steinbach, J. Westermann, R. Urz, B. Wenderoth and R. Peter, *Angew.Chem.,Int.Ed.Engl.* **1982**, *21*, 135; *Angew.Chem.*, **1982**, *94*, 133; *Angew.Chem.Suppl.*, **1982**, 257.

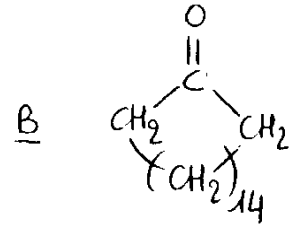
Partie 3
Analyse et Synthèse de composés à odeur musquée

I. Détermination de la structure de la civétone

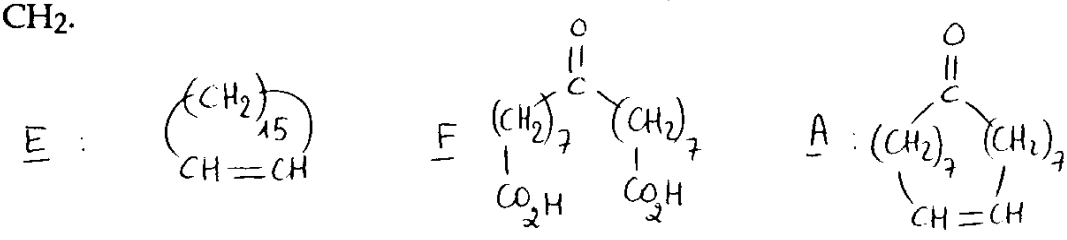
I.1. La décoloration d'une solution de dibrome ou d'une solution de permanganate de potassium et la possibilité d'hydrogénation mole à mole indiquent la présence d'une double liaison CC.
L'obtention d'un dérivé de la DNPH caractériste un groupe carbonyle CO.
La réaction avec le benzaldéhyde en milieu basique caractérise un composé carbonylé énolisable (réaction d'aldolisation).

A possède une double liaison CC et un groupe carbonyle CO. D'après sa formule brute, **A** possède 3 sites d'insaturation: **A** est un composé cyclique.
B est un composé carbonylé énolisable CH-CO.
C est donc un aldol ou le produit de crotonisation dérivé (pour un motif CH_2-CO dans **B**).

I.2. L'oxydation vigoureuse effectue la rupture de la liaison CC d'un motif CH2-CO pour conduire à 2 fonctions acide carboxylique: B conduisant à un diacide, il s'agit d'un composé cyclique.
B est la cycloheptadécanone.



I.3. L'incertitude qui reste sur **A** est la position de la double liaison CC dans le cycle.
Le composé **E** est le cycloheptadécène (réduction du groupe carbonyle en groupe méthylène).
Le permanganate de potassium concentré en milieu acide effectue l'oxydation de la liaison C=C: les produits **D** et **F** sont des diacides carboxyliques. L'oxydation du motif CH_2-CO de **F** conduisant aux acides octanedioïque et nonanedioïque en égales proportions, la chaine carbonée de **F** est symétrique: de chaque côté du groupe carbonyle, la chaine comporte 7 groupes CH_2.



II. Synthèse de la muscone à partir de produits naturels

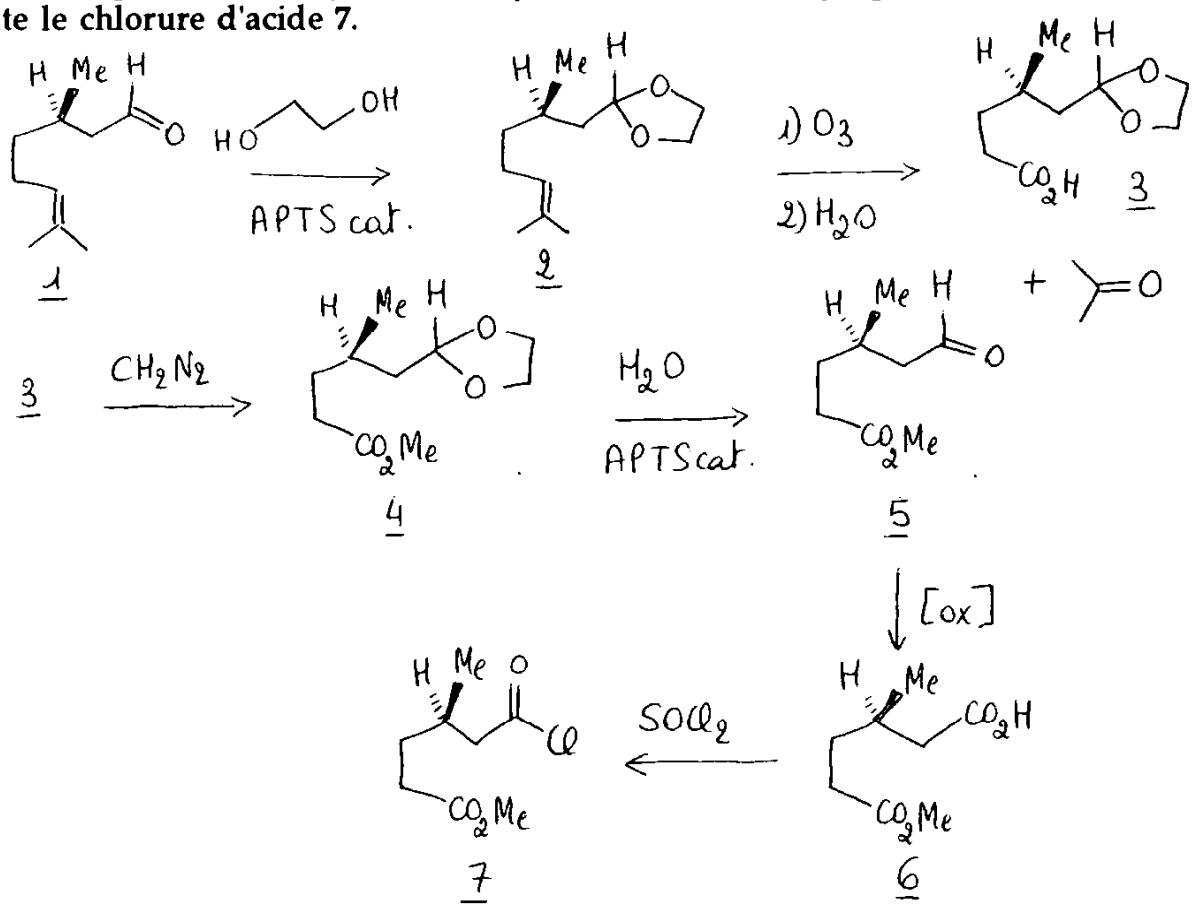
II.1.1. Cette molécule est chirale car elle n'est pas superposable à son image dans un miroir plan (présence d'un carbone asymétrique).

II.1.2.a. Le carbone 3 est un carbone asymétrique: il porte 4 substituants tous différents: H, méthyle, CH_2CHO et CH_2CH_2R

II.1.2.b. La configuration absolue du carbone asymétrique est R:
$CH_2CHO > CH_2CH_2R > CH_3 > H$.

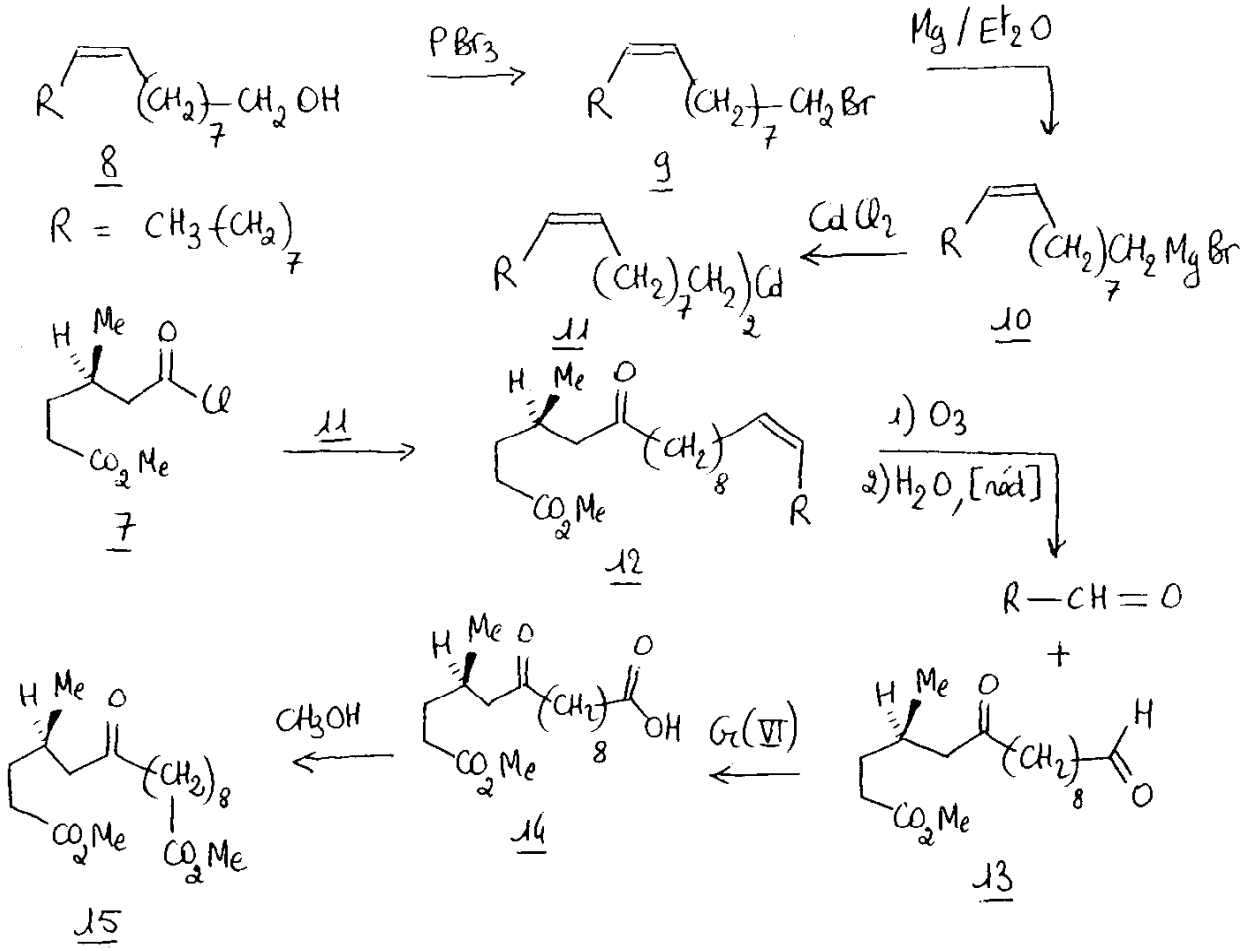
II.1.3. Il s'agit du (3R) -3,7-diméthyloct-6-énal.

II.2.1. Le composé 2 est l'acétal. Les composés 3 et 4 possèdent une fonction aldéhyde encore protégée sous forme d'acétal et repectivement une fonction acide carboxylique et une fonction ester méthylique. Dans le composé 5, la fonction aldéhyde a été déprotégée (sans hydrolyse de la fonction ester). Dans le composé 6, l'aldéhyde a été oxydé en acide carboxylique. On forme ensuite le chlorure d'acide 7.



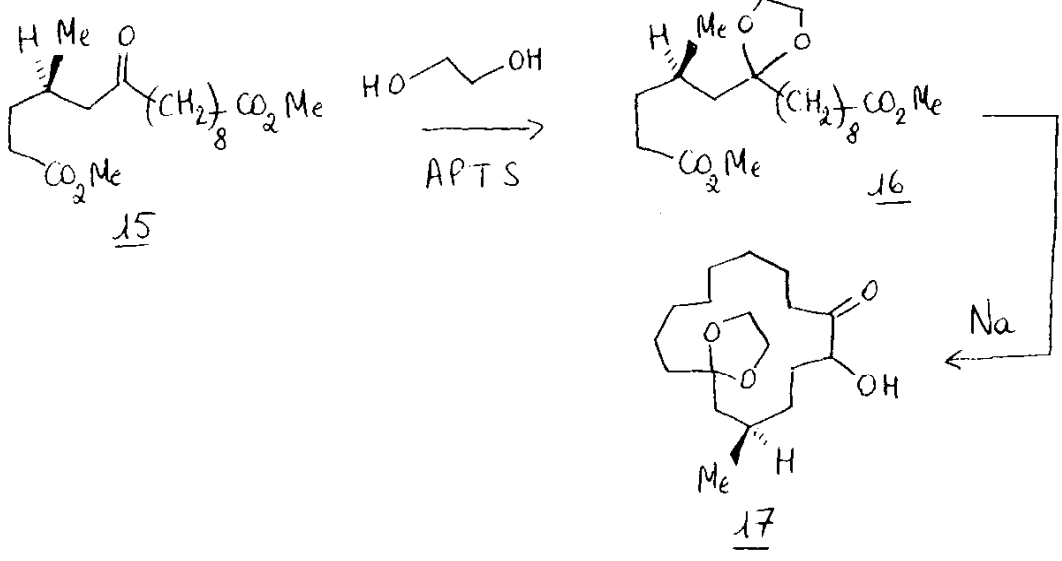
II.2.2. L'étape 1 permet la protection de l'aldéhyde vis à vis de l'oxydation (à l'ozonolyse avec hydrolyse en milieu oxydant).

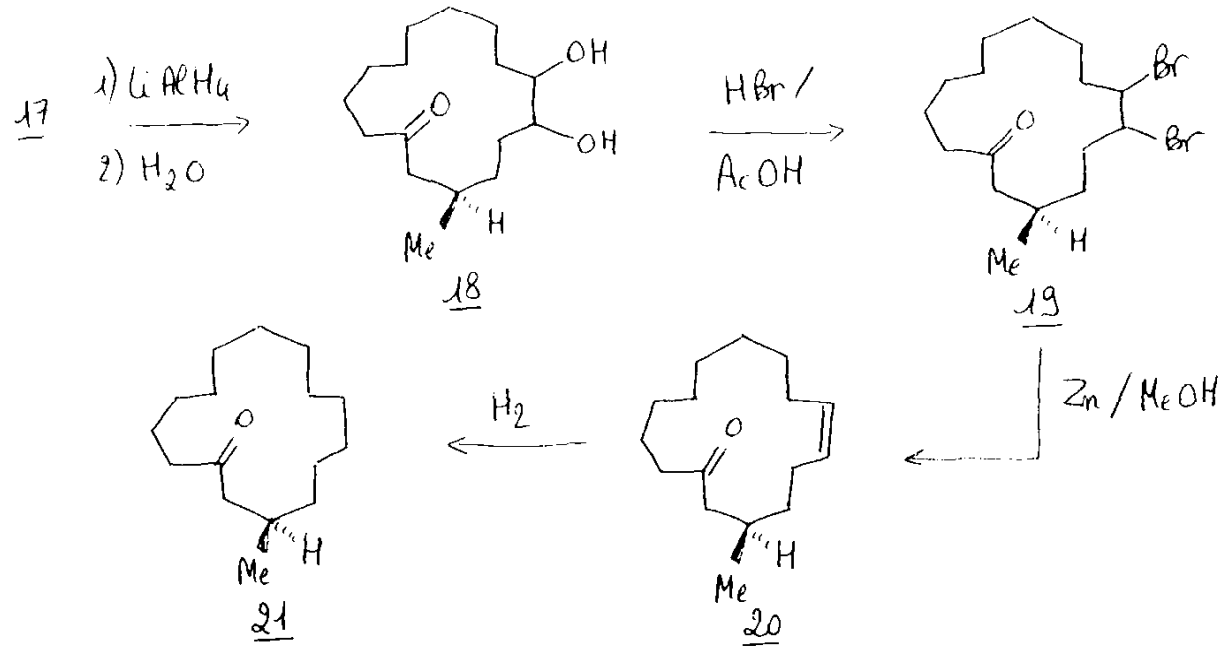
II.3.1. Le tribromure de phosphore effectue la transformation de l'alcool en chlorure 9. On prépare ensuite l'organomagnésien 10. On effectue ensuite une transmétallation qui conduit à l'organocadmien 11. La condensation avec le chlorure d'acide produit une cétone 12 (addition d'un équivalent de cadmien). L'ozonolyse avec hydrolyse en milieu réducteur conduit à 2 aldéhydes: le composé 13 possède une fonction aldéhyde, une fonction cétone et une fonction ester. L'oxydation chromique transforme l'aldéhyde en acide carboxylique: 14. On obtient finalement un diester méthylique 15.



II.3.2. L'organocadmien permet de passer du chlorure d'acide à la cétone, sans formation d'alcool tertiaire issu d'une double condensation et sans réaction concurrente avec la fonction ester (1).

II.4.1. Le composé **16** possède un groupe carbonyle protégé sous forme d'acétal. Le diester est cyclisé en **17**. La réduction de la fonction cétone en alcool par $LiAlH_4$ et l'hydrolyse de l'acétal conduisent à une dihydroxycétone **18**. L'action de HBr/AcOH effectue la substitution de OH par Br: **19**. L'élimination de Br_2 conduit à une énone **20**. L'hydrogénation catalytique de la double liaison CC conduit à la cétone **21**.





II.4.2. Le carbone asymétrique n'a jamais été impliqué dans la séquence réactionnelle.

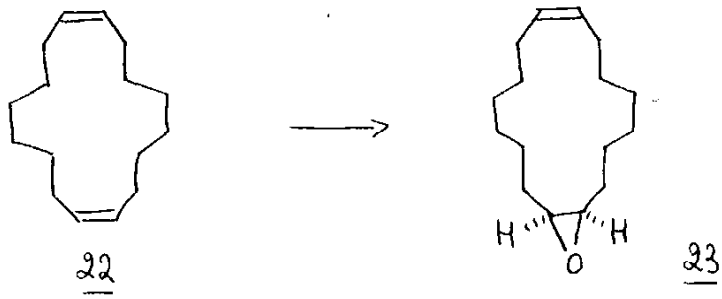
II.4.3. La dilution favorise le processus intramoléculaire aux dépends d'une réaction intermoléculaire (probabilité de rencontre).

III. Synthèse de la muscone racémique (Mookherjee, 1971)

III.1. Le composé **22** possède 2 doubles liaisons CC, chacune pouvant présenter la configuration Z ou E (la structure macrocyclique fait qu'il n'y a pas d'empêchement à la géométrie E). Il existe 3 isomères de configuration de C=C:

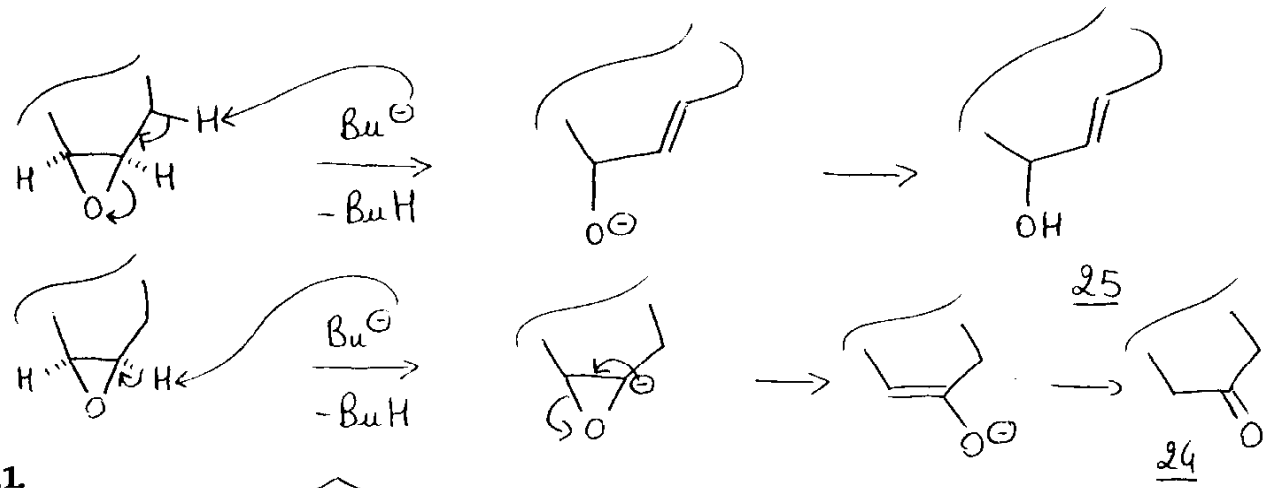
les composés (Z, Z), (Z, E) et (E,E).

III.2.1. Il s'agit d'une addition stéréospécifique sur la double liaison. La configuration relative des 2 carbones impliqués est conservée: l'addition est syn.

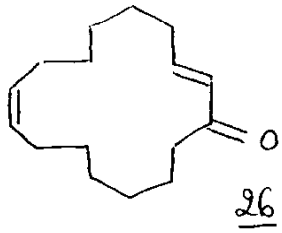


III.2.2. La double liaison peut être de configuration E ou Z et les substituants de l'époxyde peuvent être en relation cis ou trans: d'où 4 isomères de configuration.

III.3. La structure de **25** peut être interprétée par une ouverture de l'époxyde avec élimination de H en β. Le composé **24** peut être issu d'une élimination de H en α (2).



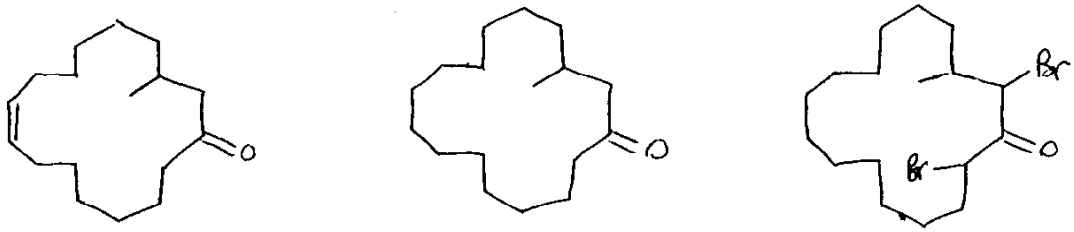
III.4.1.



26

III.4.2. Le cuivre(I) en quantité catalytique oriente en 1,4 l'addition de l'organométallique sur l'énone conjuguée.

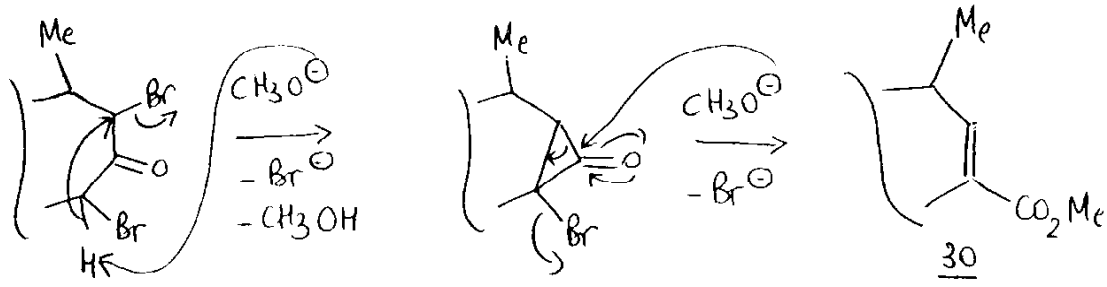
III.5.1. L'hydrogénation de la double liaison CC restant (non conjuguée) conduit à **28**, qui possède encore une fonction cétone.



27 28 29

III.5.2. Le composé **29** résulte d'une double halogénation en α de CO. Les deux hydrogènes en α du carbonyle sont respectivement voisins de 1 et 2 hydrogènes et apparaissent sous forme de doublet et triplet.

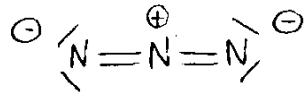
III.5.3. Le réarrangement de Favorskii (1) peut mettre en jeu chacun des sites halogénés: d'où l'obtention de 2 isomères.



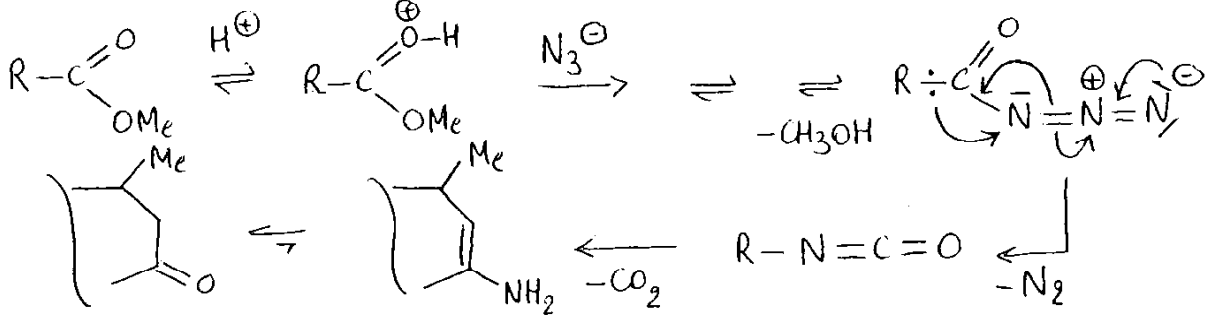
30

III.5.4. L'élimination du brome est favorisée par rapport à la protonation de l'intermédiaire anionique.

III.6.1. Une formule de Lewis de l'ion azoture est:

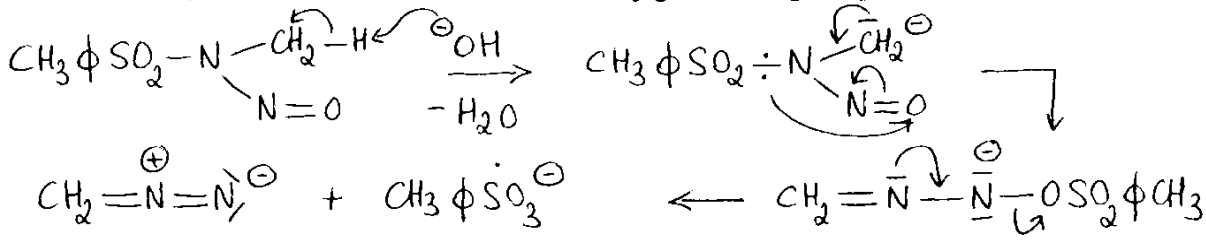


III.6.2. Par l'intermédiaire d'une réaction de Schmidt (1), on peut envisager:

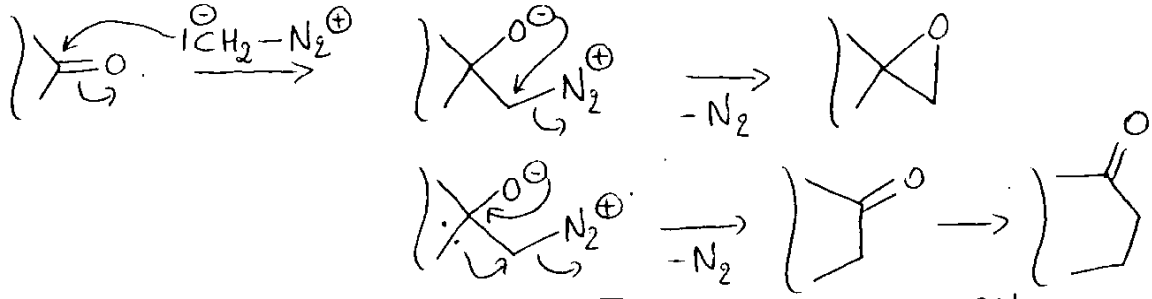


IV. Synthèse de l'exaltone (cyclopentadécanone) par homologation de cycle

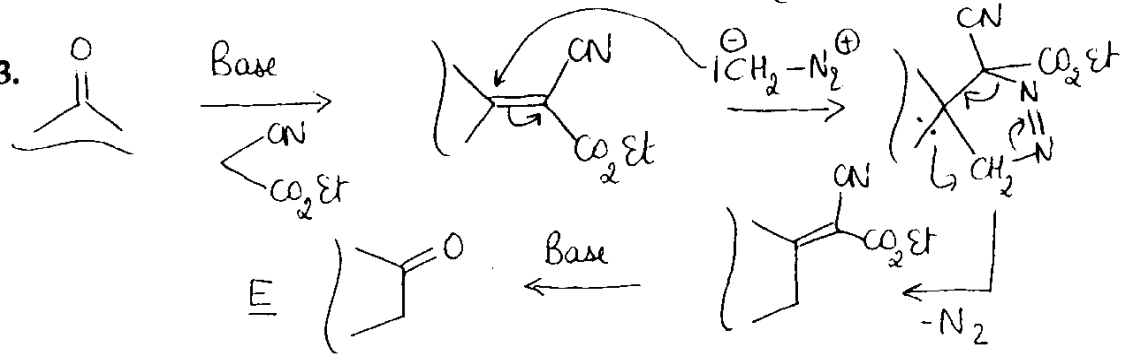
IV.1. On peut envisager un mécanisme comportant un processus acide base suivi d'une migration 1,3 de l'azote vers l'oxygène du groupe $CH_3\phi SO_2$ (1).



IV.2. Il aurait pu y avoir compétition avec la formation d'époxyde et par ailleurs agrandissement de cycle ultérieur.



IV.3.



IV.4. Il faut réaliser trois homologations. Pour un rendement moyen par étape de 60%, le rendement global est donné par:

0,60*0,60*0,60 = 0,22: rendement de 22%

(1) J. March *Advanced Organic Chemistry* , Wiley 1992, 4th edition

(2) *Organometallics in Synthesis,* M. Schlosser ed., Wiley 1994, Chapitre 1, "Organoalkali Reagents" M. Schlosser p. 83 et références citées.

Agrégation
(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve A : Composition de Physique - Session : 1994

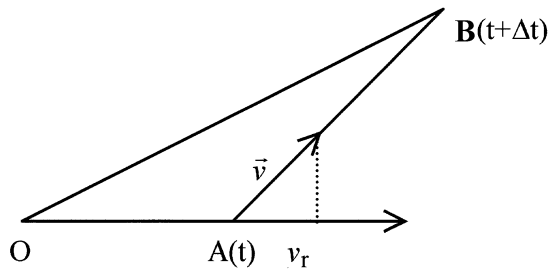
1ère partie : Dynamique

I. Effet Doppler :

1° Expression de $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$

a) Signal émis par A à t reçu par O à t'

$$t'_A = t + \frac{r}{c}$$



b) Signal émis à $t + \Delta t$ en B

reçu à $$t'_B = (t + \Delta t) + \frac{r + v_r \Delta t}{c}$$

$$t'_B - t'_A = \Delta t' = \left(1 + \frac{v_r}{c}\right)\Delta t$$

c) Cas particulier $\Delta t = T$ $$T' = T\left(1 + \frac{v_r}{c}\right)$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$$

2° Cas relativiste : il faut tenir compte de la dilatation du temps dans le changement de repère.

$$T' = T\left(1 + \frac{v_r}{c}\right) \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Applications

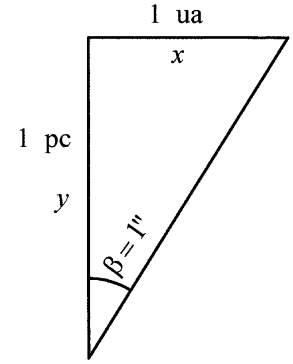
I.1. Le son perçu est plus aigu quand la voiture se rapproche, plus grave quand elle s'éloigne.

I.2. $$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{0{,}4}{21{,}1} = \frac{v_r}{c}$$

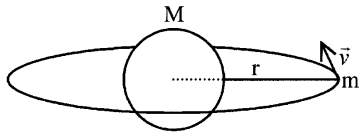
$v_r = 5714\ \text{km.s}^{-1}$ l'objet s'éloigne par rapport à l'observateur.

$$D = \frac{v_r}{H} = 71\ \text{Mpc}$$

$$1\ \text{parsec} = \frac{x}{\tan\beta} \approx 3\,10^{16}\ \text{m} \Rightarrow D \approx 2\,10^{24}\ \text{m}$$



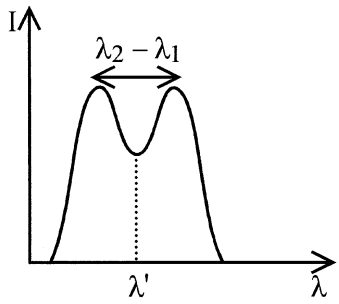
I.3.



$$\begin{cases} F = m\,a & \text{relation fondamentale de la dynamique} \\ m\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{G\,m\,M}{r^2} & \text{mouvement circulaire uniforme} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{v^2 = \frac{G\,M}{r}} \qquad (2)$$

$$\boxed{v_m{}^2 = \frac{G\,M}{r_m}}$$



$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda} = 2\,\frac{v_m}{c} \Rightarrow v_m = \frac{3.10^5\ .\ 310^{-2}}{2\ .\ 21{,}1}$$

$$\boxed{v_m = 213\ \text{km.s}^{-1}}$$

$$r_m \approx \frac{D\ .\ \alpha}{2}$$

$$\boxed{r_m = 10{,}3\ \text{kpc}}$$

I.4.

$$d M_o = \rho\, 4\pi\, r^2\, dr$$

$$d M_o = 4\pi \frac{\rho(o)\, r^2}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2} dr$$

Cette masse obscure $M_o >> M$ et si $r >> a$:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{G\, m}{r^2} 4\pi\, \rho_o\, a^2\, r$$

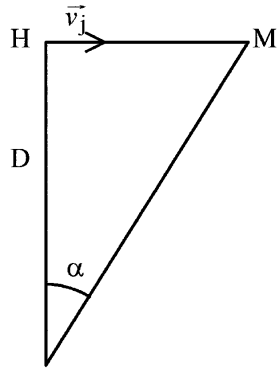
$$\boxed{v^2 = G\, 4\pi\, \rho_o\, a^2} \qquad \forall\ r >> a$$

I.5.

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c} = 0{,}16$$

$v_r = H\, D$ $\qquad\qquad$ $\boxed{D = 600\ \text{Mpc}}$

$v_r = 48\,000\ \text{km.s}^{-1}$ l'approximation non relativiste est encore acceptable.



$v_j = \frac{D\,\alpha}{t}$ vitesse apparente transversale.

$$v_j \approx 18\ 10^9\ \text{m.s}^{-1}$$

$$\boxed{v_j \approx 6\ c} \qquad >> c\ !$$

$$H\,M = D\,\alpha = 18\ \text{a. l.}$$

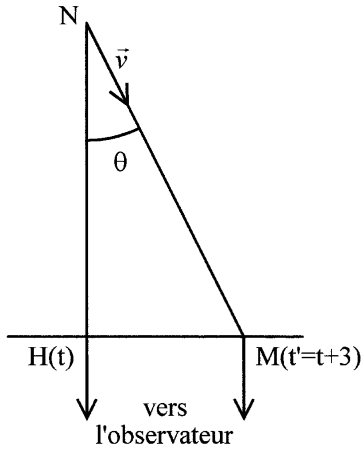
v_j super luminique peut-être a-t-on en tort de négliger la vitesse de propagation des OEM en provenance du noyau.

I.6. Le jet passe de N à M à la vitesse réelle v en un temps t'.

Les ondes reçues dans le plan HM sont décallées de trois ans : l'onde issue de N arrive à t, celle issue du jet en M à $t' = t + 3$ ans. La vitesse transversale apparente est $v_j = \frac{HM}{t' - t}$.

$$t = \frac{NH}{c} = \frac{HM}{c\ .\ \tan\theta}$$

$$t' = t + 3 = \frac{NM}{v} = \frac{NM}{c\,(1-\varepsilon)} = \frac{HM}{\sin\theta\ .\ c\,(1-\varepsilon)}$$



$$t' - t = -\frac{HM}{c \tan \theta} + \frac{HM}{\sin \theta \, c \, (1-\varepsilon)} = \frac{HM}{c \,.\, \theta} + [1 + \varepsilon - 1]$$

$$\varepsilon = \frac{c \, \theta \,.\, (t' - t)}{HM}$$

$$\varepsilon = \frac{c \, \theta}{v_j} \approx \frac{\theta}{8} \approx 0{,}017$$

II. Lois de Képler :

II.1. – Les planètes décrivent des ellipses, Soleil ≡ foyer.
– Loi des aires.
– $\frac{a^3}{T^2} = \text{cte.}$

II.2. C centre de masse $\Rightarrow$ $M_A \overline{CA} + M_B \overline{CB} = 0$

ou : $\boxed{M_A \, a_A = M_B \, a_B}$

$$\boxed{\frac{M_B}{M_A} \approx 0{,}6}$$

de plus : $(M_A + M_B) \; P^2 = a^3$
(M_A, M_B exprimées en masses solaires ; P en ans ; a en u.a.)

donc : $M_A + M_B = \frac{20^3}{50^2}$ $\qquad \boxed{M_A + M_B = 3{,}2 \, M_S}$

$\Rightarrow$ $\boxed{M_A \approx 2 \, M_S \quad \text{et} \quad M_B \approx 1{,}2 \, M_S}$

III. Chocs et effet Compton

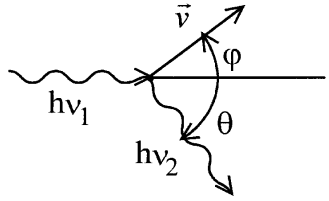
III.1.

$$m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = m_1 \vec{v_1'} + m_2 \vec{v_2'} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2)$$

Deux lois de conservations en cas de choc élastique, (1) seulement si choc mou.

III.2.



$$\begin{cases} \dfrac{h\nu_1}{c} = \dfrac{h\nu_2}{c}\cos\theta + m v \cos\varphi \\ O = \dfrac{h\nu_2}{c}\sin\theta + m v \sin\varphi \end{cases}$$

conservation de la quantité de mouvement

$$h\nu_1 = \frac{1}{2} m v^2 + h\nu_2$$

conservation de l'énergie

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{1 + \dfrac{h\nu_1}{m c_1^2}(1 - \cos\theta)}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

avec $\lambda_c = \dfrac{h}{mc} = 2{,}4\ 10^{-2}$ Å

$\Delta\lambda_{max} = 2\lambda_c$ pour $\theta = \pi$

$\Delta\lambda_{max} \approx 4{,}8\ 10^{-3}$ nm

2ème partie : Thermodynamique et optique

I. Équilibre d'une atmosphère isotherme :

I.1.

$$d\vec{p} = \rho S\, dz\, \vec{g_o} \qquad g_o = Cte$$

résultante des forces pressantes sur les quatres faces :

$$d\vec{F_{ext}} = -\left(\frac{dP}{dz}\right) dz\, S\, \vec{k}$$

équilibre mécanique :

$$d\vec{p} + d\vec{F_{ext}} = 0$$

$$\boxed{dP = -\rho\, g_o\, dz}$$

I.2. Si gaz parfait $PV = N\,kT$ où N est le nombre de molécules dans le volume V.

Or : $\rho(z) = \dfrac{N(z)}{V} \cdot m$ d'où $P = \dfrac{1}{m}\rho(z)\,kT$

$$\boxed{\rho(z) = P(z)\,\frac{m}{kT}}$$

I.3.

$$d\,P = \frac{kT}{m}\,d\,\rho = -\rho\,g_o\,dz$$

$$\frac{d\,\rho}{\rho} = -\frac{g_o\,m}{kT} \qquad \boxed{\rho = \rho_o\,e^{-z/h}}$$

$$h = \frac{kT}{m\,g_o}$$

I.4. si $\left|\begin{array}{l} T(z) = T(o) - az \\ \text{et} \quad n(z) = 1 + b\,\rho(z) \end{array}\right.$

$$\frac{d\,P}{dz} = -g_o\,\rho \qquad \text{avec} \quad \rho = \frac{n-1}{b}$$

$$\text{et} \quad \rho = \frac{mP}{kT} \quad \text{(gaz parfait)}$$

$$\frac{d\,P}{P} = -\frac{g_o\,m}{k} \cdot \frac{dz}{\left[T(o) - az\right]}$$

$$P = P(o)\left[\frac{T(o) - az}{T(o)}\right]^{\frac{m\,g_o}{ka}}$$

$$n(o) = 1 + b\,\rho(o) = 1 + b\,\frac{m\,P(o)}{k\,T(o)}$$

$$\boxed{\frac{n(z) - 1}{n(o) - 1} = \left[1 - \frac{az}{To}\right]^{\frac{m\,g_o}{ka} - 1}}$$

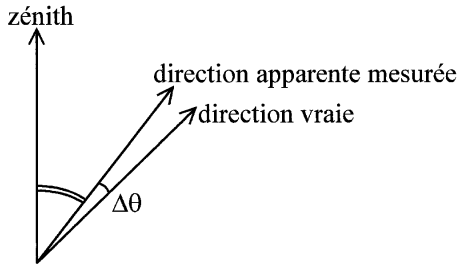
I.5. Développement limité pour les faibles altitudes $\dfrac{az}{To} << 1$.

$$n(z) \approx n(o)\left[1 - \frac{n(o) - 1}{n(o)}\left[\frac{m\,g_o}{ka} - 1\right]\frac{az}{T(o)}\right]$$

$$\boxed{n(z) \approx n(o)\left[1 + \frac{z}{l}\right]} \qquad \text{avec } l = \frac{n(o)}{n(o) - 1}\,\frac{T(o)}{\dfrac{M}{R}\,g_o - a} \approx -41\,000\ \text{km}$$

mais applicable seulement si $z << \dfrac{To}{a} = 30\ \text{km}$.

I.6.



II. Gaz réel :

II.1. $\frac{a}{TV^2}$ pression interne du gaz.

b co-volume (volume propre occupé par les molécules).

Pour n moles : $\left(P + \frac{n^2 a}{TV^2}\right)(V - n b) = n RT.$

II.2.

$$dU = \delta W + \delta Q$$

avec $\delta Q = C_v\, dT + l\, d P$, $l = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ et $\delta W = - P\, dV.$

$$dU = C_v\, dT + (l - P)\, dV$$

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{TV^2} \qquad l = \frac{R}{V - b} + \frac{a}{T^2 V^2}$$

$$dU = C_v\, dT + \frac{2 a}{TV^2}\, dV$$

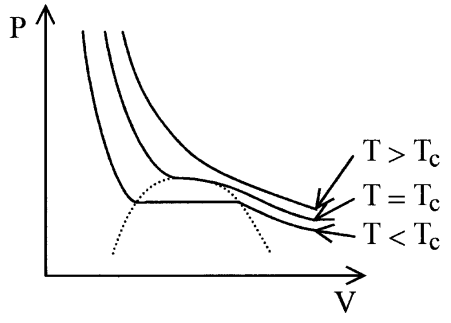
On voit que U dépend de T et de V : la première loi de Joule n'est pas vérifiée.

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + \left(\frac{R}{V - b} + \frac{a}{T^2 V^2}\right) dV$$

U et S étant fonctions d'état, ΔU et ΔS ne dépendent que de l'état initial et de l'état final.

II.3. Si à température ambiante $T < T_c$ les bouteilles contiennent gaz et liquide comprimés. C'est le cas si $\theta = 20°C$.



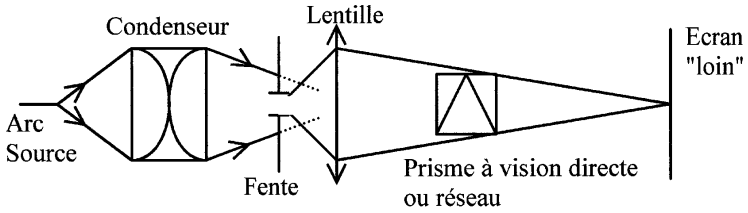
II.4. Au point critique :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial P}{\partial V}\right)_{T_c} = 0 & = -\dfrac{R\,T_c}{(V_c - b)^2} + \dfrac{2\,a}{T_c\,V_c^{\,3}} \\ \left(\dfrac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{T_c} = 0 & = +\dfrac{2\,R\,T_c}{(V_c - b)^3} - \dfrac{6\,a}{T_c\,V_c^{\,4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{27}{8} R^2\,\dfrac{R\,T_c}{8\,P_c} \\ b = \dfrac{T_c^{\,3}}{P_c} \end{cases}$$

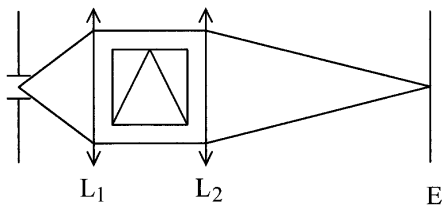
Application Numérique : $b = 4{,}3\ 10^{-5}\ m^3$ $\quad a = 110$ uSI

III. Largeurs de raies spectrales :

III.1. Spectroscope :



ou



si fente au foyer objet de L_1 et écran au foyer image de L_2.

III.2. – L'étoile rayonne comme un corps noir, comparable à l'arc du III.1.

– L'atmosphère absorbe une partie du rayonnement incident et le réémet dans toutes les directions $\Rightarrow$ raies en absorption si l'étoile est vue au travers de son atmosphère.

III.3.

$$h\nu = E_n - E_2 = -13{,}6\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\right] \quad \text{en eV}$$

$$\lambda\ (\text{nm}) = \frac{1240}{13{,}6\left[\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{n^2}\right]}$$

$n = 3$ $\quad \lambda_o = 661{,}3$ nm $\quad$ (visible).

III.4. Pour qu'une raie soit observée il faut que l'élément soit présent ; mais ce n'est pas suffisant, il faut aussi que le niveau de départ de la raie soit peuplé : donc il faut que la température du milieu soit suffisante pour que les atomes ne soient pas tous dans l'état fondamental. La loi de Boltzmann donne une estimation du peuplement de deux niveaux. Les transitions à partir du niveau fondamental (série de Lyman) sont observées dans ce cas.

III.5. La largeur minimale d'une raie résulte du principe de Heisenberg :

$$\Delta E \,.\, \Delta t \geq \hbar \qquad \text{or } \Delta t \approx 10^{-8}\ \text{s}$$

$$\Delta\nu \geq \frac{1}{2\pi \,.\, \Delta t}$$

avec $\lambda = 500\ \text{nm} \quad \Delta\lambda \geq 10^{-5}\ \text{nm}$

III.6.
$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi\, kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\, v_r^2}{2\, kT}}\, 4\pi\, v_r^2\, dv_r$$

a) $y = e^{-a\, v_r^2} \,.\, v_r^2$ passe par un maximum

pour :
$$\frac{dy}{dv} = 0 \;\Rightarrow\; v_r^2 = \frac{1}{a} = v_c$$
$$v_c = \sqrt{\frac{2\, kT}{m}}$$

b) Dans ce cas il faut partir de la distribution de vitesse dans une direction donnée, celle le long de laquelle on observe :

$$\frac{dN_r}{N} = P\,(v_r)\, dv_r = \left(\frac{m}{2\pi\, kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\, v_r^2}{2\, kT}}\, dv_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, v_c}\, e^{-\frac{v_2}{v_c^2}}\, dv_r$$

Le maximum correspond à λ_o et lorsque l'exposant $= -1$ l'intensité est divisée par $\frac{1}{e}$, d'où la largeur (double de la demi-largeur) :

$$\Delta\lambda_D = 2\, \frac{\lambda_o}{c}\, v_c \qquad \boxed{\frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_o} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{2\, kT}{m}}}$$

Application Numérique :
$$v_c \approx \sqrt{99}\ 10^3 = 10^4\ \text{m.s}^{-1}$$
$$\Delta\lambda_D \approx 0{,}044\ \text{nm}$$

3ème partie : Propagation d'onde électromagnétique dans un plasma

I. Notion de plasma :

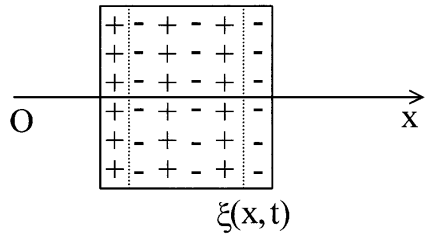
I.1. Conditions d'existence d'un plasma : $h\nu_{min} = \frac{3}{2}\, kT_{min} = \frac{1}{2}\, m v_{min}^2 = 13{,}6\ \text{eV}$

$\nu_{min} = 3{,}287\ 10^{15}\ \text{Hz}$ $\qquad \lambda_{max} = 91{,}2\ \text{nm}$

$T_{min} = 10\ 500\ \text{K}$

$v_{min} = 2{,}2\ 10^6\ \text{m.s}^{-1}$ $\qquad v_{min} = 2\ 200\ \text{km.s}^{-1}$

I.2.



Les électrons oscillent / ions
forces de coulomb électrons / ions : force de rappel si la répartition de charge a lieu dans la direction $\overrightarrow{ox}$. Il lui correspond un déplacement d'ensemble des électrons d'amplitude $\xi(x, t)$ auquel est associée une variation de densité :

$$\delta N_e = - N_e \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Équation Poisson

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{q_e \, \delta N_e}{\varepsilon_o} = - \frac{q_e \, N_e}{\varepsilon_o} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$\Rightarrow$

$$E = - \frac{q_e \, N_e}{\varepsilon_o} \xi \qquad (E = 0 \text{ pour } \xi = 0)$$

équation du mouvement pour une tranche dx de plasma (rel. fond. de la dynamique)
$\Rightarrow m_e \frac{\delta^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{q_e \, N_e}{\varepsilon_o} \xi$ $\Rightarrow$ oscillations à la pulsation :

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{N_e \, q_e^2}{m_e \, \varepsilon_o}}}$$

$$f_p = 9 \sqrt{N_e}$$

Application Numérique : si $N_e = 10^{12} \, m^{-3}$

$$\boxed{f_p = 9 \text{ MHz}}$$

I.3. Ionosphère terrestre $\boxed{f_c = f_p} = 9 \sqrt{N_e} = 9 \text{ MHz}$

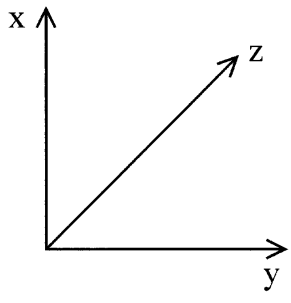
N_e varie avec le rayonnement énergétique en provenance du Soleil :

$$\boxed{N_e \approx 10^{12} \text{ el } m^{-3}}$$

II. Propagation d'une onde électromagnétique :

II.1. $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{x} E_0 \, e^{i (kz - \omega t)}$

Onde polarisée linéairement selon $\overrightarrow{ox}$ se propageant le long de $\overrightarrow{oz}$.



$$\left.\begin{aligned}\vec{E_1} &= \frac{E_0}{2} e^{i(kz-\omega t)}\,(\vec{x}+i\vec{y})\\ \vec{E_2} &= \frac{E_0}{2} e^{i(kz-\omega t)}\,(\vec{x}-i\vec{y})\end{aligned}\right\}$$

deux ondes polarisées circulairement, l'une à droite, l'autre à gauche, de même phase et de même amplitude.

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2}$$

II.2.

$$n = \left[1 - \frac{f_p^2}{f^2 - f_p^2}\right] \qquad \text{avec} \quad \frac{f_P}{f} << 1$$

$$n \approx 1 - \frac{f_p^2}{2f^2}$$

$$v_\varphi = \frac{c}{n} = c\left(1 + \frac{f_p^2}{2f^2}\right) = \frac{\omega}{k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = cn = c\left(1 + \frac{f_n^2}{2f^2}\right) \Rightarrow v_g(f) : \text{milieu dispersif}$$

II.3. $t = \frac{D}{v_g} = \frac{D}{c}\left(1 + \frac{f_p^2}{2f^2}\right)$ en toute rigueur $t = \int_0^D \frac{dz}{v_g}$ on suppose N_e constant $\Rightarrow v_g = cte$

$$t_2 - t_1 = \frac{D}{2c} f_p^2 \left[\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right] = \frac{81\, D\, N_e}{2c}\left[\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right]$$

$$t_2 - t_1 = 10^{-6} N_e$$

si $t_2 - t_1 = 0{,}03$ secondes $\qquad N_e = 0{,}3\ 10^5\ m^{-3}$

$$N_e = 0{,}03\ cm^{-3}$$

pour des pulsars situés à D inconnus on suppose le même N_e moyen et de la mesure de $t_2 - t_1$ on en déduit D !

II.4. Propagation dans $\vec{B}$

$$v_\pm = \frac{c\,(f^2 \pm f f_c)}{f^2 - \frac{f_p^2}{2} \pm f f_c}$$

$$\Delta v = \frac{c\, f_c\, f_p^2}{f^3}$$

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta v \cdot \frac{D}{c}$$

$$\Delta\Phi = 81\,\frac{e\,B}{m_e\,c} N_e \left(\frac{1}{f^2}\right) \cdot D = 4{,}8\ 10^4\,\frac{N_e\,B\,D}{f^2}$$

II.5.

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\Phi}{2} = 35° \qquad \text{à } f = 900 \text{ MHz}$$

$$B \approx 10^{-11} \text{ Tesla}$$

II.6. Si $\Phi_2 - \Phi_1 = (2k+1)\pi$ les ondes sont en opposition de phrases $\Rightarrow$ franges noires.

$$\underbrace{81 \frac{e B D}{m_e c} N_e}_{\downarrow A} \left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{(f+i)^2}\right) = \pi \qquad A = 4{,}8\ 10^4\ s^{-2}$$

$$A\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{i}{f}\right)^2}\right] = \pi$$

$$A \cdot \frac{i^2}{f^2} = \pi \quad \Rightarrow \quad i = f^2\left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2}$$

$$i = 0{,}8 \cdot 10^{-2} \frac{f^2}{\sqrt{N_e B D}}$$

Exemple sur la figure 4 : dans 4 MHz (= 9 mm) il y a 15 cannelures :

$$i = 0{,}266 \text{ MHz}$$

$$f \sim 22 \text{ MHz}$$

$N_e B D = 1{,}4\ 10^7$

On ne pouvait pas aller plus loin car D n'était pas donnée.
Comme il s'agissait de l'étude de Jupiter, $D \approx 6{,}3\ 10^8$ km.

Agrégation
(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve B : Composition d'Électricité, d'Électronique, d'Électrotechnique et d'Automatique - Session : 1994

I. **Synthèse de fréquence par boucle à verrouillage de phase**

1. Étude de la boucle :

$$v_D(t) = K V_1 V_2 \sin\varphi_1(t) \cdot \cos\varphi_2(t) = K\frac{V_1 V_2}{2}\left[\sin(\varphi_1+\varphi_2)+\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

$$= \frac{K V_1 V_2}{2}\left[\sin(2\omega_0 t+\varphi_E+\varphi_S)+\sin(\varphi_E-\varphi_S)\right]$$

La pulsation instantanée du 1er terme est :

$$2\omega_0 + \frac{d\varphi_E}{dt} + \frac{d\varphi_S}{dt}$$

Cette pulsation est donc peu différente de $2\omega_0$ d'après les hypothèses. Ce terme sera donc coupé par le filtre passe-bas et l'on aura :

$$v_F(t) = \frac{K V_1 V_2}{2}\sin(\varphi_E-\varphi_S)$$

Si $v_F(t) = 0$, la pulsation instantanée de $v_2(t)$ est ω_0.

Si $v_F(t) \neq 0$, la pulsation instantanée de $v_2(t)$ est $\omega_0 + \frac{d\varphi_S}{dt}$.

Or $\left|\frac{d\varphi_S}{dt}\right| \ll \omega_0$ d'après les hypothèses donc $v_F(t)$ est faible, ce qui veut dire $\sin(\varphi_E-\varphi_S)$ faible donc :

$$\sin(\varphi_E-\varphi_S) \approx \varphi_E-\varphi_S$$

Donc :
$$\frac{d\varphi_S}{dt} = \lambda K\frac{V_1 V_2}{2}(\varphi_E-\varphi_S)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d\varphi_S}{dt}+\frac{\lambda K V_1 V_2}{2}\varphi_S = \frac{\lambda K V_1 V_2}{2}\varphi_E}$$

2. Réponse à un saut de phase.

Si $\varphi_E = \text{cste}$, d'après l'équation différentielle ci-dessus (1er ordre, coefficient constant), le régime permanent correspondant à la solution particulière de l'équation, on aura :

$$\boxed{\varphi_S = \varphi_E = \text{cste}}$$

3. Réponse à une rampe de phase :

$\varphi_E(t) = at$. En régime permanent, on aura $\varphi_S(t) = At + B$, donc :

$$A + \frac{\lambda V_1 V_2 K}{2}(At + B) = \lambda K \frac{V_1 V_2}{2} at$$

vrai $\forall t$ d'où :

$$\begin{cases} A = a \\ B = -\dfrac{2a}{\lambda V_1 V_2 K} \end{cases}$$

D'où, en régime permanent :

$$\boxed{\varphi_S(t) = at - \frac{2a}{\lambda K V_1 V_2}}$$

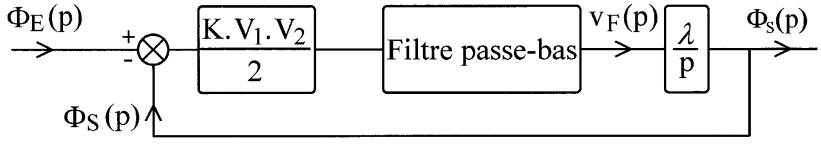
$$\omega_{i1}(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi_E}{dt} = \omega_0 + a$$

$$\omega_{i2}(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi_S}{dt} = \omega_0 + a \ .$$

Soit :

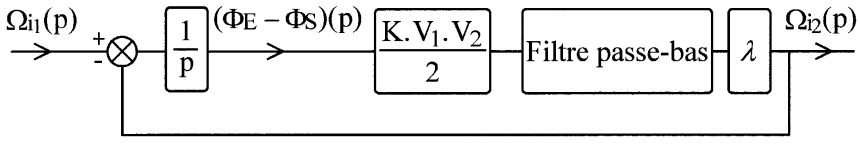
$$\boxed{\omega_{i1} = \omega_{i2}}$$

4. D'après les équations vues ci-dessus :



Pour les phases : ↑

Pour les pulsations instantanées : ↓



5. Division par N :

Cette division par N est introduite dans la boucle de retour. D'après le fonctionnement de l'asservissement, on aura alors :

$$\omega_{i1} = \frac{\omega_{iS}}{N} = \omega_{i2}$$ lorsque la boucle sera verrouillée.

D'où :

$$\boxed{\omega_{iS} = N\,\omega_{i1}}$$

6. $f_{iS} = N f_0$

d'où :

$$\boxed{f_0 \le f_{iS} \le N_{max} \cdot f_0}$$

avec $\mathbf{f_{iS}}$ **multiple de** $\mathbf{f_0}$.

II. **Changement de fréquence**

A. PRINCIPE

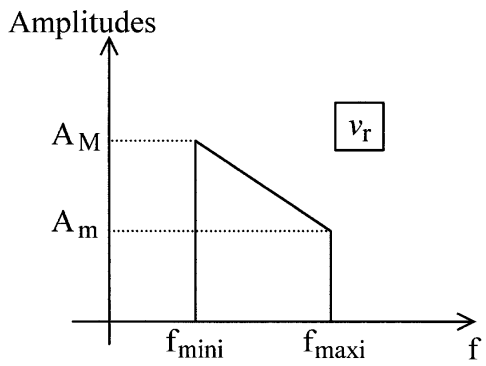
7. $v_{S1}(t) = K \cdot v_r(t) \cdot v_{L0}(t) = K V_r V_{L0} \cos 2\pi F_R t \cos 2\pi f_{L0} t$

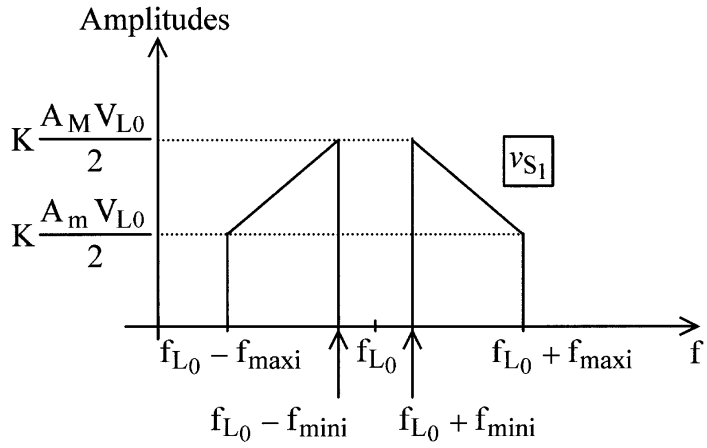
$$= K \frac{V_r V_{L0}}{2} \left[\cos 2\pi (F_R + f_{L0}) t + \cos (F_R - f_{L0}) t \right]$$

Donc $v_{S1}(t)$ a deux composantes d'amplitude $K \frac{V_r V_{L0}}{2}$, de fréquences $(F_R + f_{L0})$ et $|F_R - f_{L0}|$.

$v_{S1}(t)$ peut être considéré comme un signal modulé en amplitude à porteuse supprimée (taux de modulation ∞).

8. Si $v_r(t)$ est un signal à spectre borné, on peut reprendre le raisonnement précédent pour chaque composante de son spectre. Donc on obtient deux bandes latérales.





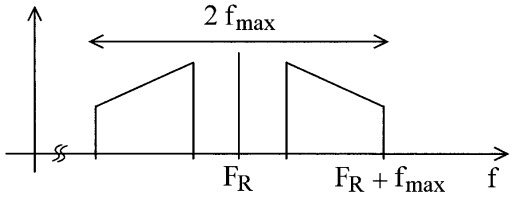
9. F_I est la **fréquence intermédiaire**.

Il faut que l'accord du filtre se fasse sur l'une des 2 fréquences du spectre de $v_{S1}(t)$ donc :

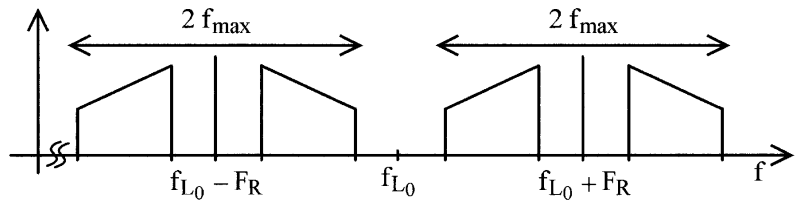
$$\text{ou} \quad \begin{matrix} F_I = F_R + f_{L0} \\ F_I = |F_R - f_{L0}| \end{matrix}$$

10. $v_r(t)$ est une onde modulée en amplitude (porteuse Ω_R et signal modulant $\omega < \omega_{max}$) donc son spectre présente deux bandes latérales plus la raie porteuse.

Exemple :



Pour $v_R(t)$



Pour $v_{S1}(t)$

Si $F_I = F_R + f_{L0}$, le filtre passe-bande F laissera passer les 2 bandes supérieures du spectre de $v_{S1}(t)$ et coupera les 2 bandes inférieures.

On peut raisonner de la même façon si $F_I = |F_R - f_{L0}|$: seules 2 bandes passeront (celles qui seront autour de F_I).

Donc $v_{S2}(t)$ sera une onde modulée en amplitude de porteuse à $(f_{L0} + F_R)$ dans le 1er cas, à $|F_R - f_{L0}|$ dans le 2e cas, donc à F_I.

Si $v_r(t)$ était une onde modulée en fréquence, on trouverait pour $v_{S2}(t)$ une onde modulée en fréquence à porteuse F_I.

11. **Réception d'une MA - Gamme PO**.

Fréquence porteuse minimale : 500 kHz :

$F_I = F_R + f_{L0}$ impossible car $F_I < F_R$

$F_I = F_R - f_{L0} \Rightarrow f_{L0} = F_R - F_I = 45$ kHz

$F_I = f_{L0} - F_R \Rightarrow f_{L0} = F_I + F_R = 955$ kHz

Fréquence porteuse maximale : 1600 kHz :

$F_I = F_R + f_{L0}$ impossible car $F_I < F_R$

$F_I = F_R - f_{L0} \Rightarrow f_{L0} = F_R - F_I = 1145$ kHz

$F_I = f_{L0} - F_R \Rightarrow f_{L0} = F_I + F_R = 2055$ kHz

Donc, si on choisit $F_R > f_{L0}$, on a $\dfrac{f_{L0\,max}}{f_{L0\,min}} = \dfrac{1145}{45} = 25{,}44$

si on choisit $F_R < f_{L0}$, on a $\dfrac{f_{L0\,max}}{f_{L0\,min}} = \dfrac{2055}{955} = 2{,}15$

On a donc intérêt à choisir :

$$\boxed{f_{L0} > F_R}$$

pour que l'étendue de fréquence de l'oscillateur local soit plus faible.

12. **Réception d'une MF**. Même raisonnement.

Fréquence porteuse minimale : $F_R = 87$ MHz

$F_I = F_R + f_{L0}$ impossible

$F_I = F_R - f_{L0} \Rightarrow f_{L0} = F_R - F_I = 76{,}3$ MHz

$F_I = f_{L0} - F_R \Rightarrow f_{L0} = F_R + F_I = 97{,}7$ MHz

Fréquence porteuse maximale : $F_R = 108$ MHz

$F_I = F_R + f_{L0}$ impossible

$$F_I = F_R - f_{L0} \quad \Rightarrow \quad f_{L0} = F_R - F_I = 97{,}3 \text{ MHz}$$
$$F_I = f_{L0} - F_R \quad \Rightarrow \quad f_{L0} = F_R + F_I = 118{,}7 \text{ MHz}$$

Donc, si $F_R > f_{L0}$, $\dfrac{f_{L0\,max}}{f_{L0\,min}} = \dfrac{97{,}3}{76{,}3} = 1{,}28$

si $f_{L0} > F_R$, $\dfrac{f_{L0\,max}}{f_{L0\,min}} = \dfrac{118{,}7}{97{,}7} = 1{,}21$

Les rapports sont pratiquement identiques donc pas de choix systématique.

13. On a donc : $F_I = f_{L0} - F_R$.

Mais on a aussi l'existence de la fréquence $F_R^{'}$ telle que :

$$F_I = F_R^{'} - f_{L0}$$

$$\Leftrightarrow \quad F_R^{'} = F_I + f_{L0} = F_I + F_I + F_R \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{F_R^{'} = 2F_I + F_R}$$

Cette émission de porteuse $F_R^{'}$ sera donc aussi dans la bande passante du passe-bande accordé sur F_I.

14.
$$\underline{T}_{RF}(F_R) = T_0$$
$$\underline{T}_{RF}(F_R^{'}) = \frac{T_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{F_R^{'}}{F_R} - \dfrac{F_R}{F_R^{'}}\right)^2}}$$

D'où :
$$\boxed{\alpha = 10 \log\left(1 + Q^2\left(\frac{F_R^{'}}{F_R} - \frac{F_R}{F_R^{'}}\right)^2\right)}$$

15. $F_R = 900$ kHz et $F_I = 455$ kHz donc $F_R^{'} = 900 + 2 \times 455$ $F_R^{'} = 1810$ kHz

donc :
$$40 = 10 \log\left(1 + Q^2\left(\frac{1810}{900} - \frac{900}{1810}\right)^2\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{Q = 66}$$

16. $F_R = 20$ MHz et $F_I = 455$ kHz donc $F_R^{'} = 20{,}91$ MHz

$$40 = 10 \log\left(1 + Q^2\left(\frac{20{,}91}{20} - \frac{20}{20{,}91}\right)^2\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{Q = 1123}$$

17. $F_R' = 20 + 3{,}2 = 23{,}2$ MHz

Donc : $$\alpha = 10 \log \left(1 + 200^2 \left(\frac{23{,}2}{20} - \frac{20}{23{,}2} \right)^2 \right)$$

$$= \boxed{35{,}5 \text{ dB} = \alpha}$$

Donc avec un coefficient de qualité beaucoup plus raisonnable, on obtient un taux de réjection correct même pour les ondes courtes.

18. Chaque terme de la somme va introduire des fréquences dans le spectre :

$n = 1 \rightarrow F_R$ et f_{L0}

$n = 2 \rightarrow 2F_R$, $2f_{L0}$, $F_R + f_{L0}$, $|f_{L0} - F_R|$

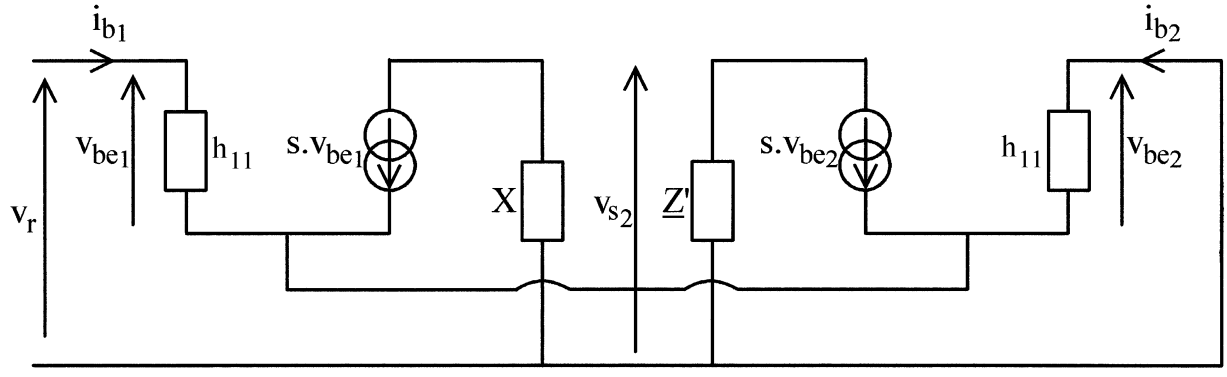
$n = 3 \rightarrow 3F_R$, $3f_{L0}$, $|f_{L0} \pm 2F_R|$, $|2f_{L0} \pm F_R|$

Le bruit d'intermodulation provient de toutes les composantes autres que celle désirée (à $(f_{L0} - F_R)$ par exemple) de fréquences passant dans le filtre passe-bande F.

19. **Récepteur superhétérodyne.**

B. EXEMPLE

20. Le schéma équivalent petits signaux du montage est :



$\underline{V}_r = \underline{V}_{be_1} - \underline{V}_{be_2}$ $\quad s\,\underline{V}_{be_1} = s\,\underline{I}_{b_1}\,h_{11} = \beta\,\underline{I}_{b_1}$

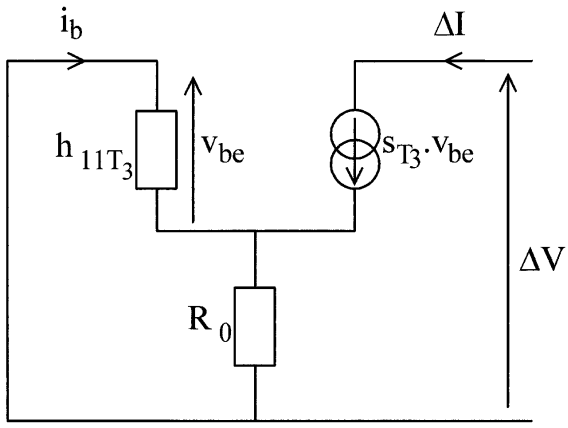
et $\quad s\,\underline{V}_{be_2} = \beta\,\underline{I}_{b_2}$

On a : $\underline{I}_{b_1} + \beta\,\underline{I}_{b_1} + \underline{I}_{b_2} + \beta\,\underline{I}_{b_2} = 0 \Leftrightarrow \underline{I}_{b_1} = -\underline{I}_{b_2}$ donc $\underline{V}_{be_1} = -\underline{V}_{be_2}$

$\underline{V}_{S2} = -\underline{Z'} \cdot s\,\underline{V}_{be_2} = \underline{Z'}\,s\,\dfrac{\underline{V}_r}{2}$.

D'où : $$\boxed{\frac{\underline{V}_{S2}}{\underline{V}_r} = \frac{\underline{Z'}_s}{2} = \underline{Z'} \cdot 10 \cdot I}$$

21. Source de courant : schéma petites variations :



$$\Delta I = s_{T_3} \cdot v_{be} = \underbrace{s_{T_3} \cdot h_{11T_3}}_{\beta_3} i_b$$

or : $$- h_{11T_3} i_b = R_0 (1 + \beta_3) i_b$$

Donc : $$i_b = 0 \Rightarrow \Delta I = 0.$$

Donc la résistance équivalente vue de la sortie est :

$$\frac{\Delta V}{\Delta I} \to + \infty.$$

Le source de courant est donc parfaite :

$$\boxed{I = \text{cste} \quad \text{à} \quad E_0 = \text{cste} , \quad \forall \ V_{AM}.}$$

22. Si v_{L0} est en série avec E_0 , sur le schéma précédent on aura :

$$\Delta I = \frac{\beta_3 \, v_{L0}}{h_{11T_3} + (1 + \beta_3) R_0} \approx \frac{v_{L0}}{R_0}$$

La pente du transistor T_2 va donc varier autour de la valeur $40 \frac{I}{2} = 20 \, I$ au rythme de la tension $v_{L0}(t)$ donc à la fréquence f_{L0} .

$$s = 20 \, I + \alpha \frac{v_{L0}}{R_0} .$$

Donc : $$v_{S2}(t) = v_r(t) \cdot \frac{\text{“ } \underline{Z'} \text{ ”}}{2} \cdot s \qquad (\ \underline{Z'} \text{ «à la fréquence» de } v_r(t) \cdot s)$$

$$s \cdot v_r(t) = \left(20 \, I + \alpha \frac{v_{L0}}{R_0} \right) \cdot v_r(t)$$

→ Fréquences : $$F_R \quad \text{et} \quad \begin{cases} F_R + f_{L0} \\ f_{L0} - F_R \end{cases} .$$

Le circuit oscillant étant accordé sur $\left(f_{L0} - F_R\right)$, $|\underline{Z'}|$ sera maximal à cette fréquence, (il vaudra R'). Le coefficient de qualité du circuit oscillant étant grand, $|\underline{Z'}|$ sera faible pour les 2 autres fréquences et on aura donc en sortie une tension $v_{S2}(t)$ de fréquence $f_{L0} - F_R$.

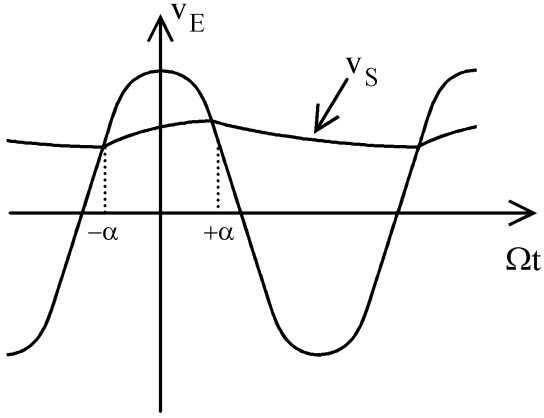
$\Rightarrow$ **Mélangeur**

III. Démodulation MA

A. Démodulation non cohérente

23. – L'ondulation étant négligeable, on a :

23.1.



$$V_S \approx V_E \sqrt{2} \cos \alpha \ .$$

Pendant que la diode conduit :

$$i(t) = \frac{v_E(t) - V_S}{r} = \frac{V_E \sqrt{2}\,(\cos \Omega t - \cos \alpha)}{r}$$

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\alpha}{\Omega}}^{+\frac{\alpha}{\Omega}} \frac{V_E \sqrt{2}\,(\cos \Omega t - \cos \alpha)}{r}\, dt = \frac{V_E \sqrt{2}}{r\,T} \left[\frac{1}{\Omega} \sin \Omega t - t \cos \alpha \right]_{-\alpha/\Omega}^{+\alpha/\Omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\bar{I} = \frac{V_E \sqrt{2}}{r} \left(\frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\pi} \right)}$$

23.2. – Dans la résistance : $\overline{I_R} = \dfrac{V_E \sqrt{2} \cos \alpha}{R}$.

Dans le condensateur : $\overline{I_C} = 0$.

Donc : $\bar{I} = \overline{I_R} + \overline{I_C} \ \Leftrightarrow \ \dfrac{V_E \sqrt{2}}{r\,\pi} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = \dfrac{V_E \sqrt{2} \cos \alpha}{R}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\operatorname{tg} \alpha - \alpha = \frac{r\,\pi}{R}}$$

24. Puissance dissipée dans R_a (résistance apparente recherchée) :

$$P = \frac{V_E^2}{R_a}$$

Puissance dissipée dans le montage :

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\alpha}{\Omega}}^{+\alpha/\Omega} v_E(t)\,.\,i(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\alpha}{\Omega}}^{+\alpha/\Omega} \frac{2V_E^2}{r}\,(\cos^2 \Omega t - \cos \Omega t\,.\,\cos\alpha)\,dt$$

$$\cos^2 \Omega t \downarrow \frac{1}{2}(\cos 2\Omega t + 1)$$

$$= \frac{2V_E^2}{\frac{2\pi r}{\Omega}}\left[\frac{1}{4\Omega}\sin 2\Omega t + \frac{1}{2}t - \cos\alpha\,.\,\frac{\sin \Omega t}{\Omega}\right]_{-\alpha/\Omega}^{+\alpha/\Omega}$$

$$= \frac{V_E^2}{\pi r}\left[\frac{\sin 2\alpha}{2} + \alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\right] = \frac{V_E^2}{\pi r}(\alpha - .\sin\alpha\,.\,\cos\alpha)$$

D'où :
$$R_a = \frac{\pi r}{\alpha - \sin\alpha\,.\,\cos\alpha}$$

$$= \boxed{\frac{R(\operatorname{tg}\alpha - \alpha)}{\alpha - \sin\alpha\,.\,\cos\alpha} = R_a}$$

Si a est faible :
$$R_a \approx \frac{R\left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} - \alpha\right)}{\alpha - \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)} \approx \boxed{\frac{\frac{R\alpha^3}{3}}{\alpha - \alpha + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^3}{2}\ldots}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_a \approx \frac{R}{2}}$$

25. $v_E(t) = P_0(1 + k\,.\,s(t))\cos\Omega t$.

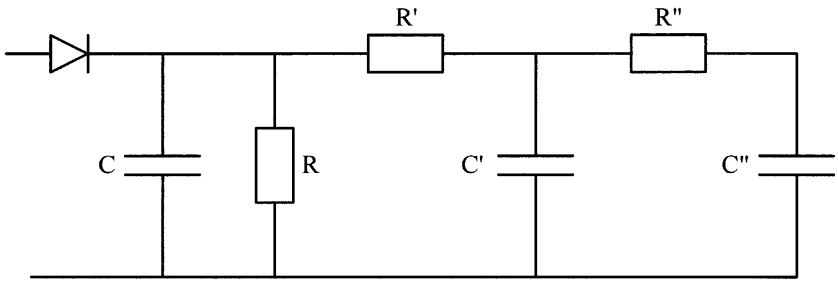
Raisonnement classique sur la «charge» et «décharge» de C qui doit suivre l'enveloppe sans suivre la HF.

$$T_{HF} << RC << T_{BF} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{2\pi}{\Omega} << RC << \frac{2\pi}{\omega_{max}}}$$

26. La détection n'est pas correcte si l'«enveloppe» change de signe c'est-à-dire si $(1 + k\,.\,s(t))$ n'est pas toujours de même signe.

27. Il faut filtrer derrière le détecteur ; le filtre doit être de type passe-bas pour éliminer le résidu HF et doit laisser passer la fréquence $f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi}$.

Il ne doit pas charger le détecteur.



On choisira en pratique RC un peu inférieur à $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_{max} \cdot \Omega}}$ pour bien respecter la condition vis-à-vis de la BF.

Pour éliminer le résidu HF, on filtre par R', C' :

$$\begin{cases} \frac{\omega_{max}}{2\pi} < \frac{1}{2\pi R' C'} < \frac{\Omega}{2\pi} \\ R' >> R \ ; \ C' << C \end{cases} \quad \text{pour ne pas charger le détecteur.}$$

Aux bornes de C', on a l'information démodulée plus la composante continue.

On isole la composante continue par R'', C'' :

$$\frac{1}{2\pi R'' C''} \quad \text{doit être très faible} \quad \text{et} \quad \begin{cases} C'' << C' \\ R'' >> R' \end{cases}.$$

La composante continue peut servir à un **CAG**.

B. Démodulation cohérente ou synchrone

28. $v_2(t) = K \cdot P_0 (1 + m \cos \omega t) \cos (\Omega t + \varphi) \cdot P_0' \cdot \cos (\Omega t + \varphi')$

$$= K \frac{P_0 \cdot P_0'}{2} (1 + m \cos \omega t) [\cos (2\Omega t + \varphi + \varphi') + \cos (\varphi - \varphi')]$$

$$= K P_0 \frac{P_0'}{2} [\cos (2\Omega t + \varphi + \varphi') + \cos (\varphi - \varphi') + m \cos \omega t \cdot \cos (\varphi - \varphi')]$$

$$+ \frac{m}{2} \cos (2\Omega t + \omega t + \varphi + \varphi') + \frac{m}{2} \cos (2\Omega t + \varphi + \varphi' - \omega t)]$$

Spectre d'amplitudes :

Pulsations	Amplitudes
0	$K \frac{P_0 P_0'}{2} \cos(\varphi - \varphi')$
ω	$m K \frac{P_0 P_0'}{2} \cos(\varphi - \varphi')$
$2\Omega - \omega$	$\frac{m}{2} \cdot \frac{K P_0 P_0'}{2}$
2Ω	$K \cdot \frac{P_0 P_0'}{2}$
$2\Omega + \omega$	$\frac{m}{2} \cdot K \frac{P_0 P_0'}{2}$

29. Le filtre F' doit être de type passe-bas ; il doit laisser passer les pulsations 0 et ω, il doit couper les pulsations $(2\Omega - \omega)$, 2Ω, $(2\Omega + \omega)$.

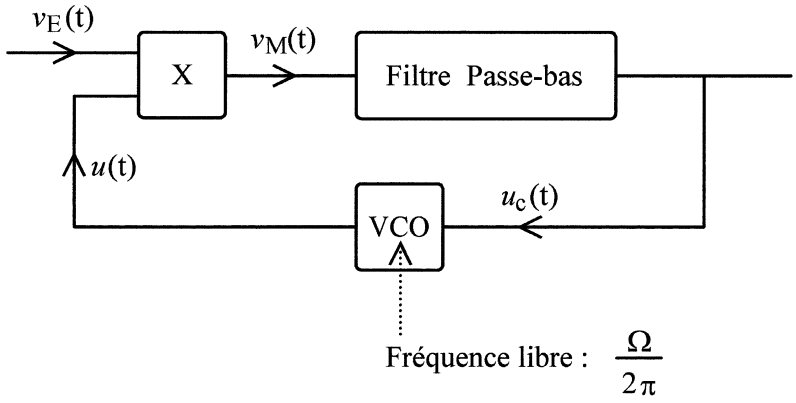
La composante continue, comme dans le cas de la démodulation non cohérente peut servir à un CAG.

30. Pour une détection optimale, il faut $\cos(\varphi - \varphi')$ maximal en valeur absolue donc :

$$\begin{cases} \varphi = \varphi' \\ \text{ou } \varphi = \varphi' + \pi \end{cases}$$

31. Contrairement à la détection non cohérente, la détection synchrone permet de démoduler même lorsque le taux de modulation est élevé (enveloppe changeant de signe).

32. Schéma de la boucle à verrouillage de phase : (idem à figure 1 donc comparateur de phase = multiplieur).



$$\text{VCO} = \begin{cases} \frac{d\varphi_S}{dt} = \lambda u_C(t) \\ \omega_S = \Omega + \frac{d\varphi_S}{dt} \end{cases}$$

L'étude de la PPL au 1. ayant montré qu'il y a une avance de $\frac{\pi}{2}$ de $u(t)$ sur $v_E(t)$ en sinusoïdal à la pulsation libre du VCO, Ω, comme $v_E(t)$ est en $\cos \Omega t$, on prend $u(t) = -U_M \sin(\Omega t + \varphi_S)$.

D'où : $$v_M(t) = -\frac{K P_0 U_M}{2}(1 + m\cos\omega t)\left[\sin(2\Omega t + \varphi + \varphi_S) + \sin(\varphi_S - \varphi)\right].$$

A la sortie du filtre passe-bas, on a :

$$u_C(t) = \frac{K P_0 U_M}{2}(1 + m\cos\omega t)\sin(\varphi - \varphi_S).$$

Pour un régime proche du verrouillage, $\varphi - \varphi_S$ est faible, donc :

$$u_C(t) \approx \frac{K P_0 U_M}{2}(1 + m\cos\omega t)(\varphi - \varphi_S).$$

D'où l'équation différentielle :

$$\frac{d\varphi_S}{dt} = \frac{\lambda K P_0 U_M}{2}(1 + m\cos\omega t)(\varphi - \varphi_S)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(\varphi_S - \varphi)}{(\varphi_S - \varphi)} = -\frac{\lambda K P_0 U_M}{2}(1 + m\cos\omega t)\,dt \qquad \text{car } \varphi = \text{cste}.$$

Soit : $$\varphi_S - \varphi = A\exp.\left(-\frac{\lambda K P_0 U_M}{2}\left(t + \frac{m}{\omega}\sin\omega t\right)\right)$$

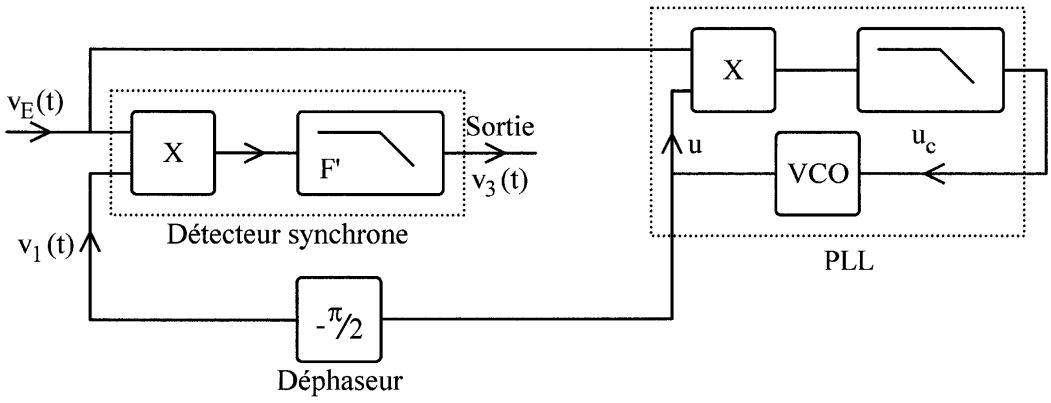
$$\Leftrightarrow \varphi_S - \varphi = A\left[\underbrace{\exp\left(-\frac{\lambda K P_0 U_M t}{2}\right)}_{\to\ 0 \text{ si } t\to+\infty}.\ \underbrace{\exp\left(-\frac{\lambda K P_0 U_M m\sin\omega t}{2\omega}\right)}_{\text{borné lors que t varie}}\right]$$

Donc : $\varphi_S - \varphi \to 0$

$t \to +\infty$ donc en régime permanent.

Finalement donc : $u(t) = -U_M \sin(\Omega t + \varphi)$.

Mais nous voulons $v_1(t) = P_0' \cos(\Omega t + \varphi)$ pour avoir $\varphi = \varphi'$ donc il faut introduire un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ et le schéma complet devient :



Synoptique complet avec reconstitution de la porteuse.

C. Démodulation cohérente pour signal BLU

33. Pour une MA classique, on avait :

$$P_0 (1 + m \cos \omega t) \cos (\Omega t + \varphi)$$

donc 3 composantes : $\begin{cases} \text{une à } \Omega & \left(\text{Ampl} : P_0\right) \\ \text{une à } \Omega - \omega & \left(\text{Ampl} : m \dfrac{P_0}{2}\right) \\ \text{une à } \Omega + \omega \ (\textit{bande haute}) & \left(\text{Ampl} : m \dfrac{P_0}{2}\right) \end{cases}$

On a conservé la bande haute donc :

$$\boxed{v_E (t) = \frac{m P_0}{2} \cos [(\Omega + \omega) t + \varphi]}$$

$\Rightarrow m = k S_M$ formule donnée dans le texte.

34. $v_2 (t) = K \dfrac{m P_0 P_0'}{2} \cos (\Omega t + \varphi') \cos [(\Omega + \omega) t + \varphi]$

$$= \frac{K m P_0 P_0'}{4} [\cos (2\Omega t + \omega t + \varphi + \varphi') + \cos (\omega t + \varphi - \varphi')]$$

Le filtre F' doit être de type passe-bas, laissant passer ω et coupant $(2\Omega + \omega)$.

35. Pour une détection optimale, même condition que celle vue au 30.

36. Même conclusion qu'au 31.

IV. Démodulation de fréquence

A. Discrimination

37. Principe d'une discrimination :

L'onde modulée en fréquence est placée à l'entrée d'un montage qui «ajoutera» une modulation d'amplitude à la MF. Ce montage sera ensuite suivi d'un démodulateur d'amplitude. Pour que l'on récupère en sortie le signal modulant, il faut que la «conversion» MF $\rightarrow$ MA se fasse correctement, c'est-à-dire que la relation entre l'amplitude du signal de sortie du convertisseur soit une fonction affine de l'écart de fréquence instantanée de la MF par rapport à la porteuse. Il faut donc que, autour de la fréquence porteuse, l'amplification en tension du convertisseur soit une fonction affine de la fréquence.

38. On a : $\begin{cases} \underline{V}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j L_2 \omega \underline{I}_2 + j M \omega \underline{I}_1 \\ \underline{V}_2 = -\dfrac{\underline{I}_2}{j C_2 \omega} \end{cases}$

D'où : $$\boxed{\underline{I}_2 = \frac{-j M \omega \underline{I}_1}{R_2 + j\left(L_2 \omega - \dfrac{1}{C_2 \omega}\right)}}$$

39. $$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \approx \frac{L_2}{L_1}\left(\frac{-j M \omega}{R_2 + j\left(L_2 \omega - \dfrac{1}{C_2 \omega}\right)}\right).$$

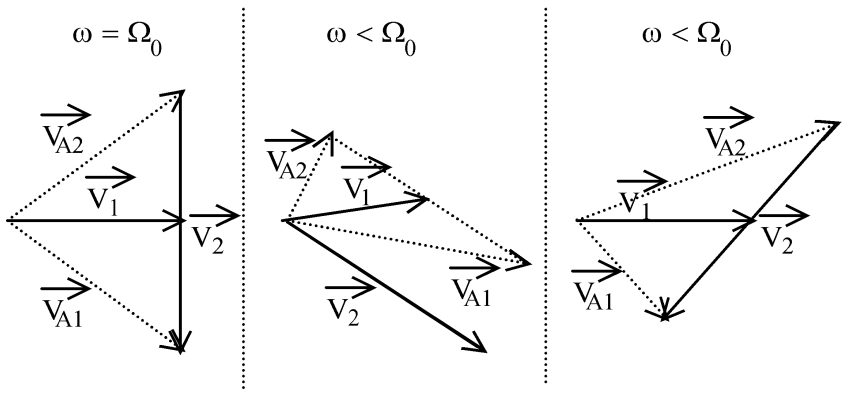
40. D'après l'expression ci-dessus : $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} - \text{Arctg}\dfrac{L_2 \omega - 1/C_2 \omega}{R_2}$

– Si $\omega = \Omega_0$, $L_2 \omega = \dfrac{1}{C_2 \omega}$ donc $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$;

– Si $\omega < \Omega_0$, $L_2 \omega < \dfrac{1}{C_2 \omega}$ donc $\varphi > -\dfrac{\pi}{2}$;

– Si $\omega > \Omega_0$, $L_2 \omega > \dfrac{1}{C_2 \omega}$ donc $\varphi < -\dfrac{\pi}{2}$.

41. On a, d'après le schéma : $v_{A1} = v_1 + \dfrac{v_2}{2}$ et $v_{A2} = v_1 - \dfrac{v_2}{2}$.

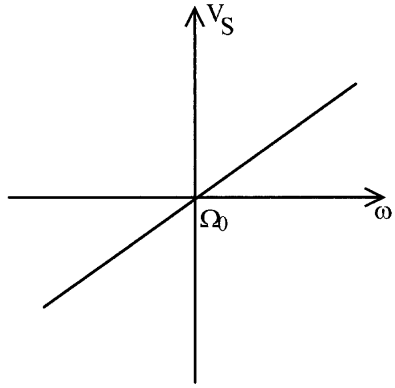


Or : v_S = Amplitude de v_{A2} – Amplitude de v_{A1}.

Donc :

$$\begin{cases} \text{si} \quad \omega = \Omega_0 , \ v_S = 0 \\ \text{si} \quad \omega < \Omega_0 , \ v_S < 0 \\ \text{si} \quad \omega > \Omega_0 , \ v_S > 0 \end{cases}$$

42. On obtient donc :



Donc discrimination correcte.

B. Démodulation de fréquence par PLL

43. On règle la fréquence libre du VCO de la PLL sur la fréquence porteuse.

Ensuite, lorsqu'on place l'onde modulée en fréquence à l'entrée de la PLL, on obtiendra le signal démodulé à l'entrée du VCO de la PLL.

44. A la sortie du multiplieur, on a :

$$v(t) = V_1 \cos \omega t \cdot |\underline{T}(j\omega)| \cdot V_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot K$$

$$= \frac{K V_1^2}{2} |\underline{T}(j\omega)| \cdot [\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi]$$

$\uparrow$ Pulsation 2ω $\quad$ $\uparrow$ Pulsation 0 = Continu

45. Pour éliminer la pulsation 2ω, il faut $\omega_C < 2\omega$.

On a alors : $$v_S(t) = \frac{K V_1^2}{2} |\underline{T}(j\omega)| \cdot \cos \varphi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_S = \frac{K V_1^2}{2} \text{Re}(\underline{T}(j\omega))}$$

$\uparrow$ Partie réelle de $\underline{T}(j\omega)$.

46. *a.* Déphaseur :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \dfrac{1}{j\,C'\,\omega}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\underline{Y}}{j\,C'\,\omega}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{j\,R\,C'\,\omega} + \dfrac{C}{C'} + \dfrac{1}{j\,L\,\omega\,C'\,\omega\,j}}$$

$$= \frac{\dfrac{C'}{C + C'}}{1 - \dfrac{1}{L\,(C + C')\,\omega^2} - \dfrac{j}{R\,(C + C')\,\omega}}$$

$$= \boxed{\frac{a}{1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{j}{Q_0\,x}} = \underline{T}}$$

b.

$$\underline{T} = \frac{a x^2}{x^2 - 1 - j\,\dfrac{x}{Q_0}} .$$

D'où :

$$\mathrm{Re}\,(\underline{T}) = \frac{a x^2\,(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2 + \dfrac{x^2}{{Q_0}^2}} .$$

Donc :

$$\boxed{V_S = \frac{K\,{V_1}^2}{2} \cdot \frac{a x^2\,(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2 + \dfrac{x^2}{{Q_0}^2}}} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

c.

$$\frac{d\,V_S}{dx} = \frac{K\,{V_1}^2}{2}\ \frac{\left[(x^2 - 1)^2 + \dfrac{x^2}{{Q_0}^2}\right]\left[2ax\,(x^2 - 1) + 2ax^2\,x\right] - a x^2\,(x^2 - 1)\left[2\,(x^2 - 1)\,2x + \dfrac{2x}{{Q_0}^2}\right]}{\left[(x^2 - 1)^2 + \dfrac{x^2}{{Q_0}^2}\right]^2} .$$

Autour de $\omega = \omega_0$, $x = 1$, on obtient donc :

$$\left[\frac{d\,V_S}{dx}\right]_{(x=1)} = \frac{K\,{V_1}^2}{2} \cdot \frac{\dfrac{2a}{{Q_0}^2}}{\left(\dfrac{1}{{Q_0}^2}\right)^2} = \frac{K\,{V_1}^2}{2} \cdot 2a \cdot {Q_0}^2$$

D'où :

$$V_S\,(x) \approx V_S\,(1) + \left(\frac{d\,V_S}{dx}\right)_{x=1} \cdot (x - 1)$$

$$\Leftrightarrow\ V_S \approx 0 + \frac{K\,{V_1}^2}{2} \cdot {Q_0}^2 \cdot 2a \cdot (x - 1) \qquad \textbf{autour de x = 1.}$$

$$\Leftrightarrow\ V_S \approx K\,{V_1}^2\,{Q_0}^2\,a \cdot (x - 1) \qquad \boxed{\approx \frac{K\,{V_1}^2\,{Q_0}^2\,a\,(\omega - \omega_0)}{\omega_0}}$$

47. On choisit $\omega_0 = \Omega_0$ et on obtient une tension v_S reflétant l'écart de fréquence par rapport à la porteuse d'après l'expression ci-dessus.

$\Rightarrow$ **Démodulation de fréquence**.

V. Amplificateur moyennes fréquences

A. Circuits couplés par inductance mutuelle

48. Au primaire : $$\underline{V}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j L_1 \omega \underline{I}_1 + \frac{\underline{I}_1}{j C_1 \omega} = j M \omega \underline{I}_2 \qquad (1)$$

Au secondaire : $$0 = R_2 \underline{I}_2 + j L_2 \omega \underline{I}_2 + \frac{\underline{I}_2}{j C_2 \omega} + j M \omega \underline{I}_1 \qquad (2)$$

(2) conduit à : $$\underline{I}_2 = -\frac{j M \omega \underline{I}_1}{R_2 + j L_2 \omega + \frac{1}{j C_2 \omega}} = -\frac{j M \omega \underline{I}_1}{\underline{Z}_2} .$$

D'où (1) devient : $$\underline{V}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \frac{M^2 \omega^2 \underline{I}_1}{\underline{Z}_2} .$$

Soit : $$\boxed{\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1 + \frac{M^2 \omega^2}{\underline{Z}_2}}} \qquad \boxed{\underline{I}_2 = \frac{-j M \omega \underline{V}_1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + M^2 \omega^2}}$$

49. A l'accord (ω_0) $\underline{Z}_1 = R_1$ et $\underline{Z}_2 = R_2$ donc :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1}{R_1 + \frac{M^2 \omega_0^2}{R_2}} \qquad \underline{I}_2 = \frac{-j M \omega_0 \underline{V}_1}{R_1 R_2 + M^2 \omega_0^2}$$

avec : $$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2} .$$

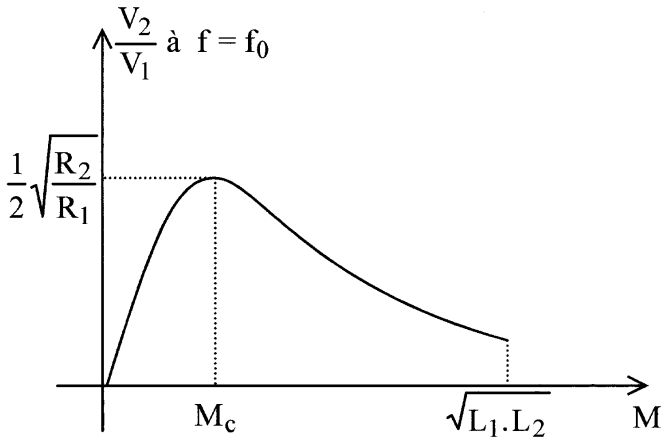
50. On a $\underline{V}_2 = R_2 \underline{I}_2$ à $f = f_0$, donc :

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{-j M \omega_0 R_2}{R_1 R_2 + M^2 \omega_0^2} \qquad \text{d'où :} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\frac{R_1}{M \omega_0} + \frac{M \omega_0}{R_2}}$$

– **Limites** : si $M \to 0$, $\frac{V_2}{V_1} \to 0$; si $M \to +\infty$, $\frac{V_2}{V_1} \to 0$ (en fait $M_{max} = \sqrt{L_1 L_2}$).

– Le dénominateur est une somme de 2 termes dont le produit est constant. Il sera donc minimal lorsque ces 2 termes sont égaux.

$$\frac{R_1}{M_C\,\omega_0} = \frac{M_C\,\omega_0}{R_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{M_C = \sqrt{\frac{R_1\,R_2}{\omega_0^{\,2}}}}$$



A M = M_C :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2\,\dfrac{R_1}{M_C\,\omega_0}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

Condition d'existence de M_C : $k \le 1 \Leftrightarrow M_C^{\,2} \le L_1\,L_2$

$$\Leftrightarrow \frac{R_1\,R_2}{\omega_0^{\,2}} \le L_1\,L_2 \Leftrightarrow 1 \le \frac{L_1\,\omega_0}{R_1} \cdot \frac{L_2\,\omega_0}{R_2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{1 \le Q_1 \cdot Q_2}$$

51. $$M_C^{\,2} = \frac{R_1\,R_2}{\omega_0^{\,2}} = \frac{L_1\,L_2}{Q_0^{\,2}} = k_C^{\,2} \cdot L_1\,L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{Q_0 = \frac{1}{k_C}}$$

52. On se place au couplage critique.

a.

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{-\,j\,M_C\,\omega\,R_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + M_C^{\,2}\,\omega^2}$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\,L_1\,\omega + \frac{1}{j\,C_1\,\omega} = R_1\left(1 + j\,Q_0\underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}_{A}\right)$$

$$A = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\delta f + f_0}{f_0} - \frac{f_0}{\delta f + f_0} = \frac{(\delta f)^2 + 2 f_0\,\delta f}{f_0^{\,2} + f_0 \cdot \delta f} \approx 2\,\frac{\delta f}{f_0} \qquad (\delta f \text{ infiniment petit}).$$

D'où : $$\underline{Z}_1 \approx R_1 \left(1 + j\, Q_0 \,.\, 2\frac{\delta f}{f_0}\right).$$

De la même façon, $$\underline{Z}_2 \approx R_2 \left(1 + j\, Q_0 \,.\, 2\frac{\delta f}{f_0}\right).$$

Donc : $$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \approx \frac{-j\,\frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\omega_0} \,.\, \omega R_2}{R_1 R_2 \left(1 + j\, Q_0 \,.\, 2\frac{\delta f}{f_0}\right)^2 + \frac{R_1 R_2}{\omega_0^2} \,.\, \omega^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \approx \frac{-j\sqrt{R_1 R_2}\left(1 + \delta f/f_0\right)}{\left[\left(1 + 4j\, Q_0 \frac{\delta f}{f_0} - 4Q_0^2\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^2\right) + 1 + \left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^2 + \frac{2\delta f}{f_0}\right] R_1}$$

Soit : $$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \approx \frac{-j\sqrt{R_1 R_2}}{2R_1\left(1 + 2Q_0\, j\frac{\delta f}{f_0} - 2Q_0^2\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^2\right)} \qquad \text{car } Q_0 >> 1$$

autour de f_0 à $M = M_C$

D'où : $$\frac{V_2}{V_1} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \,.\, \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_0^4\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^4 - 4Q_0^2\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^2 + 4Q_0^2\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^2}}$$

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \,.\, \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_0^4\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^4}}}$$

Pour δf faible à $M = M_C$ et $Q_0 >> 1$.

b. Limites de bande pour : $$4\, Q_0^4\left(\frac{\delta f}{f_0}\right)^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta f}{f_0} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\, Q_0}$$

D'où : $$\boxed{\begin{array}{c} B_P = \dfrac{f_0\sqrt{2}}{Q_0} \\ (-3\text{ dB}) \end{array}}$$

Cette bande passante est donc $\sqrt{2}$ fois plus grande que pour un circuit primaire seul, avec sortie aux bornes de R_1

53. *a.* On a maitenant : $k = \frac{M}{L}$.

D'après ce qui a été vu plus haut :

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \approx \frac{-j\,M\,\omega\,R}{R^2\left(1 + j\,2Q_0\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)^2 + M^2\,\omega^2} \approx \frac{-j\,M\,\omega_0\,R}{R^2\left(1 + j\,2Q_0\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)^2 + M^2\,\omega^2}.$$

D'où : $$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \approx \frac{-j\,Q_0\,k}{\left(1 + 2j\,Q_0\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)^2 - \left(\underbrace{j\,\omega_0\,k\,\frac{L}{R}}_{Q_0}\right)^2}$$

$$\approx \frac{-j\,Q_0\,k}{\left(1 + 2j\,Q_0\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} - j\,k\,Q_0\right)\left(1 + 2j\,Q_0\,\frac{\omega-\dot{\omega}_0}{\omega_0} + j\,k\,Q_0\right)}$$

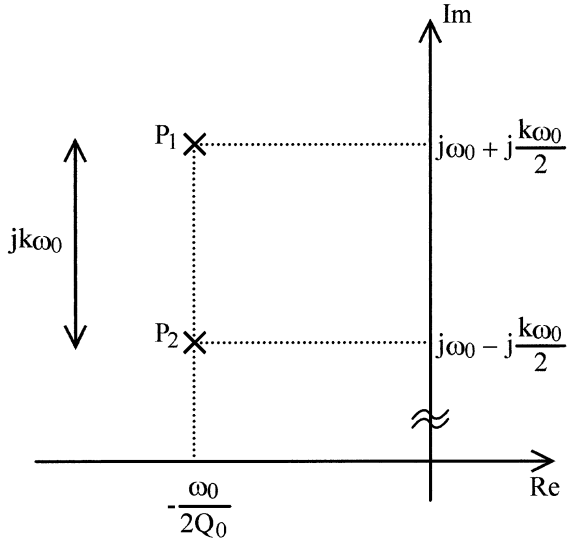
$$\approx \frac{-j\,Q_0\,k\,{\omega_0}^2}{\left(2j\,Q_0\,\omega - 2j\,Q_0\,\omega_0 + \omega_0 - j\,k\,Q_0\,\omega_0\right)\left(2j\,Q_0\,\omega - 2j\,Q_0\,\omega_0 + \omega_0 \dot{+} j\,k\,Q_0\,\omega_0\right)}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \approx \frac{-j\,k\,{\omega_0}^2}{4Q_0\left(j\,\omega - \underbrace{\left(j\,\omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q_0} + \frac{j\,k\,\omega_o}{2}\right)}_{\downarrow\ \underline{p}_1}\right)\left(j\,\omega - \underbrace{\left(j\,\omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q_0} - \frac{j\,k\,\omega_o}{2}\right)}_{\downarrow\ \underline{p}_2}\right)}}$$

b. La factorisation ci-dessus montre que :

$$\begin{cases} \underline{p}_1 = -\frac{\omega_0}{2Q_0} + j\,\omega_0 + j\,\frac{k\,\omega_0}{2} \\ \underline{p}_2 = -\frac{\omega_0}{2Q_0} + j\,\omega_0 - j\,\frac{k\,\omega_0}{2} \end{cases}$$



$\begin{cases} 2 \text{ pôles} \\ \text{Pas de zéros} \end{cases}$

$$\frac{\underline{V_2}}{\underline{V_1}} \approx -\frac{j\,\omega_0^{\,2}\,k}{4Q_0} \cdot \frac{1}{(j\,\omega - \underline{p_1})\,(j\,\omega - \underline{p_2})}$$

c. D'après ce qui précède :

$$\frac{V_2}{V_1} \approx \frac{\omega_0 \cdot P_1P_2}{4\,Q_0} \cdot \frac{1}{P_1P \cdot P_2P}$$

P : pt sur l'axe imaginaire à l'ordonnée jω.

L'aire du triangle P_1PP_2 est $\mathcal{A}$:

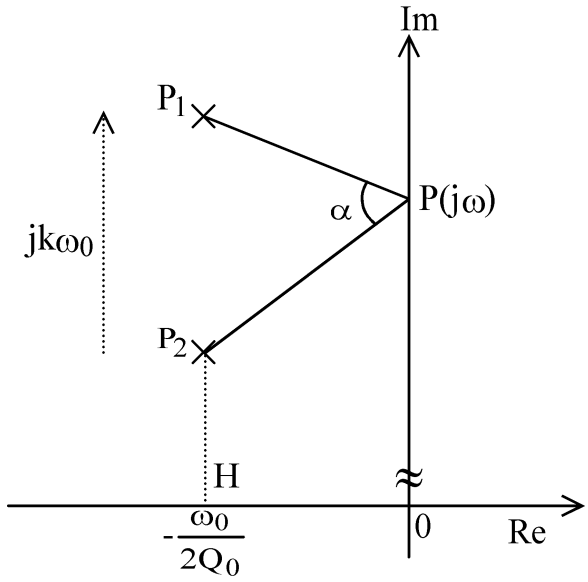
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot k\,\omega_0 = \frac{\omega_0}{2\,Q_0} = \frac{P_1P \cdot P_2P \cdot \sin\alpha}{2}$$

P_1P_2

$$\Leftrightarrow \frac{P_1P_2 \cdot \omega_0}{4\,Q_0} = \frac{P_1P \cdot P_2P \sin\alpha}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega_0 \cdot P_1P_2}{4\,Q_0 \cdot P_1P \cdot P_2P} = \frac{\sin\alpha}{2}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} \approx \frac{\sin\alpha}{2}}$$

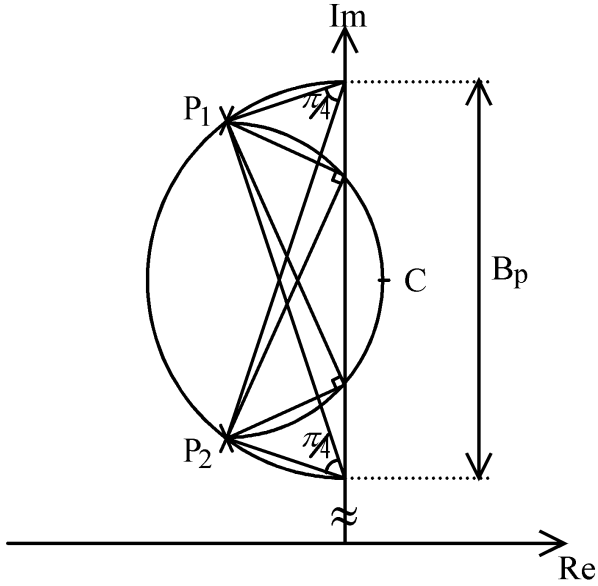


d. Couplage serré : $k > k_C \Leftrightarrow k > \frac{1}{Q_0}$ d'après 51.

Donc : $$P_1P_2 > \frac{\omega_0}{Q_0} \Leftrightarrow P_1P_2 > 20H$$

On trace le cercle de diamètre P_1P_2. Il coupe l'axe imaginaire en 2 points puisque $P_1P_2 > 2$ OH.

Pour ces 2 points, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ donc sin α = 1 et est maximal.



Existence de 2 maxima pour lesquels $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}$.

Détermination de la B_p à – 3 dB :

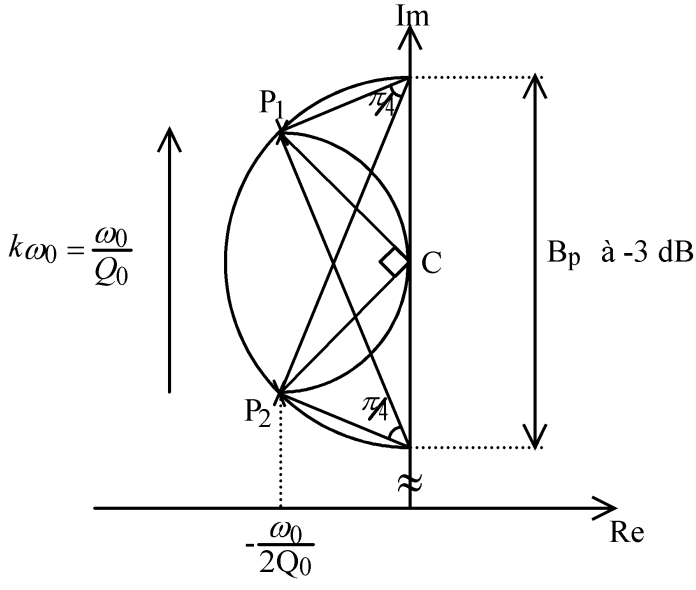
Il faut $\alpha = \frac{\pi}{4}$ car alors $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On trace le cercle de centre C passant par P_1 et P_2 (C est le point du cercle précédent d'ordonnée moyenne entre P_1 et P_2).

$\overset{\frown}{P_1 C P_2} = \frac{\pi}{2}$ angle au centre $\Rightarrow$ position des limites de bande passante par angle inscrit $= \frac{\pi}{4}$ et points du cercle sur l'axe imaginaire.

e. Couplage critique : $k = k_C = \frac{1}{Q_0}$.

Le cercle de diamètre $P_1 P_2$ est tangent à l'axe imaginaire en C. Donc $\sin\alpha = 1$ pour une seule valeur : $\omega = \omega_0$



$$B_p = 2 \cdot P_1 C$$

$$= 2 \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2 Q_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2 Q_0}\right)^2}$$

$$= 2 \frac{\omega_0}{\sqrt{2}\, Q_0} = \sqrt{2}\, \frac{\omega_0}{Q_0}$$

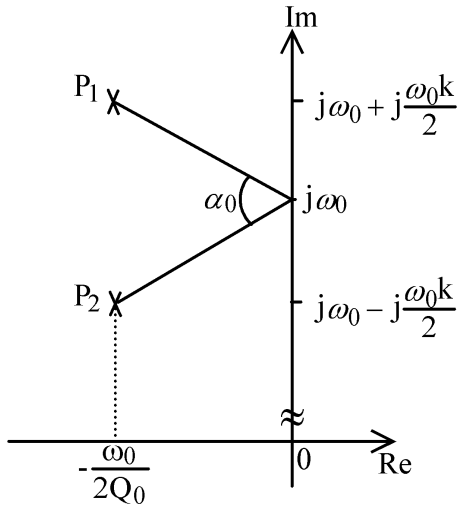
$$\boxed{B_p = \sqrt{2}\, \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (\omega)}$$ cf. 52.*b*.

f. Couplage lâche $k < k_c \Leftrightarrow k < \frac{1}{Q_0}$.

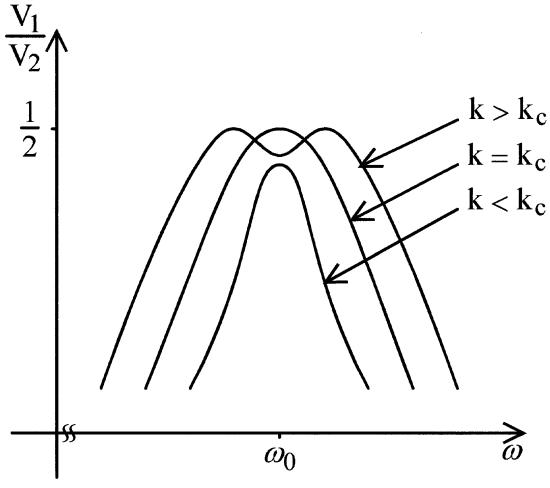
Le cercle de diamètre $P_1 P_2$ ne coupe pas l'axe imaginaire.

Donc $\sin \alpha = 1$ n'est pas atteint.

$$\boxed{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)_{max} = \frac{\sin \alpha_0}{2} < \frac{1}{2}}$$



g. D'après ce qui vient d'être vu, on obtient les courbes :



B. Amplificateur sélectif

54. Le schéma équivalent du montage conduit à :

$$\underline{V}_S = -s_T \cdot \underline{V}_{GS} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_B} + j\,C\,\omega + \frac{1}{j\,L\,\omega}} \qquad \text{et} \qquad \underline{V}_E = \underline{V}_{GS} \cdot$$

D'où :
$$\underline{A}_V = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E} = \frac{-s_T \cdot R_B}{1 + j\,R_B\,C\,\omega + \frac{R_B}{j\,L\,\omega}} = \frac{-s_T \cdot R_B}{1 + j\,Q_B\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec :
$$Q_B = \frac{R_B}{L\,\omega_0} = R_B\,C\,\omega_0$$

↑

Coefficient de qualité de la bobine à $\omega = \omega_0$.

Posons $\underline{A}_0 = -s_T \cdot R_B$, on obtient :

$$\boxed{\underline{A}_V \approx \frac{\underline{A}_0}{1 + j\,Q_B \cdot 2\,\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}}}$$

car Q_B élevé $\Rightarrow$ utilisation de l'approximation de la bande étroite vue au 52. pour ω autour de ω_0.

55. On a pour un étage :

$$\underline{A}_{V_1} \approx \frac{\underline{A}_0}{1 + 2\,j\,Q_B\,\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}}$$

C'est un passe bande du 2e ordre $\Rightarrow B_1 = \frac{f_0}{Q_B}$ en Hz.
(B_P à -3 dB)

Pour 2 étages identiques en cascade, d'après les hypothèses données :

$$\underline{A}_{V_2} \approx \frac{\underline{A}_0^{\,2}}{\left(1 + 2\,j\,Q_B\,\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2} \cdot$$

Au limites de bande passante à – 3 dB :

$$\frac{A_0^{\,2}}{\sqrt{2}} = \frac{A_0^{\,2}}{1 + 4\,Q_B^{\,2}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + 4\,Q_B^{\,2}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2 = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{4\,Q_B^2} \Leftrightarrow \omega = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2\,Q_B}\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

Donc : $B_2 = \dfrac{f_0}{Q_B}\sqrt{\sqrt{2}-1}$ en Hz.

$$\Leftrightarrow \boxed{B_2 = B_1\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

Pour les facteurs de mérite : $M_1 = A_0 \cdot B_1$

$$M_2 = A_0 \cdot B_2 = A_0\,B_1\sqrt{\sqrt{2}-1} \approx 0{,}63\,M_1$$

Donc : $\boxed{M_2 < M_1}$

56. **Circuits à accords décalés**

Pour le premier étage, on a : $$\underline{A}_{V_1} = \frac{-s_T \cdot R_B}{1 + j\,Q_1\left(\dfrac{\omega}{\omega_1} - \dfrac{\omega_1}{\omega}\right)}$$

avec : $$Q_1 = \frac{R_B}{L\,\omega_1} = R_B\,C\,\omega_1$$

$$\Leftrightarrow \underline{A}_{V_1} = -\frac{s_T \cdot R_B \cdot \dfrac{1}{Q_1} \cdot \omega_1}{(j\,\omega)^2 + j\,\omega\,\dfrac{\omega_1}{Q_1} + {\omega_1}^2} = -\frac{s_T}{C} \cdot \frac{j\,\omega}{(j\,\omega)^2 + j\,\omega\,\dfrac{\omega_1}{Q_1} + {\omega_1}^2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{A}_{V_1}(p) = -\frac{s_T}{C} \cdot \frac{p}{p^2 + p\,\dfrac{\omega_1}{Q_1} + {\omega_1}^2}$$

Pôles : $$\Delta = \frac{{\omega_1}^2}{{Q_1}^2} - 4\,{\omega_1}^2 < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{p}_1 &= -\frac{\omega_1}{2\,Q_1} + j\,\omega_1\sqrt{1 - \frac{1}{4\,{Q_1}^2}} \\ \underline{p}_2 &= -\frac{\omega_1}{2\,Q_1} - j\,\omega_1\sqrt{1 - \frac{1}{4\,{Q_1}^2}} \end{aligned}}$$

$$\underline{A}_{V_1} = -\frac{s_T}{C} \cdot \frac{p}{(p - \underline{p}_1)(p - \underline{p}_2)} \qquad \text{donc : } \begin{cases} 1 \text{ zéro} \\ 2 \text{ pôles} \end{cases}$$

Autour de $\omega = \omega_1$, le pôle $\underline{p}_2$ «compense» le zéro $p = 0$ car $p \approx \dfrac{p - \underline{p}_2}{2}$.

Donc : $\underline{A}_{V_1} \approx -\dfrac{s_T}{2\,C} \cdot \dfrac{1}{p - \underline{p}_1}$ pour ω autour de ω_1.

De la même façon, $\underline{A}_{V_2} \approx -\dfrac{s_T}{2\,C} \cdot \dfrac{1}{p - \underline{p}_1'}$ pour ω autour de ω_2

avec : $$\boxed{\underline{p}_1' = -\frac{\omega_2}{2\,Q_2} + j\,\omega_2 \sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q_2^{\,2}}}}$$

D'où : $$\boxed{\underline{A}_V \approx \frac{s_T^{\,2}}{4\,C^2} \cdot \frac{1}{(p - \underline{p}_1)\ (p - \underline{p}_1')}}$$

Pour les pôles $\underline{p}_1$ et $\underline{p}_1'$:

– les parties réelles sont égales : $\dfrac{\omega_1}{2\,Q_1} = \dfrac{1}{2\,R_B\,C} = \dfrac{\omega_2}{2\,Q_2}$,

– les parties imaginaires : $j\,\omega_1 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4\,Q_1^{\,2}}} \approx j\,\omega_1$,

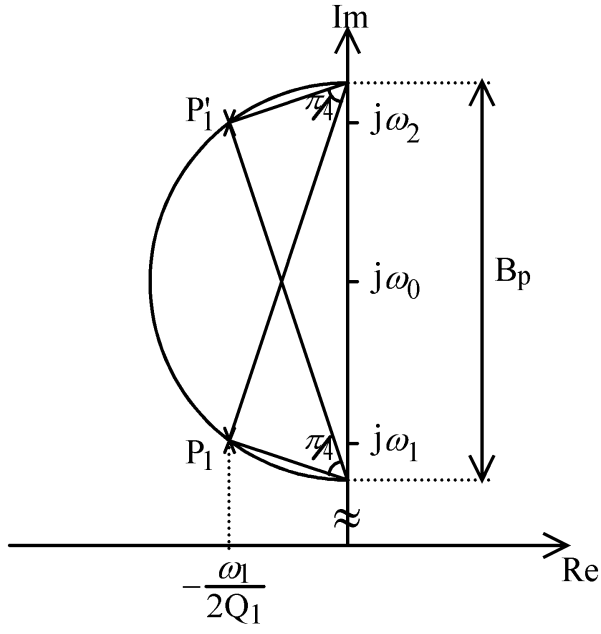
$$j\,\omega_2 \sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q_2^{\,2}}} \approx j\,\omega_2 ,$$

sont symétriques par rapport à ω_0.

On retrouve donc pour $\underline{A}_V$ un diagramme des pôles identique à celui des circuits couplés.

On obtiendra donc pour A_V (f) les 3 types de courbes vus précédemment suivant l'écartement de ω_1 et ω_2 .

Dans le cas critique, le cercle de diamètre $P_1\,P_1'$ est tangent à l'axe imaginaire.



$$B_p = 2\left(\frac{\omega_1}{2\,Q_1}\cdot\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\,\frac{\omega_1}{Q_1}$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{\omega_2}{Q_2} \approx \sqrt{2}\,\frac{\omega_0}{Q_B}$$

$$A_{Vmax} = \frac{s_T^{\,2}}{4\,C^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\omega_1}{4\,Q_1}\sqrt{2}\right)^2}$$

D'où le facteur de mérite : $M_D = \dfrac{s_T}{2\,C}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}\,\frac{\omega_1}{2Q_1}}\cdot\sqrt{2}\,\dfrac{\omega_1}{Q_1}$

$$M_D = \frac{s_T}{C} = \frac{s_T\,R_B\,\omega_1}{Q_1} \approx \frac{s_T\,R_B\,\omega_0}{Q_B}$$

Donc : $\boxed{M_D \approx M_1}$ et de plus, on a amélioré la forme de A_V (f) (flancs + raides).

VI. **Rapport Signal/Bruit dans la démodulation MA**

57. On a, d'après la définition de la puissance normalisée :

$$\sigma_N^2 = N^2\,\overline{\cos^2\left[\Phi_n(t)\right]}$$

Donc : $N^2\,\overline{\cos^2\left[\Phi_n(t)\right]} = \eta\cdot\Delta F_B \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{G\cdot\overline{\cos^2\left[\Phi_n(t)\right]} = \Delta F_B}$

A. DANS LA DÉTECTION SYNCHRONE D'UNE ONDE MA

58. On a : $v_E(t) = P_0\,(1 + m\cos\omega t)\cos(\Omega t + \varphi)$

S_i = Valeur moyenne de $v_E^{\,2}(t)$.

$$v_E^{\,2}(t) = P_0^{\,2}\,(1 + m\cos\omega t)^2\cos^2(\Omega t + \varphi)$$

$$= P_0^{\,2}\left(1 + 2m\cos\omega t + m^2\,\frac{\cos 2\omega t + 1}{2}\right)\frac{\cos(2\Omega t + 2\varphi) + 1}{2}$$

$\Rightarrow$ Termes de pulsation : 2Ω, $2\Omega \pm \omega$, $2\Omega \pm 2\omega$, ω, 2ω, 0.

Seuls les trermes continus ont une valeur moyenne non nulle, donc :

$$S_i = P_0^{\,2}\,\frac{1 + \frac{m^2}{2}}{2} = \boxed{P_0^{\,2}\left(\frac{1}{2} + \frac{m^2}{4}\right) = S_i}$$

59. On a vu (questions 28., 29., 30) : $v_3(t) = \dfrac{K P_0 P_0'}{2}(1 + m\cos\omega t)\ \alpha$ (en prenant $\varphi = \varphi'$).

Donc : $$v_4(t) = \frac{K P_0 P_0'}{2} m \alpha \cos\omega t \ .$$

$$\Rightarrow \boxed{S_0 = \frac{(K P_0 P_0' m \alpha)^2}{8}}$$

Remarque : Si on choisit $\varphi = \varphi' + \pi$, seul le signe de v_4 change donc pas S_0.

60. **Pulsation instantanée de $n_i(t)$:**

$\left|\dfrac{d\varphi_i(t)}{dt}\right|$ pulsation instantanée de $n_i(t)$ est comprise entre $\Omega - \omega_{max}$ et $\Omega + \omega_{max}$ (on peut aussi raisonner en pulsations algébriques $\Rightarrow \dfrac{d\varphi_i}{dt} \in \left[-\Omega - \omega_{max}\ ,\ -\Omega + \omega_{max}\right] \cup \left[\Omega - \omega_{max}\ ,\ \Omega + \omega_{max}\right]$.

– $n_2(t) = K \cdot N \cos\varphi_i(t) \cdot P_0' \cos(\Omega t + \varphi')$

$$= \frac{K N P_0'}{2}\left[\cos(\varphi_i(t) + \Omega t + \varphi') + \cos(\varphi_i(t) - \Omega t - \varphi')\right]$$

Donc deux termes de pulsations instantanées algébriques :

$$\frac{d\varphi_i}{dt} + \Omega \qquad \text{et} \qquad \frac{d\varphi_i}{dt} - \Omega$$

On sait que : $\dfrac{d\varphi_i}{dt} \in \left[-\Omega - \omega_{max}\ ,\ -\Omega + \omega_{max}\right] \cup \left[-\Omega - \omega_{max}\ ,\ -\Omega + \omega_{max}\right]$,

donc : $\begin{cases} \dfrac{d\varphi_i}{dt} + \Omega \in \left[-\omega_{max}\ ,\ +\omega_{max}\right] \cup \left[2\Omega - \omega_{max}\ ,\ 2\Omega + \omega_{max}\right] \\ \dfrac{d\varphi_i}{dt} - \Omega \in \left[-2\Omega - \omega_{max}\ ,\ -2\Omega + \omega_{max}\right] \cup \left[-\omega_{max}\ ,\ +\omega_{max}\right] \end{cases}$.

– Pour $n_3(t)$, il subsiste les termes dont la pulsation instantanée algébrique est comprise entre $-\omega_{max}$ et $+\omega_{max}$. Donc d'après les intervalles ci-dessus, les deux termes de $n_2(t)$ vont donner un terme de bruit (pulsation $\in \left[-\omega_{max}, +\omega_{max}\right]$) puisque l'intervalle $\left[-\omega_{max}, \omega_{max}\right]$ n'est pas atteint **simultanément** par leur pulsation instantanée. Cela revient à deux termes indépendants de pulsation $\in \left[0, \omega_{max}\right]$.

$$n_3(t) = \frac{K N P_0'}{2} \alpha \cdot [\cos\varphi_0(t) + \cos\varphi_0'(t)]$$

avec : $$\frac{d\varphi_0}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi_0'}{dt} \in \left[0\ ,\ \omega_{max}\right]$$

– $\sigma_3^2 = \dfrac{(K N P_0' \alpha)^2}{8}\left[\overline{\cos^2\varphi_0(t)} + \overline{\cos^2\varphi_0'(t)}\right]$ car les 2 termes sont indépendants comme vu plus haut.

Remarque : On peut aussi considérer 1 seul terme avec $\omega \in \left[-\omega_{max}, +\omega_{max}\right]$

Or : $\overline{\cos^2 \varphi_0 (t)} = \frac{f_{max}}{G} = \overline{\cos^2 \varphi_0' (t)}$ d'après 57 (ou 1 seul terme, bande double).

Donc : $$\sigma_3^2 = \frac{2 (K N P_0' \alpha)^2 f_{max}}{4 \cdot \frac{N^2}{\eta}} = \boxed{\eta f_{max} \frac{K^2 P_0'^2 \alpha^2}{2} = \sigma_3^2}$$

– Rapport $\frac{\text{Signal}}{\text{Bruit}}$

$$\frac{S_0}{\sigma_3^2} = \frac{(K P_0 P_0' m \alpha)^2}{8} \times \frac{2}{\eta f_{max} K^2 P_0'^2 \alpha^2} = \frac{P_0^2 m^2}{4 \eta f_{max}}$$

D'où : $$\boxed{\frac{S_0}{\sigma_3^2} = \frac{m^2}{2 + m^2} \cdot \frac{S_i}{\eta f_{max}}}$$

Pour avoir un bon rapport Signal/Bruit, il faut donc avoir m grand.

B. Dans la détection synchrone d'une onde MA BLU

61. On a $$v_E (t) = \frac{m P_0}{2} \cos [(\Omega + \omega) t + \varphi]$$ $(m = k S_M)$

$$v_E^2 (t) = \frac{m^2 P_0^2}{4} \cos^2 [(\Omega + \omega) t + \varphi]$$

donc : $$S_i = \overline{v_E^2 (t)} = \boxed{\frac{m^2 P_0^2}{8} = S_i}$$

62. $$v_3 (t) = \frac{m K P_0 P_0'}{4} \alpha \cos \omega t$$ $(\varphi = \varphi')$ par exemple.

D'où : $$\boxed{S_0 = \frac{\left(m K P_0 P_0' \alpha\right)^2}{32}}$$

63. – **Pulsation instantanée de $n_i (t)$** :

$$\frac{d \varphi_i}{dt} \in \left[-\Omega - \omega_{max}, -\Omega\right] \cup \left[\Omega, \Omega + \omega_{max}\right]$$

– $n_2 (t) = K N \cos \varphi_i (t) \cdot P'_0 \cos (\Omega t + \varphi')$

$$= K\,N\,P_0' \cdot \frac{1}{2}\left[\cos\left(\varphi_i(t) + \Omega t + \varphi'\right) + \cos\left(\varphi_i(t) - \Omega t - \varphi'\right)\right]$$

Pulsations instantanées algébriques : $\dfrac{d\varphi_i}{dt} + \Omega$; $\dfrac{d\varphi_i}{dt} - \Omega$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} + \Omega \in \left[-\omega_{max},\ 0\right] \cup \left[2\Omega,\ 2\Omega + \omega_{max}\right]$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} - \Omega \in \left[-2\Omega - \omega_{max},\ -2\Omega\right] \cup \left[0,\ \omega_{max}\right]$$

– Pour $n_3(t)$, il subsiste les termes dont la pulsation instantanée algébrique est comprise entre $-\omega_{max}$ et $+\omega_{max}$. Donc, d'après les intervalles ci-dessus, les deux termes de $n_2(t)$ vont donner un terme de pulsation $\in \left[\ O\ ,+\omega_{max}\right]$ puisque les intervalles $\left[-\omega_{max}, 0\right]$ et $\left[0\ ,\omega_{max}\right]$ ne sont pas atteints simultanément :

$$n_3(t) = \alpha \frac{K\,N\,P_0'}{2} \cos\varphi_0(t)$$

avec : $\dfrac{d\varphi_0}{dt} \in \left[\ 0\ ,+\omega_{max}\right]$

– $\sigma_3^2 = \dfrac{(\alpha\,K\,N\,P_0')^2}{4} \cdot \overline{\cos^2\varphi_0(t)}$

or : $\overline{\cos^2\varphi_0(t)} = \dfrac{f_{max}}{G}$.

Donc : $$\sigma_3^2 = \frac{(\alpha\,K\,N\,P_0')^2}{4} \cdot \frac{f_{max}}{\dfrac{N^2}{\eta}} = \boxed{\eta \cdot f_{max} \cdot \frac{K^2\,P_0'^2\,\alpha^2}{4} = \sigma_3^2}$$

– Rapport Signal/Bruit

$$\frac{S_0}{\sigma_3^2} = \frac{(m\,K\,P_0\,P_0'\,\alpha)^2}{32} \times \frac{4}{\eta\,f_{max}\,K^2\,P_0'^2\,\alpha^2}$$

$$= \frac{m^2\,P_0^2}{8\,\eta\,f_{max}} = \quad \boxed{\frac{S_i}{\eta \cdot f_{max}} = \frac{S_0}{\sigma_3^2}}$$

C'est le meilleur possible en MA classique ($m \to +\infty$, voir 60).

Agrégation
(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve C : Problème d'Électricité, d'Électronique, d'Électrotechnique et d'Automatique - Session : 1994

Premiere partie : **Onduleur monophasé.**

1-1 voir document réponse DR 1-1.

1-2

1-2-1 Vue la symétrie du montage, charge R-L, le courant est alternatif, $i(0) = -I_0$, $i(T/2) = +I_0$.

1-2-2 $0 < t < T/2 - \Theta$ $E/R = \tau . di/dt + i$ avec $\tau = L/R = 1{,}84$ ms.

soit $i(t) = \frac{E}{R} - (\frac{E}{R} + I_0).e^{-t/\tau}$

1-2-3 $i(\frac{T}{2} - \theta) = I_1 = \frac{E}{R} - (\frac{E}{R} + I_0).e^{-(\frac{\frac{T}{2}-\theta}{\tau})}$

1-2-4 $T/2 - \Theta < t < T/2$ $u(t) = 0$ $0 = \tau . di/dt + i$ d'où $i(t) = I_1.e^{-(\frac{t-(\frac{T}{2}-\theta)}{\tau})}$

1-2-5 $i(T/2) = I_0$ d'où $I_1 = I_0.e^{\frac{\theta}{\tau}}$;

en remplaçant dans l'expression établie en 1-2-3, $I_0 = \frac{E}{R}.\frac{e^{-\frac{\theta}{\tau}} - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}$

Application numérique : $I_0 = 24{,}37$ A, $I_1 = 214$ A.

1-2-6 voir document réponse DR 1-2-6.

1-3

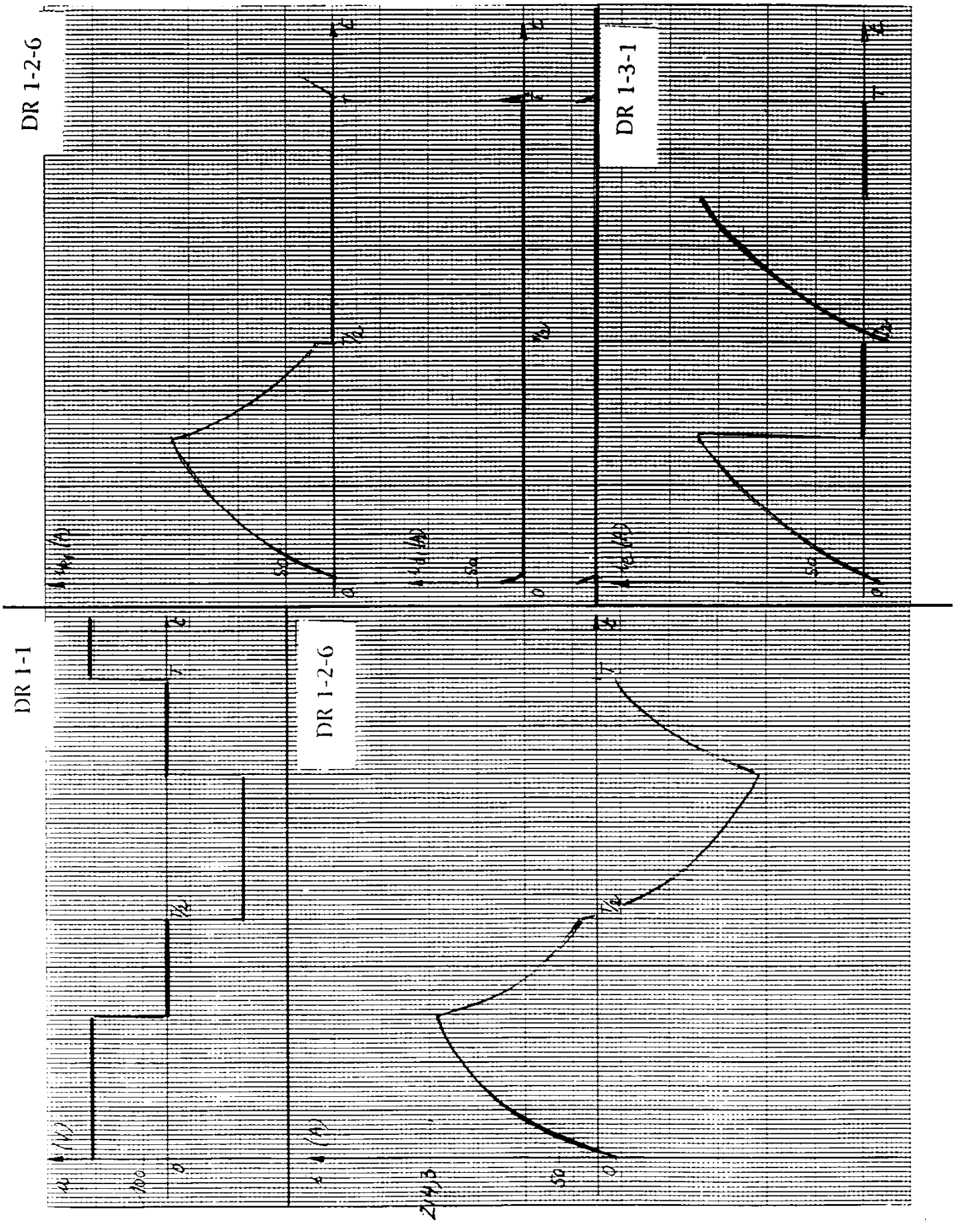
1-3-1 voir document réponse DR 1-3-1.

1-3-2 La puissance moyenne fournie par la source s'écrit : $P_E = \frac{1}{(\frac{T}{2})} \int_0^{\frac{T}{2}-\theta} E.i_e(t)dt$

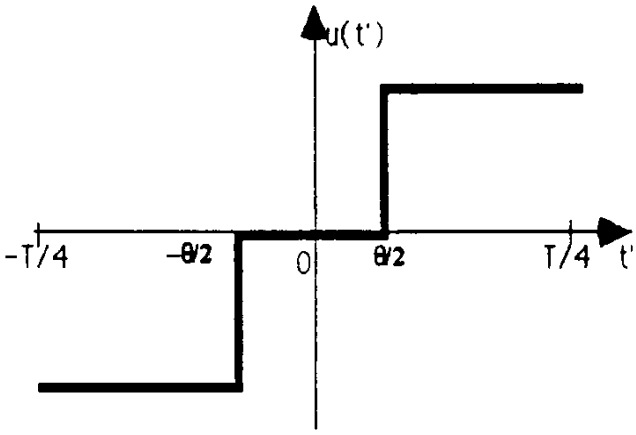
soit : $P_E = \frac{2E}{T} \int_0^{\frac{T}{2}-\theta} [\frac{E}{R} - (\frac{E}{R} + I_0)e^{-t/\tau}]dt$

Application numérique : $P_E = 28{,}9$ kW.

34.0.3 J. 1394-E



1-4



les coefficients de la décomposition s'écrivent :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t').\sin n\omega t'.dt' = 2\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u(t').\sin n\omega t'.dt'$$

les harmoniques pairs sont nuls

soit : $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1).\pi}.\cos(2p+1)\omega\frac{\theta}{2}$

les valeurs efficaces des harmoniques de tension s'écrivent :

$$U_{2p+1} = \frac{2\sqrt{2}E}{(2p+1).\pi}.\cos(2p+1)\omega\frac{\theta}{2}$$

Applications numériques : pour $\underline{E = 320\ V \text{ et } \theta = 4\ ms}$ $\underline{U_1 = 233\ V}$

pour $\underline{E = 430\ V \text{ et } U_1 = 233\ V}$ $\underline{\theta = 5,89\ ms.}$

1-4-2 L'harmonique de courant de rang n, (n impair), s'écrit : $i_n(t) = I_n\sqrt{2}.\sin(n\omega t - \varphi_n)$

avec : $I_n = \frac{U_n}{Z_n}$, $Z_n = \sqrt{R^2 + n^2(L\omega)^2}$ et $\varphi_n = \text{Arctg}(n\frac{L\omega}{R})$

1-4-3 La puissance moyenne fournie à la charge a pour expression :

$$P = \overline{p(t)} = \overline{u(t).i(t)} = \sum_{p=0}^{\infty} U_{2p+1}.I_{2p+1}.\cos\varphi_{2p+1}$$

1-4-4 Application numérique :

$P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1 = 28,45\ kW$ ($U_1 = 233\ V$, $I_1 = 141\ A$, $\cos\varphi_1 = 0,866$)

la puissance fournie par la source est égale à la puissance reçue par la charge (calculée en 1-3-2) puisque le convertisseur est considéré parfait :

$$P_E = P_1 + \sum_{p=1}^{\infty} P_{2p+1} = 28,9\ kW \quad \text{d'où} \quad \sum_{p=1}^{\infty} P_{2p+1} = 450\ W.$$

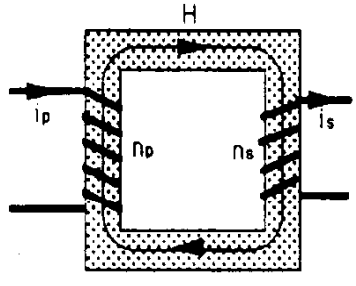
1-5 Schéma équivalent de la charge de l'onduleur.

1-5-1 Les orientations, précisées sur la figure-1-5 font que les forces magnétomotrices $n_p i_p$ et $n_s i_s$ sont en opposition, d'où les expressions des flux totaux embrassés par enroulement:

$$\Phi_p = L_p i_p(t) - M i_s(t)$$

$$\Phi_s = M i_p(t) - L_s i_s(t)$$

$M > 0$, coefficient de mutuelle inductance entre les bobinages primaire et secondaire.



1-5-2 Les tensions aux bornes des enroulements s'écrivent :

$$u_p(t) = r_p i_p(t) + \frac{d\Phi_p(t)}{dt} \quad \text{et} \quad u_s(t) = -r_s i_s(t) + \frac{d\Phi_s(t)}{dt}$$

en remplaçant les flux par leurs expressions (1-5-1),

$$u_p(t) = r_p i_p(t) + L_p \frac{di_p(t)}{dt} - M\frac{di_s(t)}{dt} \quad \text{et} \quad u_s(t) = -r_s i_s(t) - L_s \frac{di_s(t)}{dt} + M\frac{di_p(t)}{dt}$$

L'équation du primaire peut se transformer :

$u_p(t) = r_p i_p(t) + L_p \frac{d}{dt}(i_p - \frac{M}{L_p} i_s)$ en posant $i_{pv}(t) = i_p - \frac{M}{L_p} i_s$ et $i'_p = \frac{M}{L_p} i_s = A i_s$

on établit aisément le schéma de la figure 1-5-2 , avec $u'_p = L_p(di_{pv}/dt)$

1-5-3 En remplaçant $i_p(t)$ par $i_{pv}(t) + i'_p(t)$, l'expression de la tension secondaire 1-5-2 s'écrit : $u_s(t) + r_s i_s(t) + L_s \frac{di_s(t)}{dt} - M\frac{di'_p(t)}{dt} = M\frac{di_{pv}(t)}{dt}$

en tenant compte des notations de la figure 1-5-3 : $M\frac{di'_p(t)}{dt} = \frac{M}{L_p}.u'_p(t)$, et d'autre part

que $i_S(t) = \frac{L_p}{M} i'_p(t)$

$u'_p(t) = (\frac{L_p}{M}).u_s(t) + (\frac{L_p}{M})^2.r_s.i'_p(t) + (\frac{L_p}{M})^2 L_s(1 - \frac{M^2}{L_p L_s})\frac{di'_p(t)}{dt}$, le facteur $1 - \frac{M^2}{L_p L_s} = \sigma$

coefficient de dispersion de Blondel ; en posant :

$r'_s = r_s.(\frac{L_p}{M})^2 \quad l'_s = \sigma l_s.(\frac{L_p}{M})^2 \quad u'_s(t) = (\frac{L_p}{M}).u_s(t)$ l'équation devient

$$u'_p(t) = r'_s.i'_p(t) + l'_s\frac{di'_p(t)}{dt} + u'_s(t)$$

or $u_s(t) = R i_s(t) + L\frac{di_s(t)}{dt} = R(\frac{L_p}{M})i'_p(t) + L(\frac{L_p}{M})\frac{di'_p(t)}{dt}$

d'où $u'_s(t) = R(\frac{L_p}{M})^2 i'_p(t) + L(\frac{L_p}{M})^2\frac{di'_p(t)}{dt} = R'i'_p(t) + L'\frac{di'_p(t)}{dt}$

après avoir posé : $R' = R(\frac{L_p}{M})^2$ et $L' = L(\frac{L_p}{M})^2$

$$\boxed{u'_p(t) = r'_s.i'_p(t) + l'_s\frac{di'_p(t)}{dt} + R'i'_p(t) + L'\frac{di'_p(t)}{dt}}$$

équation permettant d'établir le schéma équivalent de la figure 1-5-3.

1-5-4 En négligeant le courant $i_{pv}(t)$, ce qui revient à considérer L_p infinie, le schéma se réduit à l'association série d'une résistance $R_{éq.} = r_p + r'_s + R'$ et d'une inductance $L_{éq.} = l'_s + L'$

Deuxième partie : **Onduleur monophasé M.L.I.**

2-1 voir document réponse DR 2-1

2-2

2-2-1 La fonction u(t) est impaire, donc décomposable en une série de fonctions "sin", et sur la demi-période [0, T/2] elle présente une symétrie par rapport à T/4 ce qui ne peut se trouver que pour les harmoniques impairs :

$\sin(2p+1)\omega(T/2-t) = \sin\{(2p+1)\omega T/2-(2p+1)\omega t\} = \sin(2p+1)\omega t$

alors que

$\sin 2p\omega(T/2-t) = \sin 2p\omega(-t) = -\sin(2p\omega)t$

soit aussi $u(t) = -u(t+T/2)$.

2-2-2 Décomposition en série de Fourier :

$$b_{2p+1} = \frac{2}{T}\int_0^T u(t).\sin n\omega t.dt = 2\frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t).\sin n\omega t.dt = 4\frac{2}{T}\int_0^{T/4} u(t).\sin n\omega t.dt \quad \text{avec } n = 2p+1$$

$$b_{2p+1} = \frac{8E}{n\omega T}[\cos n\alpha_1 - \cos n\alpha_2 + \cos n\alpha_3 - \cos n\alpha_4 + \cos n\alpha_5] \quad \text{soit} \quad b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi} A_{2p+1}$$

les harmoniques de tension ont pour valeurs efficaces :

$$U_{2p+1} = \frac{2E\sqrt{2}}{(2p+1)\pi} A_{2p+1} \quad \text{avec} \quad A_{2p+1} = \cos n\alpha_1 - \cos n\alpha_2 + \cos n\alpha_3 - \cos n\alpha_4 + \cos n\alpha_5$$

$$n = 2p+1$$

2-3 Le reglage de la valeur efficace du fondamental et la suppression des harmoniques 3, 5, 7 et 9ω se font par les angles $\{\alpha_k\}$ solutions du système d'équations non linéaires :

$$A_1 = \frac{\pi.U_1}{2E\sqrt{2}} \qquad A_3 = 0 \qquad A_5 = 0 \qquad A_7 = 0 \qquad A_9 = 0$$

ce qui se traduit pour les deux valeurs extrêmes de la fem E :

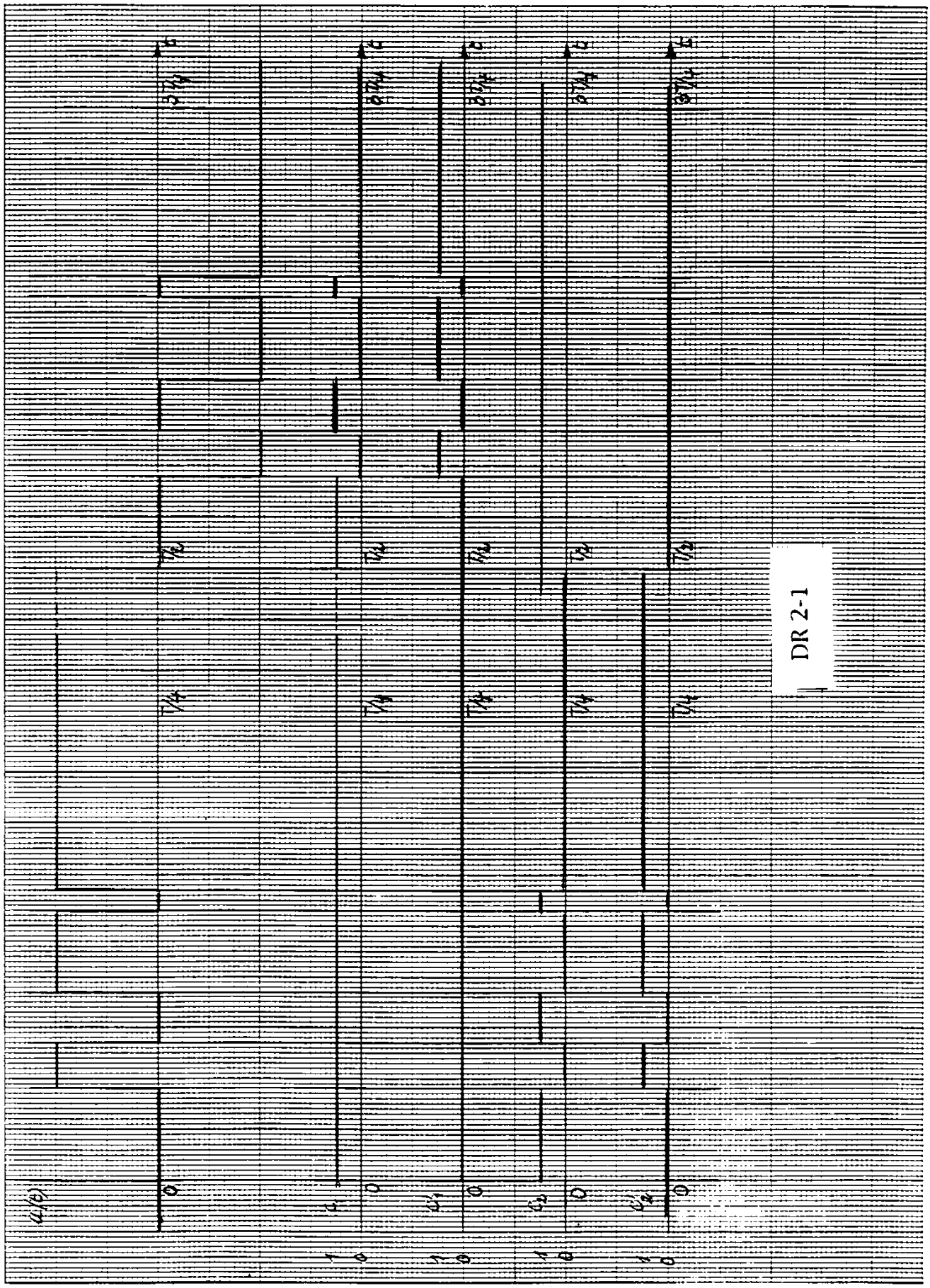
E = 320 V

$A_1 = 0{,}802$ $A_3 = 0$ $A_5 = 0$ $A_7 = 0$ $A_9 = 0$

E = 430 V

$A_1 = 0{,}597$ $A_3 = 0$ $A_5 = 0$ $A_7 = 0$ $A_9 = 0$

34.0.3 J. 1394-F



2-4

2-4-1 Les harmoniques de courant s'écrivent : $i_{2p+1}(t) = I_{2p+1}\sqrt{2}.\sin[(2p+1)\omega t - \varphi_{2p+1}]$

l'expression de la puissance moyenne reçue par la charge a pour valeur

$$P = \overline{u(t).i(t)} = \sum_{p=0}^{\infty} U_{2p+1}.I_{2p+1}.\cos\varphi_{2p+1}$$

avec $I_{2p+1} = \frac{U_{2p+1}}{Z_{2p+1}}$ et $Z_{2p+1} = \sqrt{R^2 + n^2(L\omega)^2}$ $\varphi_n = \text{Arctg}(n\frac{L\omega}{R})$

2-4-2

n	U_n (V)	Z_n (Ω)	I_n (A)	$\cos\varphi_n$	P_n (W)
1	231	1,65	140	0,866	28 007
11	2,54	9,2	0,28	0,155	0,11
13	45	10,8	4,17	0,132	24,8
15	46,9	12,4	3,78	0,115	20,4
17	25,9	14,1	1,84	0,101	4,81
19	52,2	15,75	3,31	0,091	15,75
21	14,3	17,4	0,82	0,082	0,97
23	1,6	19,0	0,09	0,075	0,01
25	5,5	20,7	0,27	0,069	0,1
27	28	22,3	1,3	0,064	2,2
29	9,7	24	0,4	0,060	0,2
31	14,3	25,6	0,6	0,056	0,4

La puissance totale fournie a la charge est de 28 076W ≈ 28,1 kW, dont 70 W dus aux harmoniques.

2-4-3 Les harmoniques de courant possèdent une valeur efficace décroissant plus rapidement que celle des harmoniques de tension, ceci est la consequence du comportement filtre "passe-bas" de la charge, mais en plus le facteur de puissance de chacun des harmoniques diminue quand le rang de l'harmonique augmente.

La puissance est très proche de celle que vehicule le fondamental.

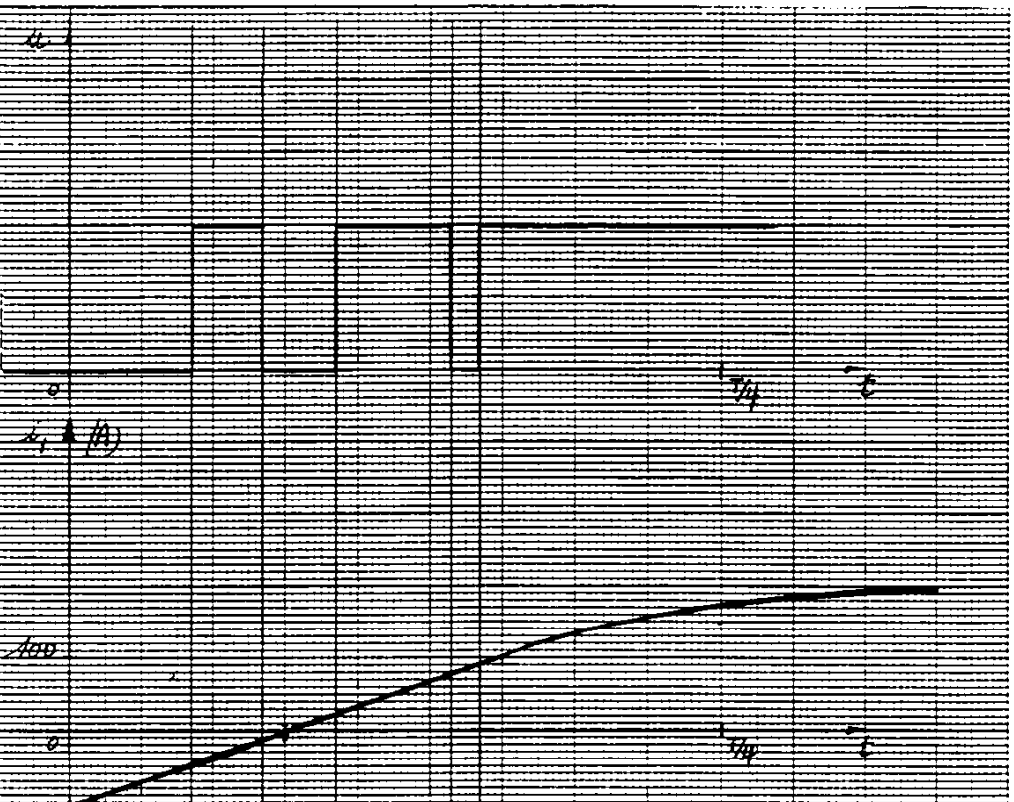
2-5

2-5-1 voir le document réponse DR 2-5-1.

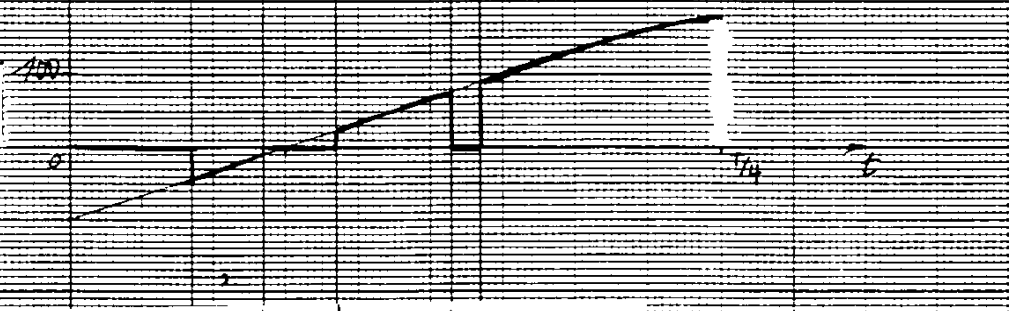
2-5-2 voir le document réponse DR 2-5-2.

34.0.3 J. 1394-G

DR 2-5-1



DR 2-5-2



$\frac{D_1}{D_1}\frac{K_2}{D_2}$ $\frac{D_1}{D_1}\frac{K_2}{D_2}$ $\frac{K_1}{K_1}\frac{K_2'}{K_2'}$ $\frac{K_1}{K_1}\frac{K_2'}{D_2}$ $\frac{K_1}{K_2}\frac{K_2'}{K_2'}$

Troisieme partie : **Onduleur triphasé.**

3-1 Etude des formes d'ondes.

3-1-1 Les tensions simples secondaires ont pour expressions :

$$v_{S1-N}(t) = \frac{n_s}{np}.u_1(t) - \frac{n_s}{np}.u_2(t) \quad v_{S2-N}(t) = \frac{n_s}{np}.u_2(t) - \frac{n_s}{np}.u_3(t) \quad v_{S3-N}(t) = \frac{n_s}{np}.u_3(t) - \frac{n_s}{np}.u_1(t)$$

3-1-2 Ondes triphasées MLI.

Les tensions simples secondaires s'expriment à partir de la différence de deux parmi trois, des tensions delivrees par les onduleurs monophases :

$$v_{Sk-N}(t) = \frac{n_s}{np}(u_k(t) - u_{k+1}(t))$$

$$u_{k_{p3\omega}}(t) = U_{p3\omega}.\sqrt{2}\sin p3\omega(t-(k-1)\frac{T}{3}) \text{ avec } k = 1, 2 \text{ ou } 3; (p \text{ entier positif})$$

d'où $u_{k_{p3\omega}}(t) = U_{p3\omega}.\sqrt{2}\sin p3\omega t$; tous les harmoniques de pulsation $p3\omega$ sont en phase, ils s'éliminent donc dans les différences $u_k(t) - u_{k+1}(t)$. Les tensions simples ne possèdent pas d'harmoniques de pulsation 3ω et multiples $p3\omega$.

3-1-3 Afin de réduire les pertes dues aux commutations des composants, il est inutile de supprimer par le découpage MLI, les harmoniques disparaissant par le couplage du transformateur (harmoniques 3ω et multiples $p3\omega$). Les harmoniques pairs sont inexistants de par la forme d'onde (symétrie par rapport à T/4 pour une fonction impaire); il ne reste qu'à éliminer les harmoniques de rangs 5, 7, 11 et 13ω pour satisfaire la condition imposée sur la valeur efficace du premier harmonique, 17ω, (suivant le fondamental).
Il faut quatre équations (donc quatre angles) pour la suppression des harmoniques, plus une équation, donc un angle, pour le réglage du fondamental; soit au total cinq angles, et donc un système non linéaire de cinq equations.

3-1-4 La valeur efficace du fondamental de la tension simple secondaire, V_f, a pour expression :

$$V_f = \sqrt{3}.U_{f\,ond}.\frac{n_s}{n_p}.$$

$U_{f.ond.}$ représentant le valeur efficace du fondamental de la tension délivrée par chaque onduleur ; cette valeur efficace s'écrit :

$$(E1): \quad \frac{2\sqrt{6}.E}{\pi}.\frac{n_s}{n_p}.(\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma - \cos\delta + \cos\varepsilon) = 231$$

les équations suivantes permettent la suppression des harmoniques 5, 7, 11 et 13ω :

$$(E2): \quad \cos 5\alpha - \cos 5\beta + \cos 5\gamma - \cos 5\delta + \cos 5\varepsilon = 0$$

$$(E3): \quad \cos 7\alpha - \cos 7\beta + \cos 7\gamma - \cos 7\delta + \cos 7\varepsilon = 0$$

$$(E4): \quad \cos 11\alpha - \cos 11\beta + \cos 11\gamma - \cos 11\delta + \cos 11\varepsilon = 0$$

$$(E5): \quad \cos 13\alpha - \cos 13\beta + \cos 13\gamma - \cos 13\delta + \cos 13\varepsilon = 0$$

Pour les deux valeurs extrêmes de E, les systèmes ne différent que par l'équation (E1) dans laquelle le second membre est modifié en fonction de la valeur de E : 320 ou 430 V.

3-1-5 Taux d'harmoniques des tensions simples secondaires à vide :

les valeurs efficaces des harmoniques de tensions simples secondaires s'écrivent :

$$V_{2p+1} = \sqrt{3}.U_{2p+1\,ond.}.\frac{n_s}{n_p} \qquad \text{avec } U_{2p+1\,ond.} = 231\, a_{2p+1} \text{ et } 2p+1 \neq 3m$$

$$V_{3m} = 0$$

$$\tau = \frac{\sqrt{a_{17}^2 + a_{19}^2 + a_{21}^2 + a_{23}^2 + \ldots}}{\sqrt{a_1^2 + a_{17}^2 + a_{19}^2 + a_{21}^2 + a_{23}^2 + \ldots}}$$

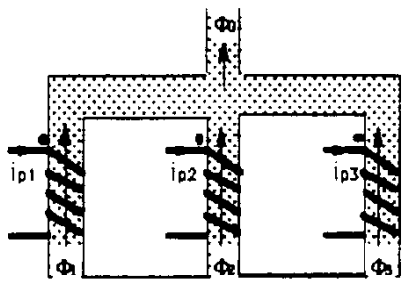
$\tau = 27{,}16\ 10^{-2}$ pour E = 320 V ; $\tau = 34{,}12\ 10^{-2}$ pour E = 430 V.

3-2 Etude du transformateur triphasé.

3-2-1

Les orientations des des lignes de champ dans chacunes des colonnes, sont liées à celles des enroulements ; on peut appliquer la "loi des nœuds" pour les flux :

$$\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$



Loi d'Hopkinson appliquée a chaque colonne :

$$n_p i_{p1}(t) - n_s i_{s1}(t) + n_s i_{s3}(t) = \mathbf{R}_1 \Phi_1(t) + \mathbf{R}_0 \Phi_0(t)$$
$$n_p i_{p2}(t) - n_s i_{s2}(t) + n_s i_{s1}(t) = \mathbf{R}_2 \Phi_2(t) + \mathbf{R}_0 \Phi_0(t)$$
$$n_p i_{p3}(t) - n_s i_{s3}(t) + n_s i_{s2}(t) = \mathbf{R}_3 \Phi_3(t) + \mathbf{R}_0 \Phi_0(t)$$

3-2-2 De la somme des trois équations précédentes et $\Phi_0 = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ on déduit :

$$\sum_{k=1}^{3} i_{pk}(t) = [\mathbf{R} + 3\mathbf{R}_0].\Phi_0(t) \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\Phi_0(t) = n_p[\mathbf{R} + 3\mathbf{R}_0]^{-1}.\sum_{k=1}^{3} i_{pk}(t)}$$

3-2-3

$$\Phi_1(t) = (n_p/\mathbf{R}).[\, i_{p1}(t) - \frac{n_s}{n_p}(i_{s1}(t) - i_{s3}(t))] - (\mathbf{R}_0/\mathbf{R}).\Phi_0(t)$$

$$\Phi_2(t) = (n_p/\mathbf{R}).[\, i_{p2}(t) - \frac{n_s}{n_p}(i_{s2}(t) - i_{s1}(t))] - (\mathbf{R}_0/\mathbf{R}).\Phi_0(t)$$

$$\Phi_3(t) = (n_p/\mathbf{R}).[\, i_{p3}(t) - \frac{n_s}{n_p}(i_{s3}(t) - i_{s1}(t))] - (\mathbf{R}_0/\mathbf{R}).\Phi_0(t)$$

3-2-4 L'équilibre des courants entraîne : $\sum_{k=1}^{3} i_{pk}(t) = 0$ d'où $\Phi_0(t) = 0$

le flux dans une colonne k, (k = 1, 2 ou 3) s'écrit alors

$$\boxed{\Phi_k(t) = (n_p/\mathbf{R}).[\, i_{pk}(t) - \frac{n_s}{n_p}(i_{sk}(t) - i_{s(k-1)}(t))]}$$

3-2-5 Schéma équivalent :

3-2-5-1 Le flux total enlacé par une spire d'un enroulement primaire k, s'écrit :
$\varphi_k(t) = \Phi_k(t) + \Phi_{fp\,k}(t)$, d'où le <u>flux total</u> embrassé par l'ensemble de l'enroulement primaire k, s'écrit :

$$\Phi_{Tp\,k}(t) = n_p \varphi_k(t) = n_p \Phi_k(t) + n_p \Phi_{fp\,k}(t) = n_p \Phi_k(t) + l_p . i_{pk}(t)$$

la tension appliquée aux bornes d'un enroulement primaire a pour expression :

$$v_{p\,k}(t) = r_p i_{pk}(t) + \frac{d\Phi_{Tpk}(t)}{dt} = r_p i_{pk}(t) + l_p \frac{di_{pk}(t)}{dt} + n_p \frac{d\Phi_{Tpk}(t)}{dt}$$

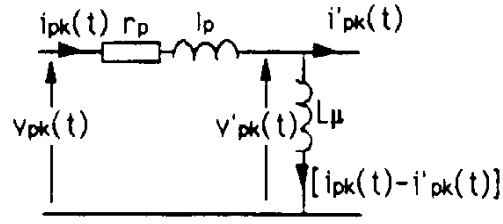
soit :

$$v_{p\,k}(t) = r_p i_{pk}(t) + l_p \frac{di_{pk}(t)}{dt} + (n_p^2/\mathbf{R}).\frac{d}{dt}\left[i_{pk}(t) - \frac{n_s}{n_p}(i_{sk}(t) - i_{s(k-1)}(t)) \right]$$

en posant : $i'_{pk}(t) = \frac{n_s}{n_p}(i_{sk}(t) - i_{s(k-1)}(t))$ la tension aux bornes d'un enroulement primaire prend la forme :

$$v_{p\,k}(t) = r_p i_{pk}(t) + l_p \frac{di_{pk}(t)}{dt} + (n_p^2/\mathbf{R}).\frac{d}{dt}\left[i_{pk}(t) - i'_{pk}(t) \right]$$

en posant $L_\mu = n_p^2/\mathcal{R}$, l'équation précédente peut se traduire par le schéma ci-contre :



3-2-5-2 Schéma équivalent au secondaire :

La tension aux bornes de l'enroulement secondaire (a), de la colonne k, a pour expression :

$$v_{ska}(t) = -r_s i_{sk}(t) - l_s \frac{di_{sk}(t)}{dt} + n_s \frac{d\Phi_k(t)}{dt} \quad \text{soit avec } n_s \frac{d\Phi_k(t)}{dt} = \frac{n_s}{n_p} v'_{pk}(t)$$

$$v_{ska}(t) = -r_s i_{sk}(t) - l_s \frac{di_{sk}(t)}{dt} + \frac{n_s}{n_p} v'_{pk}(t)$$

de même, aux bornes de l'enroulement (b) de la même colonne k

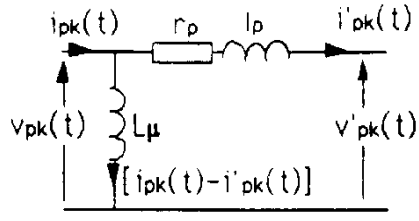
$$v_{skb}(t) = +r_s i_{s(k-1)}(t) + l_s \frac{di_{s(k-1)}(t)}{dt} + n_s \frac{d\Phi_k(t)}{dt}$$

$$v_{skb}(t) = +r_s i_{s(k-1)}(t) + l_s \frac{di_{s(k-1)}(t)}{dt} + \frac{n_s}{n_p} v'_{pk}(t)$$

en posant $m_k = \frac{n_s}{n_p}$ les deux équations exprimant la tension aux bornes des secondaires (a) et (b) d'une même colonne k peuvent se traduire par le schema de la figure 3-2-5.

3-2-6 Hypothèse de Kapp.

On néglige les chutes de tension provoquées par le courant magnétisant dans les éléments r_p et l_p devant la tension appliquée aux bornes de l'enroulement; ceci autorise le déplacement de l'inductance magnétisante L_μ, comme illustré sur la figure ci-contre :



exprimons la tension simple secondaire $v_{S1N}(t) = v_{S1a}(t) - v_{S2b}(t)$

$$v_{S1N}(t) = [-r_s i_{s1}(t) - l_s \frac{di_{s1}(t)}{dt} + \frac{n_s}{n_p} v'_{p1}(t)] - [r_s i_{s1}(t) + l_s \frac{di_{s1}(t)}{dt} + \frac{n_s}{n_p} v'_{p2}(t)]$$

$$= -2r_s i_{s1}(t) - 2l_s \frac{di_{s1}(t)}{dt} + \frac{n_s}{n_p}.(v'_{p1}(t) - v'_{p2}(t))$$

avec $v'_{p1} = v_{p1}(t) - r_p i'_{p1}(t) - l_p \frac{di'_{p1}(t)}{dt}$ et $v'_{p2} = v_{p2}(t) - r_p i'_{p2}(t) - l_p \frac{di'_{p2}(t)}{dt}$

où $i'_{p1}(t) = \frac{n_s}{n_p}.(i_{s1}(t) - i_{s3}(t))$ et $i'_{p2}(t) = \frac{n_s}{n_p}.(i_{s2}(t) - i_{s1}(t))$

ceci permet d'écrire :

$$v_{S1\,N}(t) = -\left[2r_s + \left(\frac{n_s}{n_p}\right)^2 3r_p\right] i_{s1}(t) - \left[2l_s + \left(\frac{n_s}{n_p}\right)^2 3l_p\right].\frac{di_{s1}(t)}{dt} + \frac{n_s}{n_p}(v_{p1}(t) - v_{p2}(t))$$

en posant $R_S = 2r_s + \left(\frac{n_s}{n_p}\right)^2 3r_p$ et $L_S = 2l_s + \left(\sqrt{3}\frac{n_s}{n_p}\right)^2 l_p$

$$v_{S1\,N}(t) = -R_s.i_{s1}(t) - L_s.\frac{di_{s1}(t)}{dt} + \frac{n_s}{n_p}(v_{p1}(t) - v_{p2}(t))$$

en notant $v_{p1}(t) - v_{p2}(t) = v_{S10\,N}(t)$, cette équation peut aisement se traduire par le schéma équivalent de la figure 3-2-6 pour la phase 1 , en généralisant : .

$$v_{SK\,N}(t) = -R_s.i_{sk}(t) - L_s.\frac{di_{sk}(t)}{dt} + \frac{n_s}{n_p}(v_{pk}(t) - v_{p(k+1)}(t))$$

$$v_{pk}(t) - v_{p(k+1)}(t) = v_{Sk0\,N}(t), \quad R_S = 2r_s + \left(\sqrt{3}\frac{n_s}{n_p}\right)^2 r_p \quad \text{et} \quad L_S = 2l_s + \left(\sqrt{3}\frac{n_s}{n_p}\right)^2 l_p$$

$$v_{SK\,N}(t) = -R_s.i_{sk}(t) - L_s.\frac{di_{sk}(t)}{dt} + \frac{n_s}{n_p} v_{Sk0\,N}(t)$$

3-2-7 Eléments du schéma équivalent étoile ramené au secondaire :

L'essai en régime sinusoïdal correspond au premier harmonique pour les calculs précédents.

De l'essai a vide on détermine le rapport de transformation, m :

$$410 = U_s = \sqrt{3}.V_s = \sqrt{3}.(\frac{n_s}{n_p}\sqrt{3}.V_p) = m.(\sqrt{3}.V_p) = m.\,410 \qquad \frac{n_s}{n_p} = \underline{0{,}577}$$

$$R_S = 2r_s + \left(\frac{n_s}{n_p}\right)^2 3r_p = 2r_s + m^2 r_p \qquad (2r_s = (1/2).10{,}5\ m\Omega \quad r_p = 4{,}55\ m\Omega)$$

$\underline{R_s = 9{,}8\ m\Omega}$

essai en court-circuit : $V_{S0\,cc} = \frac{mU_{pcc}}{\sqrt{3}} = 23{,}7\ V$ $\qquad I_{scc} = \frac{I_{pcc}}{m} = 300\ A$

$Z_s = \frac{V_{s0cc}}{I_{scc}} = 78{,}9\ m\Omega$ d'où $L_S\omega = 78{,}3\ m\Omega$ $\underline{L_S = 250\ \mu H.}$

3-3 Filtrage des tensions.

3-3-1 Pour l'étude au niveau des tensions simples il faut déterminer le schéma "étoile" équivalent des condensateurs; la puissance réactive fournie est identique pour les deux couplages (D ou Y) pour la pulsation ω :

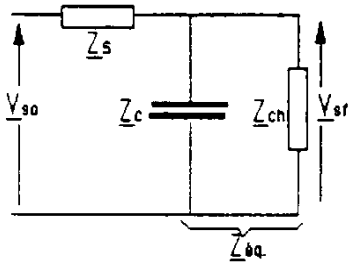
$Q = 3(C\omega)U_s^2 = 3(C_{eq.}\omega).(\frac{U_s}{\sqrt{3}})^2$ $\quad C = 664\ \mu F$ donc $C_{eq.} = 1992 \approx 2\,000\ \mu F$

le circuit étant équilibré, on se ramène au schéma équivalent, par phase, représenté sur la figure 3-3-1.

les éléments du schéma équivalent de la figure 3-3-1 sont vérifiés.

Note : sur la figure 3-3-1 la même lettre "k" a été par erreur utilisée pour le rang de l'harmonique dans "kX_S" et dans la numérotation des phases "K = 1, 2 ou 3."

3-3-2 Le calcul de la valeur efficace du fondamental de la tension filtrée s'effectue par le calcul complexe :



$$\underline{V}_{sf} = \frac{\underline{Z}_{éq.}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_{éq.}}.\underline{V}_{so}$$

$\underline{Z}_{ch.} = 1,43 + j\,0,747 = 1,61.e^{j0,481}$ $\quad \underline{Z}_C = -j.1,59 = 1,59.e^{-j1,57}$

$\underline{Z}_s = 9,8.10^{-3} + j.78.10^{-3}$ $\quad \underline{Z}_{éq.} = 1,30 - j0,813 = 1,54.e^{-j0,556}$

d'où : $|\underline{V}_{sf}| = 1,03.|\underline{V}_{so}| = 239\ V$

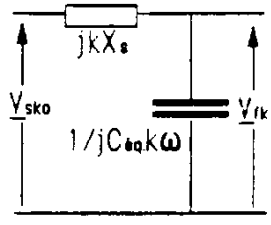
3-3-3 Atténuation de l'harmonique de rang k.

Le premier harmonique, suivant le fondamental, est de rang 17.

Le schéma du montage peut se simplifier en tenant compte des valeurs numériques :

$17\,X_S = 1\,326\ m\Omega \gg R_S$ $\quad \frac{1}{C_{éq}.17\omega} = 94\ m\Omega$ $\quad |\underline{Z}_{ch}|_{17\omega} = 12,8\ \Omega$

$$\underline{V}_{fk} \approx \frac{\frac{1}{j.C_{éq}k\omega}}{\frac{1}{j.C_{éq}k\omega} + j.kX_s}.\underline{V}_{sko} = \frac{1}{1 - k^2X_sC_{éq}\omega}.\underline{V}_{sko}$$



$$|\underline{V}_{fk}| \approx (k^2X_sC_{éq}\omega - 1)^{-1}.|\underline{V}_{sko}|$$

3-2-4 Taux d'harmoniques après filtrage.

Les calculs ne s'appliquent qu'aux harmoniques de tension présents aux bornes de la charge :

E = 320 V

Rang de l'harmonique	Atténuation	a_k/Att.
1	0,97	1,03
17	13	$10,85.10^{-3}$
19	16,6	$9,82.10^{-3}$
23	24,8	$1,05.10^{-3}$
25	29,5	$2,47.10^{-3}$
29	40	$1,90.10^{-3}$
31	45,8	$2,33.10^{-3}$
35	58,7	$1,70.10^{-3}$
37	65,7	$0,03.10^{-3}$

$I_{(320)} = 1,53\ \%$

E = 430 V

Rang de l'harmonique	Atténuation	a_k/Att.
1	0,97	1,03
17	13	$8,3.10^{-3}$
19	16,6	$13,6.10^{-3}$
23	24,8	$5,04.10^{-3}$
25	29,5	$0,50.10^{-3}$
29	40	$0,40.10^{-3}$
31	45,8	$1\ .10^{-3}$
35	58,7	$0,14.10^{-3}$
37	65,7	$1,78.10^{-3}$

$I_{(430)} = 1,64\ \%$

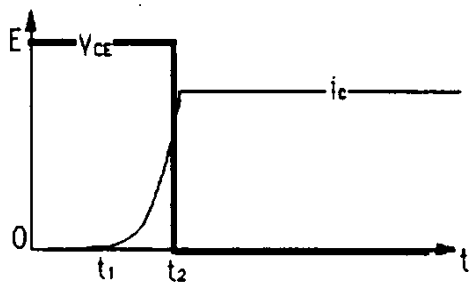
Quatrième partie : **Etude de la commutation diode-transistor.**

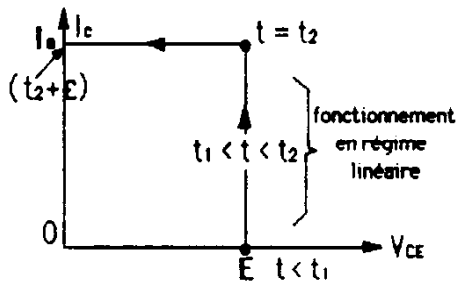
4-1 Diode considérée idéale.

4-1-1 $0 < t < t_1$ le transistor T est bloqué la diode conduit : $i_c = 0$ $i_d = I_0$

$t_1 < t < t_2$ le transistor et la diode conduisent : $i_c + i_d = I_0$, $V_{CE} = E$

$t_2 < t$ $i_c = I_0$ $i_d = 0$ Tconduit, D bloquée.





4-1-2 $0 < t < t_1$ le transistor est bloqué : $i_c = 0$

$t_1 < t < t_2$ le transistor fonctionne en régime linéaire, croissance de i_c, $V_{CE} = E$

$t_2 < t$ le transistor est saturé. (on néglige le temps de décroissance de V_{CE})

4-1-3 $V_{ge\ Th.} = 6\ V = V_{ge}(t_1)$ tension de seuil

$V_{ge}(t_2) = 9{,}5\ V$ pour $I_0 = 300\ A$.

4-1-4

4-1-4-1 La caractéristique de charge de grille, (annexe 1), fait apparaître que la tension V_{ge} évolue proportionnellement à la charge Q_{gel}, ce qui permet d'assimiler à une capacité C_{ge}, le dipôle entre grille et émetteur.

$$C_{ge} = \Delta Q/\Delta V = 200.10^{-9}/5 = 40\ nF.$$

4-1-4-2

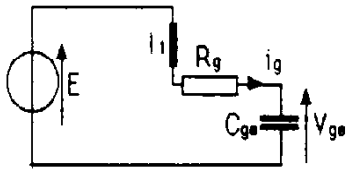


schéma équivalent du circuit de commande de grille.

Pour $0 < t < t_2$, le dipôle grille-émetteur se comporte comme une capacité de 40 nF ; le circuit de commande admet le schéma équivalent ci-contre, permettant d'établir l'équation suivante :

$15 = R_g C_{ge}(dV_{ge}/dt) + V_{ge}$ posons $\tau = R_g C_{ge} = 880\ ns$

$$V_{ge}(t) = 15 - 30 \exp(-t/\tau)$$

$V_{ge}(t_1) = 6\ V\ (= V_{gs\ Th.})$ $t_1 = 1{,}06\ \mu s$

$V_{ge}(t_2) = 9{,}5\ V$ $t_2 = 1{,}49\ \mu s$

4-1-4-3 La vitesse de croissance de la tension V_{ge} à l'instant $t_2 - \varepsilon$ vaut :

$$\left(\frac{dV_{ge}}{dt}\right)_{t_2-\varepsilon} = \left(30/\tau\right).e^{-\frac{t_2}{\tau}} = \underline{6,25\ V/\mu s}$$

dans cette phase le transistor fonctionne en régime linéaire, par conséquent la vitesse de croissance du courant est proportionnelle à celle de la tension V_{ge}.
Pour I_c = 300 A, la transconductance directe g_{fs} = 160 s (annexe 2).

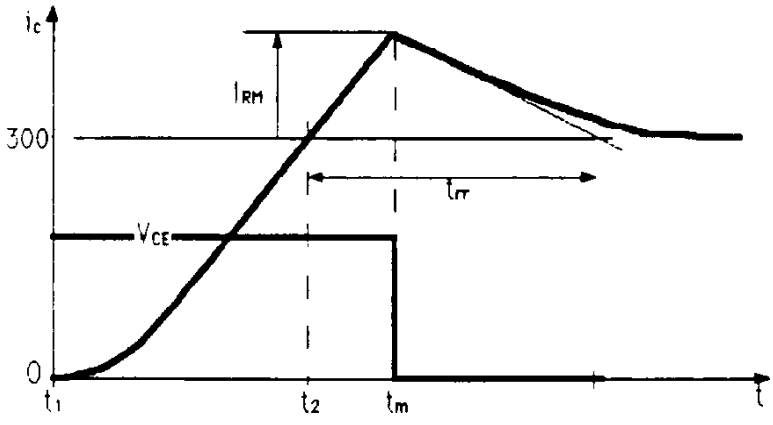
$$\left(\frac{di_c}{dt}\right) = g_{fs}.\left(\frac{dV_{ge}}{dt}\right)_{t_2-\varepsilon} = 160\ .\ 6,25/10^{-6} = \underline{1000\ A/\mu s}$$

4-2 Influence de la charge recouvrée de la diode.

4-2-1 Dans la phase de croissance du courant dans le transistor $i_c + i_d = I_o$ = Cste
donc : $\left(\frac{di_c}{dt}\right) = -\left(\frac{di_d}{dt}\right)$; à l'instant t_2, $\left(\frac{di_d}{dt}\right)$ = - 1000 A/µs.

4-2-2 On déduit des caractéristiques de l'annexe 2 : I_{RM} = - 130 A et Q_{rr} 26 µC.
A partir de la définition de la charge recouvrée , $Q_{rr} = (1/2).I_{RM}.t_{rr}$.
t_{rr} = 400 ns.

4-2-3 Allures du courant collecteur et tension collecteur-émetteur :



$I_{RM}/(t_m - t_2)$ = 1000 A/µs
$t_m - t_2$ = 130 ns
t_{rr} = 400 ns

Remarque : ces résultats sont établis dans un circuit dans lequel sont négligées toutes les inductances parasites !

4-2-4 Energie perdue dans cette phase de commutation.

$$W_F = \int_{t_1}^{t_M} E.i_c(t)dt \approx \frac{1}{2} E.(I_o + I_{RM}).(t_M - t_1)$$

$$\underline{W_F} \approx (1/2)(430)(300+130).0,62.10^{-6} = \underline{57\ mJ}$$

4-3 Influence des inductances de câblage.

Dans la phase de croissance du courant collecteur, la tension $v_{ce}(t) = E - L_c.(di_c/dt)$; en supposant que la vitesse de croissance du courant soit constante, $(di_c/dt) = 1000$ A/µs, la tension $v_{ce} = 430 - 100.10^{-9}.1000.10^6 = 330$ V, ce qui aura pour effet de réduire l'énergie dissipée lors de la fermeture.
(Par contre lors de l'ouverture de l'interrupteur, cette inductance produira une surtension, car $(di_c/dt) < 0$.)

L'étude précédente n'est valable que si le transistor fonctionne en régime linéaire dans cette phase de commutation, soit si $v_{ce} > 0$; la valeur critique des inductances parasites est donc $0 = 430 - L_{c\,crit.}(di_c/dt)$, soit toujours avec le même (di_c/dt), $L_{c.crit.} = 430$ nH

La valeur de 500nH, supérieure à l'inductance critique, fera que la vitesse de croissance sera imposée par les inductances parasites, $(di_c/dt) = E/L_c = 860$ A/µs, ce qui réduit le Q_{rr} à évacuer de la diode et aussi I_{RM}.

Agrégation

(Concours Interne)

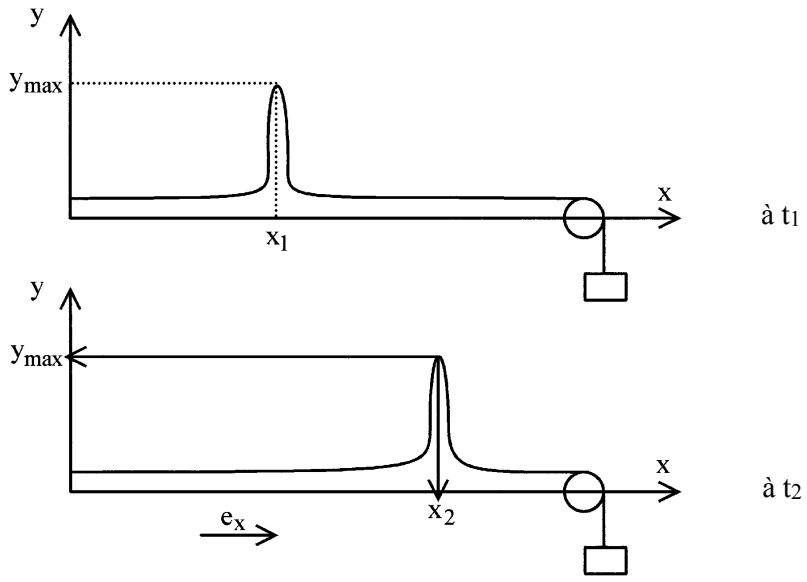
OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information - Session : 1994

PARTIE 1

1.1. **Propagation.**

1.1.1. Exemple : corde vibrante : propagation d'un ébranlement.



C'est y qui se propage.

1.1.2. 1.1.2.*a.* y_{max} est observé en x_1 à t_1, en x_2 à t_2,

$$\|\vec{v}\| = \left|\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right| \qquad \text{(ici, si } t_2 > t_1, \quad \vec{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \cdot \vec{e_x}\text{),}$$

$\|\vec{v}\|$ dépend : – de la tension de la corde
– de sa masse linéique
$\Big\}$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

1.1.2.*b.* $y = \text{cste} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x = \pm\, v \cdot \Delta t \qquad$ si $\qquad v = \|\vec{v}\|,$

$$x \mp vt = \text{cste}.$$

y représente l'amplitude de l'onde : s

$\rightarrow$ $s = f(x - vt)$ si $\vec{v} = v \cdot \vec{e_x}$,

$s = g(x + vt)$ si $\vec{v} = -v \cdot \vec{e_x}$.

L'excitation envoyée par la source (située en x = 0) à l'origine des temps, s'observe à l'instant t en un point d'abscisse x tel que $x - vt = 0$, ou $x + vt = 0$, selon son sens de propagation.

1.1.3. Si $s = f(x - vt)$; on pose $\alpha = x - vt$

$\rightarrow s = f(\alpha)$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial s}{\partial x} = f' & \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = f'' \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} = -vf' & \dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 f'' \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}$$

idem si $s = g(x + vt)$, avec $\beta = x + vt$.

1.1.4. 1.1.4.a. $s = a \cos \omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$ pour une propagation selon $+\vec{e}_x$,

ou $s = a \cos (kx - \omega t)$,

ou $s = a \cos 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$,

avec T : période temporelle,

ν : fréquence temporelle $\left(\nu = \dfrac{1}{T}\right)$,

ω : pulsation,

λ : longueur d'onde,

$\vec{k} = k \cdot \vec{e}_x$: vecteur d'onde.

1.1.4.*b.* – T (en s) : période de s(t) à x fixé,

– ω et ν (en s^{-1} ou Hz) :

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \omega = 2\pi f,$$

– λ (en m) : période de s(x) à t fixé,

– k en (m^{-1}) $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$: pulsation spatiale,

$\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_x$ dans la direction et le sens de propagation.

$k = \dfrac{\omega}{v}$, soit $\lambda = vT$.

1.1.5.
$$\left.\begin{array}{l} s_1 = a \cos (kx - \omega t + \varphi_1) \\ s_2 = a \cos (kx + \omega t + \varphi_2) \end{array}\right\} s = s_1 + s_2,$$

$$s = 2a \cos\left(kx + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right).$$

L'onde s(x, t) est une **onde stationnaire**,

$$s(x, t) = F(x) \,.\, G(t).$$

Nœuds ($s = 0 \;\forall\; t$) si $x_N = \dfrac{2p+1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{k} - \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2k}$

Ventres ($|s|$ maxi $\forall\; t$) si $x_V = p \cdot \dfrac{\pi}{k} - \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2k}$

$\Big\}\; p \in \mathbb{Z}$

Entre deux nœuds successifs $\Delta x = \dfrac{\pi}{k} = \dfrac{\lambda}{2}$.

Entre deux ventres successifs $\Delta x = \dfrac{\pi}{k} = \dfrac{\lambda}{2}$.

Entre un nœud et un ventre successifs $\Delta x = \dfrac{\pi}{2k} = \dfrac{\lambda}{4}$.

1.1.6. A trois dimensions :

$$\boxed{\Delta s = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\delta t^2}}$$

équation de d'Alembert

1.2. **Ondes électromagnétiques dans le vide.**

1.2.1.

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\overrightarrow{rot}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\rightarrow \quad \overrightarrow{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{E} - \vec{\Delta}\vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\Delta}\vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$\rightarrow$ $\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$ avec $\boxed{\|\vec{v}\| = c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$

Même démonstration pour $\vec{B}$: $\rightarrow$ $\boxed{\vec{\Delta}\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$

$$\boxed{c \approx 3.10^8 \,.\, m \,.\, s^{-1}}$$

1.2.2. 1.2.2.*a.* **Plans d'onde :** s uniforme à t pour x = cste

$\rightarrow$ plans // yOz.

Directions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$: soient $\begin{cases} \vec{E} = \vec{E_0}\cos(kx - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B_0}\cos(kx - \omega t + \varphi) \end{cases}$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \forall x,\ \forall t \;\Rightarrow\; E_{0_x} = 0.$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad \forall x,\ \forall t \;\Rightarrow\; B_{0_x} = 0.$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont donc $\perp \vec{Ox}$,
c'est-à-dire dans le plan d'onde.

1.2.2.*b.*

$$\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \;\Rightarrow\; \begin{cases} -\dfrac{\partial Bz}{\partial x} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial Ey}{\partial t} \\ +\dfrac{\partial By}{\partial x} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial Ez}{\partial t} \end{cases}$$

Si on pose $kx - \omega t = u$, $\quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E_0}\, f(u) \\ \vec{B} = \vec{B_0}\, g(u) \end{cases}$ avec $k = \dfrac{\omega}{c}$,

$$\begin{cases} Bo_z\, g' = -\dfrac{1}{c} E_{o_y}\, f' \\ Bo_y\, g' = +\dfrac{1}{c} E_{o_z}\, f' \end{cases}$$

Compte tenu de la forme mathématique (en cos u et cos (u + φ)) de f et g, on en déduit :

$$Bz = -\frac{1}{c} Ey \quad \text{et} \quad By = \frac{1}{c} Ez$$

Soit (B_x et E_x étant nuls, et avec $\vec{k} = \dfrac{\omega}{C}\vec{e_x}$) :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e_x} \wedge \vec{E}}{c}, \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

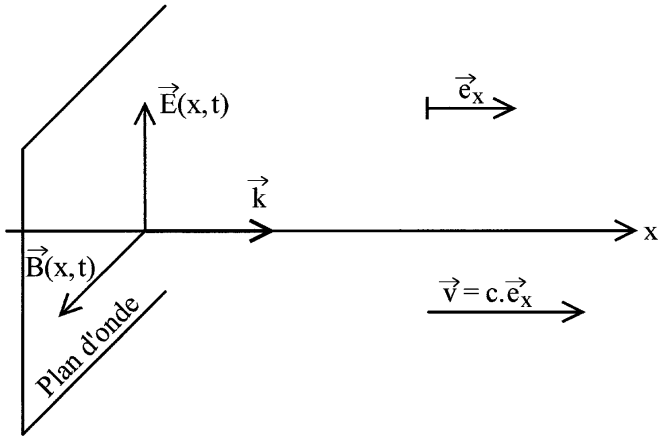
pour une onde se propageant selon $+\vec{e_x}$.

Remarque : l'utilisation des complexes permet d'obtenir plus rapidement le résultat

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div}\vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; i\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \;\rightarrow\; \vec{E} \perp \vec{k} \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \;\Rightarrow\; ---- \;\rightarrow\; \vec{B} \perp \vec{k} \end{array}\right\} \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ sont dans le plan d'onde.}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = i\omega\,\underline{\vec{B}} \;\rightarrow\; \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

d'où le schéma :



1.2.2.*c.* **Vibrations transversales :** les grandeurs vibratoires vectorielles $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de la vitesse de propagation de l'onde.

Vibrations longitudinales : la (ou les) grandeur vibratoire est parallèle à la direction de la vitesse de propagation de l'onde.
Exemple : Ondes sonores dans les fluides parfaits : la vitesse des particules est parallèle à la vitesse de l'onde.

1.2.2.*d.* **Polarisation rectiligne :** l'extrémité de $\vec{E}$ (ou de $\vec{B}$) décrit un segment de droite dans le plan d'onde.

Polarisation circulaire : les extrémités des deux vecteurs décrivent des cercles dans le plan d'onde.

1.2.3. 1.2.3.*a.*

$\lambda_{(m)}$	10^{-10}	10^{-8}	4.10^{-7}	8.10^{-7}	10^{-4}		ordres de grandeur
ν (Hz)	10^{19}	10^{17}	$7{,}5.10^{15}$	$3{,}7.10^{15}$	10^{13}		
nature des ondes	rayons γ et cosmiques	rayons X	U.V.	visible	IR	ondes centimétriques ; ondes hertziennes et BF	
1.2.3.*b.* source	noyaux		atomes		molécules		

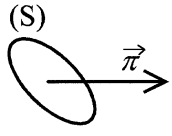
1.2.4. 1.2.4.*a.* La source (laser ou autre) fournit de l'énergie. Celle-ci est transportée par l'onde. Elle est ensuite récupérée par un récepteur sous différentes formes (effet photoélectrique, chauffage, IR,...).

1.2.4.*c.* Dans le vide : $\boxed{\vec{\Pi} = v\, u\, \vec{e}_x}$

(si l'onde se propage avec $\vec{v} = v\,.\,\vec{e}_x$).

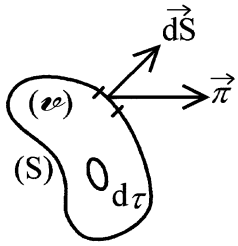
Physiquement :

– le flux de $\vec{\Pi}$ traversant une surface est égal au débit d'énergie électromagnétique à travers cette surface,



– le flux de $\overrightarrow{\Pi}$ sortant d'une surface fermée est donc, dans le vide, égal à la variation temporelle de l'énergie contenue à l'intérieur de cette surface.

$$\oiint_{(S)} \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{d}{dt} \iiint_{(v)} u \, d\tau$$



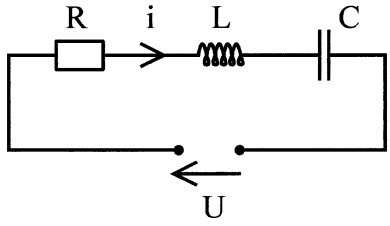
1.2.4.*d*. Les récepteurs énergétiques n'étant sensibles qu'à la moyenne temporelle des énergies reçues, seule cette moyenne possède un intérêt physique.

PARTIE 2

2.1. **Notation complexe.**

2.1.1. $\boxed{s = \Re_e (\underline{s})}$

2.1.2. Exemple : Circuit RLC série :



$$\underline{U} = U_m \exp(-i\omega t)$$

$$\underline{I} = I_m \exp i(\varphi - \omega t)$$

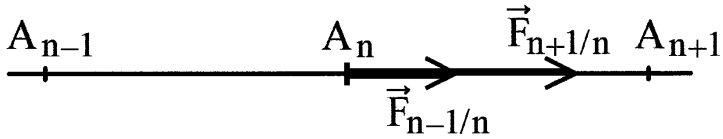
$$L\frac{di}{dt} + Ri + \int idt = u \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$\rightarrow$

$$\boxed{I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \qquad \tan\varphi = +\frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}}$$

2.2. **Propagation d'une onde mécanique dans une file d'atomes.**

2.2.1.



Système : A_n $\qquad \vec{F}_{n-1/n} + \vec{F}_{n+1/n} = m\,\vec{a}\,(A_n)$,

sur $\vec{e}_x$ $\qquad \lambda(u_{n-1} - u_n) + \lambda(u_{n+1} - u_n) = m\,\ddot{u}_n$

$$\boxed{m\,\ddot{u}_n = \lambda(-2u_n + u_{n+1} + u_{n-1})}$$

2.2.2. 2.2.2.*a.* $-m\omega^2 = -\lambda\left(2 - e^{+ika} - e^{-ika}\right) \rightarrow$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2\lambda}{m}(1 - \cos ka)}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{4\lambda}{m}\sin^2\frac{ka}{2}}$$

2.2.2.b. $\omega = 2\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right| \rightarrow v_\phi = 2\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\frac{\left|\sin\frac{ka}{2}\right|}{k}$,

avec $k = \frac{2}{a}\text{Arc sin}\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$,

$\rightarrow$

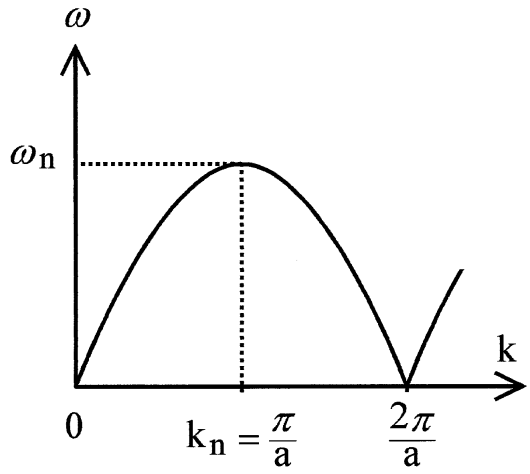
$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega a}{2\ \text{Arc sin}\frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}}$$

ωa est homogène à une vitesse, donc v_ϕ également.

2.2.2.c. Milieu dispersif : v_ϕ dépend de ω.

Exemples : prisme, lames à déphasages, plasmas... ici v_ϕ dépend de ω d'où milieu dispersif.

2.2.2.*d.*



ω est $\left(\frac{2\Pi}{a}\right)$ périodique (comme $\sin^2\frac{ka}{2}$)

$\frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\cos\frac{ka}{2}$, si $k \in \left[0, \frac{2\Pi}{a}\right]$

$\rightarrow$

$$\boxed{\omega_m = 2\sqrt{\frac{\lambda}{m}}} \quad (k_m = \frac{\Pi}{a})$$

Il ne peut pas y avoir de propagation si $\omega > \omega_m$

2.3. **Propagation d'une onde électromagnétique dans un guide d'onde.**

2.3.1. 2.3.1.*a.* **Mathématiquement :** $\overrightarrow{E_i}$ seul ne satisfait pas à la continuité de $\overrightarrow{E}$ tangentiel.

Physiquement : les électrons du métal, mis en mouvement par les champs $\overrightarrow{E_i}$ et $\overrightarrow{B_i}$, ré-émettent un champ électromagnétique.

2.3.1.*b.* Superposition des champs incident et réfléchi : réalisation d'une onde stationnaire (1.1.5.).

2.3.1.*c.* **Onde incidente :** $\overrightarrow{\underline{E}_i} = E_0 \exp i\,(kz - \omega t)\,\overrightarrow{e_x}$.

Propagation : $\overrightarrow{k_i} = \dfrac{\omega}{c}\,\overrightarrow{e_z}$,

$\rightarrow \qquad \overrightarrow{\underline{B}_i} = \dfrac{E_0}{c} \exp i\,(kz - \omega t)\,\overrightarrow{e_y}$

Onde réfléchie : $\overrightarrow{E_r} = E_{0_r} \exp i\,(-kz - \omega t)\,\overrightarrow{e_x}$.

(d'après les invariants et les symétries dus à l'onde incidente).

Propagation : $\overrightarrow{k_r} = -\dfrac{\omega}{c}\,\overrightarrow{e_z}$,

$\rightarrow \qquad \overrightarrow{\underline{B}_r} = -\dfrac{E_{0_r}}{c} \exp i\,(-kz - .\omega t)\,\overrightarrow{e_y}$

Superposition : $\overrightarrow{\underline{E}} = \overrightarrow{\underline{E}_i} + \overrightarrow{\underline{E}_r}$; $\overrightarrow{\underline{B}} = \overrightarrow{\underline{B}_i} + \overrightarrow{B_r}$

Continuité de $\overrightarrow{E_{tang}}$

en $z = 0 \;\Rightarrow\; E_{0_r} = -E_0$,

en $z = a \qquad \overrightarrow{\underline{E}} = 2\,i\,E_0 \sin kz \exp(-i\,\omega t)$,

$\rightarrow$ $\boxed{k = p \,.\, \dfrac{\Pi}{a} \quad \text{et} \quad \omega = p \,.\, \dfrac{\Pi c}{a} \quad (p \in \mathbb{Z}^*)}$

$\rightarrow$

et $\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{E_{total}} &= 2\,E_0 \sin kz \sin \omega t\ \overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{B_{total}} &= 2\,\dfrac{E_0}{c} \cos kz \cos \omega t\ \overrightarrow{e_y} \end{aligned}}$

($\overrightarrow{B_{normal}} = \overrightarrow{O}$, donc effectivement continu).

Caractéristiques de l'onde stationnaire :

Nœuds de $\overrightarrow{E}$: $z = q\,\dfrac{\Pi}{k} \quad (q \in \mathbb{Z}^*) \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{q}{p} \,.\, a$,

coïncident avec les ventres de $\overrightarrow{B}$.

Ventres de $\vec{E}$: $z = \left(\frac{2\,q\,\Pi}{2}\right)\frac{\Pi}{k}$ $(q \in \mathbb{Z}^+)$ $\rightarrow$ $z = \frac{2\,q\,\Pi}{2\,p}$. a,

coïncident avec les nœuds de $\vec{B}$.

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en quadrature temporelle (et spatiale).

2.3.2. 2.3.2.*a.* Remarque : la continuité de $\vec{E}_{tang}$ impose que E_0 soit fonction de z.

$$-k^2 E_0 + E_0'' = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2 E_0)$$

$\rightarrow$ $$\boxed{E_0'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_0 = 0}$$

2.3.2.*b.* E_0 doit s'annuler en z = 0 et z = a, ce n'est possible que si $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$, d'où une solution sinusoïdale.

Si $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$, alors $E_0 = A \sin(Kz + \phi)$,

$E_0(0) = 0 \Rightarrow \phi = 0\ (\Pi)$; on choisit $\phi = 0$,

$E_0(a) = 0 \Rightarrow K = p\frac{\Pi}{a}$ $\mathbf{p \in \mathbb{Z}^*}$

$\rightarrow$ $$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = p^2 \frac{\Pi^2}{a^2}}$$

Remarque : la propagation n'est possible que pour $k^2 > 0$.

Pulsation de coupure : $\omega = \omega_c$ si $\begin{cases} p = 1 \\ k^2 = 0 \end{cases}$ (valeur minimale de ω).

$\rightarrow$ $$\boxed{\omega_c = \frac{\Pi c}{a}}$$

Remarque : chaque «mode» de propagation (c'est-à-dire chaque valeur de p) possède une pulsation de coupure $\omega_{c_p} = p \cdot \frac{\Pi c}{a}$.

Application Numérique : $\boxed{\omega_c = 4{,}7.10^{10}\ s^{-1}}$

Cette pulsation correspondrait à une longueur d'onde dans le vide $\lambda_v = c \cdot \frac{2\,\Pi}{\omega_c} = 2a$

$\lambda_v = 4$ cm ; **ondes centimétriques**.

2.3.2.*c.* $$\boxed{v_\phi = c\sqrt{1 + \frac{p^2\Pi^2}{k^2a^2}}}\ ,\quad \text{donc } v_\phi > c.$$

v_ϕ ne représente pas la vitesse de propagation d'une grandeur physique (telle que l'énergie). Sa comparaison à c est donc sans intérêt.

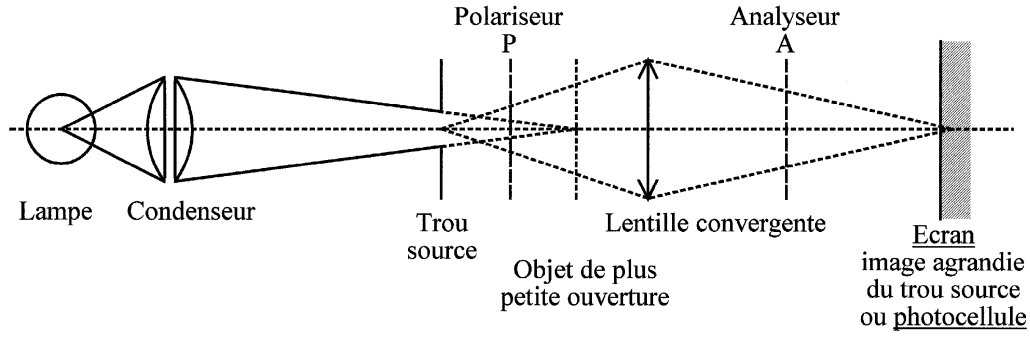
2.3.2.*e.* $$E_0(z) = A\sin\left(p\frac{\Pi z}{a}\right)$$

et $$\boxed{\vec{E} = A\sin p\,.\,\frac{\Pi z}{a}\cos(kx - \omega t)\,\vec{e_y}}$$

PARTIE 3

TRAVAUX PRATIQUES SUR LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE

3.1. **Schéma du montage expérimental.**



3.2. **Polarisation rectiligne.**

Expérience : Polariseur et Analyseur + Photocellule.

On repère I minimum en jouant sur les calibres du voltmètre et on note l'angle caractéristique de l'analyseur.

On remarque alors à l'œil qu'analyseur et polariseur marqués ont des directions perpendiculaires.

On tourne alors l'analyseur de 90°, réalisant alors par définition $\theta = 0$. Puis on fait varier θ de 0° à 90° et on note I ; on porte $I = f(\cos^2 \theta)$ $\rightarrow$ droite,

$\rightarrow$ loi de Malus.

Interprétation : L'analyseur ne laisse passer que la projection de $\vec{E}$ sur sa direction caractéristique et l'intensité I est proportionnelle au carré de $\| \vec{E} \|$.

3.3. **Polarisation circulaire.**

3.3.1. **Expérience :** Polariseur et analyseur croisés (Imin) ; filtre vert indispensable.

On ajoute la lame $\lambda/4$ entre P et A : la lumière revient (en général).

On tourne la lame $\lambda/4$: il existe quatre positions (dont deux directions) où $I \approx 0$ **: lignes neutres.**

On place la lame $\lambda/4$ à 45° d'une de ces directions ; quand on tourne l'analyseur, I = cste, c'est la **polarisation circulaire**.

Explication : Une des lignes neutres est l'axe lent (indice n_e) l'autre est l'axe rapide (indice n_r).

Les deux lignes sont parallèles à la face d'entrée.

L'épaisseur de la lame est e.

On projette le champ $\vec{E}$ de l'onde incidente sur chaque axe :

la projection sur l'axe lent, et la projection sur l'axe rapide, subissent une différence de marche n_e e (resp n_r e) à la traversée de la lame.

A la sortie de la lame, les deux projections ont un déphasage :

$$\Delta\varphi = \frac{2\,\Pi}{\lambda}(n_e - n_r)\,e\ .$$

Par recomposition pour trouver $\vec{E}$, on obtient une **polarisation elliptique** ; il n'y a donc plus d'extinction lorsqu'on tourne l'analyseur.

Exceptions : – cas où $\vec{E}_{incident}$ // ligne neutre : on conserve la polarisation rectiligne initiale.

– cas où $\vec{E}$ est à 45° **et** $(n_e - n_r)\,e = \frac{\lambda}{4} + p\lambda$: la polarisation est circulaire.

3.3.2. On place la première lame $\frac{\lambda}{4}$ à 45° de P et A croisés.

On ôte cette lame et on repère proprement les lignes neutres de la deuxième lame $\frac{\lambda}{4}$ (non marquée) : pour repérer l'axe lent de la deuxième lame, on replace les deux lames entre A et P croisés, la deuxième lame étant placée à 45°.

S'il y a extinction, c'est que l'axe lent de la deuxième lame coïncide avec l'axe rapide de la première.

On permute alors les deux axes de la deuxième lame, pour faire coïncider les deux axes lents.

On a alors réalisé une lame $\frac{\lambda}{2}$ ($\Delta\varphi = (2p + 1)\,\Pi$, rotation de $\vec{E}_{incident}$ de 90°).

3.3.3. $(n_e - n_r)\,e$ varie peu avec λ, mais $\Delta\varphi = \frac{2\Pi}{\lambda}(n_e - n_r)\,e$ est, lui, fonction de λ.

Une lame n'est donc quart d'onde que pour λ donné.

D'où phénomène colorés, et pas de polarisation circulaire réalisable.

Mais : l'expérience du repérage des lignes neutres marche toujours.

3.4. **Lumière non polarisée.**

3.4.1. Sans polariseur, quand on tourne l'analyseur I reste constante : la lumière naturelle contient un mélange statistique de toutes les polarisations possibles, que l'on peut représenter par un mélange équiréparti **incohérent** de deux polarisations rectilignes perpendiculaires.

3.4.2. On rappelle que deux ondes ne peuvent pas permettre d'observer des franges d'interférences si :

(∗) les directions des champs $\vec{E}$ associés sont perpendiculaires,

(∗∗) les ondes sont incohérentes entre elles.

Pour s'abstraire de la condition (∗), il faut placer **après** les fentes d'Young, un analyseur («à 45°» pour obtenir un contraste maximum).

Pour s'abstraire de la condition (∗∗), et d'après 3.4.1., il faut également placer un polariseur **avant** les fentes d'Young, («à 45°» pour obtenir un contraste maximum).

Quand on ne place aucun des deux instruments, chaque direction de polarisation donne lieu à des franges d'interférences, dont la position ne dépend pas de la direction de polarisation envisagée.

Par addition des **intensités** correspondant à chaque direction de polarisation, on obtient la même figure d'interférences (avec une intensité plus grande).

3.4.3. Filtre vert indispensable.

On dispose d'une lame $\lambda/4$ suivie d'un analyseur rectiligne à 45° des lignes neutres de la lame, solidaires.

Dans le cas d'une polarisation circulaire :

En tournant l'ensemble (A, $\frac{\lambda}{4}$), on trouve une direction correspondant à l'extinction totale (et, à 90°, une direction où l'intensité est maximum).

Dans le cas de la lumière naturelle :

La rotation ne produit pas de modification de l'intensité.

3.5. **Méthodes de polarisation rectiligne de la lumière.**

3.5.1. Réflexion vitreuse à l'angle de BREWSTER.

Rayons ordinaire et extraordinaire dans des systèmes biréfringents (on ne conserve qu'un des rayons, soit par sélection spatiale, soit par réflexion vitreuse).

Lumière polarisée du fait des propriétés de la source émettrice (laser polarisé, polarisation circulaire par effet Zeeman...).

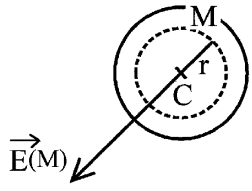
3.5.2. Réflexion vitreuse sur surfaces (mer, routes...). Diffusion à 90° par le ciel, de la lumière du soleil (un dipôle oscillant ne rayonne pas selon son axe).

PARTIE 4

MODÈLE CLASSIQUE DU RAYONNEMENT ATOMIQUE ET DE SA POLARISATION

4.1. Interprétation de la force de rappel.

Le nuage électronique possède la symétrie sphérique.



Le théorème de Gauss appliqué en M tel que . $CM < a_0$

$$\Rightarrow \qquad \oiint \vec{E} \,.\, \vec{dS} = E_r \,.\, 4\pi r^2 = q \frac{r^3}{a_0^3} \times \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\vec{r}, \quad \text{si} \quad \vec{r} = r \,.\, \vec{u_r} = \vec{CM} \,.$$

Force subie par le proton situé en M :

$$\vec{f} = -q\vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{f} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\vec{r} \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}}$$

4.2. Mouvement libre de l'électron sans amortissement.

4.2.1. PFD appliqué à l'électron $m\ddot{\vec{r}} = -\alpha\vec{r}$ dans (R) galiléen lié au proton.

Mouvement oscillatoire avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ (en projection sur chacun des trois axes).

$$\rightarrow \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi m \varepsilon_0 a_0^3}}}$$

4.2.2. $\lambda_0 = \dfrac{2\pi c}{\omega_0}$ $\qquad \boxed{\lambda_0 = 416 \text{ Å}}$

domaine de l'U.V. assez lointain.

4.3. Mouvement avec amortissement.

4.3.1.

$$m\ddot{\vec{r}} = -\Gamma\dot{\vec{r}} - \alpha\vec{r} \quad \text{ou} \quad m\ddot{\vec{r}} + \Gamma\dot{\vec{r}} + \alpha\vec{r} = \vec{0}.$$

Si on pose $\qquad \underline{\vec{r}} = \underline{\vec{r}_0} e^{-i\omega t},$

alors $\omega^2 + i\,\Gamma\,\omega - \omega_0^2 = 0.$

Soit, au premier ordre en $\frac{\Gamma}{\omega_0}$: $\omega = \pm\,\omega_0 - i\,\frac{\Gamma}{2}$.

La seule solution physiquement acceptable est à pulsation positive, donc :

$$\boxed{\omega = +\,\omega_0 - i\,\frac{\Gamma}{2}}$$

(le terme en $i\,\frac{\Gamma}{2}$ est seulement responsable de l'amortissement en $e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$).

4.3.2. Mouvement selon $z'\overrightarrow{z}$.

4.3.2.a. $z = A\,e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\omega_0\,t + \varphi)$ avec $t = 0$ $\begin{cases} z = 0 \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$ et avec $\Gamma << \omega_0$.

$\rightarrow$ au premier ordre en $\left(\frac{\Gamma}{\omega_0}\right)$ près : $\boxed{z = z_0\,e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos\omega_0\,t}$

4.3.2.*b.* $\mathscr{E} = <E_c> + <E_p>,$

Si $\Gamma = 0$ $<\mathscr{E}> = <\frac{1}{2}\,m\left(\frac{dz}{dr}\right)^2> + <\frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,z^2>$

$\rightarrow$ $\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,z_0^2}$

Remarque : $\mathscr{E}$ représente l'énergie calculée à tout instant, l'énergie étant stationnaire s'il n'y a pas d'amortissement.

4.3.2.c. Si $\Gamma \neq 0$ $E_c = \frac{1}{2}\,m\,e^{-\Gamma t}\left(\omega_0\sin\omega_0\,t + \frac{\Gamma}{2}\cos\omega_0\,t\right)^2 z_0^2$,

ou $E_c \approx \frac{1}{2}\,m\,e^{-\Gamma t}\,\omega_0^2\,\sin^2\omega_0\,t\,z_0^2$,

et $E_p \approx \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,z_0^2\,e^{-\Gamma t}\cos^2\omega_0\,t$,

$\rightarrow$ $E_c + E_p \approx \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,e^{-\Gamma t}\,z_0^2$.

Sur une durée égale à la pseudo période $T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$, prise à partir de t = 0,

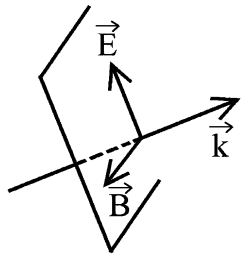
$$e^{-\Gamma t} \approx \text{cst} \quad \text{car} \quad \Gamma t < \frac{2\,\pi\,\Gamma}{\omega_0} << 1$$

→ $\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 z_0^2 e^{-\Gamma t}}$

$\mathscr{E}$ décroît donc avec une constante de temps $\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}}$

4.4. **Rayonnement dipolaire et durée de vie.**

4.4.1.



$$\underline{\vec{E}} = -E_0 \vec{e_\theta} \; ; \quad \vec{B} = -\frac{E_0}{c} \vec{e_\varphi} ,$$

avec $$E_0 = \frac{\omega_0^2 \mu_0}{4\pi} \frac{q z_0}{R} \sin\theta \, e^{i(kR - \omega_0 t)},$$

or $\vec{e_R}$, $-\vec{e_\theta}$, $-\vec{e_\varphi}$ forment une trièdre direct,

→ $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{K} \wedge \vec{E}}{\omega_0}}$ $(\vec{K} = \frac{\omega_0}{c} \vec{e_R})$

donc sur $\Delta R << R$, l'onde a la structure d'une onde plane se propageant selon $+\vec{e_R}$.

L'onde est polarisée selon $\vec{e_\theta}$ (direction de $\vec{E}$).

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{e_\theta} = -\vec{e_z}$ et l'**onde est polarisée selon $\vec{e_z}$.**

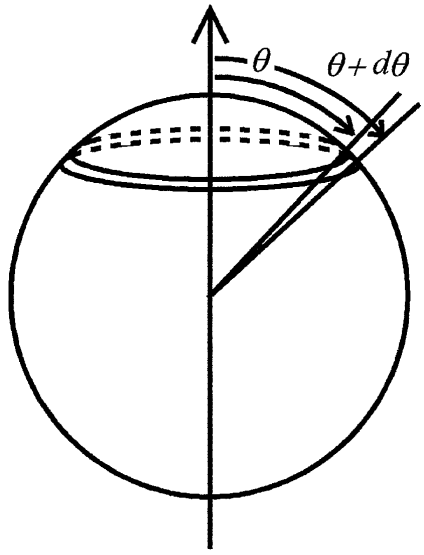
4.4.2. D'après l'introduction, $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B^*}}{\mu_0} \right)$,

ou $$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2 c \mu_0} \vec{e_R}$$

soit $$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \omega_0^4 \frac{\mu_0}{32 \Pi^2 c} \frac{q^2 z_0^2}{R^2} \sin^2\theta \, \vec{e_R}}$$

dans la direction de $\vec{e_z}$, $\sin\theta = 0$ et $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$. La dipôle ne rayonne pas dans sa direction de vibration.

4.4.3. Le flux demandé est le débit d'énergie à travers la surface sphérique de rayon R (on prendra le flux sortant). C'est donc **la puissance rayonnée par le dipôle**.



Soit $\mathscr{P} = \oiint \langle \vec{\Pi} \rangle \vec{e_R} \cdot dS$,

$$= \frac{\omega_0^4 \mu_0}{32 \Pi^2 c} \frac{q^2 z_0^2}{R^2} \times 2 \Pi R^2 \int_0^{\Pi} \sin^3 \theta \, d\theta \ ; \text{ or } \int_0^{\Pi} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{4}{3}$$

$\rightarrow$ $$\boxed{\mathscr{P} = \omega_0^4 \times \frac{\mu_0}{12 \Pi c} q^2 z_0^2}$$

4.4.4. Cette puissance rayonnée correspond à la perte d'énergie, par unité de temps, de l'oscillateur :

$\mathscr{P} = -\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \Gamma \cdot \frac{1}{2} m \omega_0^2 z_0^2$ (d'après 4.3.2.*c.*)

où : $\left(\Gamma = \frac{1}{\tau}\right)$ $\tau = \frac{6 \Pi c m}{\mu_0 q^2 \omega_0^2}$, ou $\boxed{\tau = \frac{6 \Gamma \mathscr{E}_0 c^3 m}{q^2 \omega_0^2}}$

Application Numérique : $\tau = \frac{3}{2 \Pi} \mathscr{E}_0 c \frac{m \lambda_0^2}{q^2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\tau = 0{,}77.10^{-10} \text{ s}}$

C'est l'ordre de grandeur des durées des transitions atomiques permises.

4.5. Polarisation de l'onde rayonnée

4.5.1. A partir de l'équation différentielle du 4.3.1., et des conditions initiales (sur $\vec{r}$ et sur $\vec{v}$), on peut exprimer $\underline{\vec{r}_0}$, et, en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\underline{\vec{r}_0} = \underline{x}_0 \vec{e_x} + \underline{y}_0 \vec{e_y} + \underline{z}_0 \vec{e_z}} \quad (\underline{x}_0 , \underline{y}_0 , \underline{z}_0 \in \mathbb{C})$$

4.5.2.

Par identification : $\begin{cases} \underline{\rho}_+ = \frac{1}{2}\left(\underline{x}_0 + i\,\underline{y}_0\right) \\ \underline{\rho}_- = \frac{1}{2}\left(\underline{x}_0 - i\,\underline{y}_0\right) \end{cases}$

Mouvements correspondants pour l'électron :

Pour ρ_+ : si $\underline{\rho}_+ = \rho_0\, e^{i\varphi}$

selon $\overrightarrow{Ox}$: $\underline{\rho}_+ \overrightarrow{e_x} = \rho_0\, e^{i\varphi}\overrightarrow{e_x}$, avec $\underline{\overrightarrow{r}} = \underline{\overrightarrow{r}}_0 e^{-i\omega t}$; soit en repassant aux réels :

$$\rho_{+x} = \rho_0 \cos(\varphi - \omega_0 t)\, e^{-\frac{\Gamma}{2}t},$$

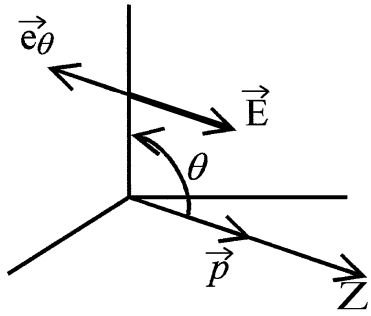
selon $\overrightarrow{Oy}$: $\rho_{+y} = -\rho_0 \cos\left(\varphi - \omega_0 t + \frac{\Pi}{2}\right) e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$,

$$\rightarrow \quad \rho_{+y} = -\rho_0 \sin(\varphi - \omega_0 t)\, e^{-\frac{\Gamma}{2}t}.$$

Il s'agit (à l'amortissement près) d'un **mouvement circulaire dans le sens +**, à la pulsation ω_0, dans xOy.

Pour ρ_- : même raisonnement :
mouvement circulaire dans le sens –, à la pulsation ω_0 .

Polarisations de l'onde rayonnée dans la direction $\overrightarrow{Oz}$:
Il faut, pour chaque $\overrightarrow{r}$, redéfinir les coordonnées sphériques (avec $\overrightarrow{p}$ selon $\overrightarrow{OZ}$, et $\overrightarrow{E}$ selon



$-\overrightarrow{e_\theta}$ (si $\sin\theta > 0$)).

On s'aperçoit alors que $\overrightarrow{E}$ «suit» $\overrightarrow{p}$ donc,

pour ρ_+ : polarisation circulaire gauche,
pour ρ_- : polarisation circulaire droite.

4.6. **Effet Zeeman.**

4.6.1. $\overrightarrow{f_B} = q\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ avec $\overrightarrow{v} // \overrightarrow{B} // \overrightarrow{e_z} \rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{f_B} = \overrightarrow{O}}$

4.6.2. Soit (R') le référentiel de Larmor (tournant autour de $\overrightarrow{Oz}$ avec $\overrightarrow{\Omega} = -\,q\dfrac{\overrightarrow{B}}{2\,m}$).

Le mouvement de l'électron est, dans (R'), circulaire, dans le sens –, donc de pulsation algébrique $-\,\omega_0$. Dans (R), il est circulaire, de pulsation $(-\,\omega_0 - \dfrac{qB}{2\,m}\,)$ donc,

$$\boxed{|\omega_-| = \omega_0 + \frac{qB}{2\,m} : \quad \text{mouvement sens} -}$$

4.6.3. On trouve $\boxed{|\omega_+| = \omega_0 - \dfrac{qB}{2\,m} : \text{mouvement sens} + \text{ si } \dfrac{qB}{2\,m} < \omega_0}$

4.6.4. Trois pulsations émises : $\boxed{\omega_0 - \dfrac{qB}{2\,m}\ ,\quad \omega_0\ ,\quad \omega_0 + \dfrac{q\,B}{2\,m}}$

$$\Delta\omega = \frac{qB}{2\,m} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta\omega = 10^{10}\ \text{rad.s}^{-1}}$$

(à comparer à $\omega_0 \approx 5.10^{16}\ \text{rad.s}^{-1}$)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 5.10^{6}.$$

Dans le domaine optique, l'interféromètre de FABRY-PEROT convient pour mesurer $\Delta\omega$.

4.6.5. **Observation dans la direction $\overrightarrow{e_z}$:**

Le dipôle oscillant selon z' z ne rayonne pas d'où pulsations ω_- et ω_+ , avec (resp.) polarisations circulaires droite et gauche.

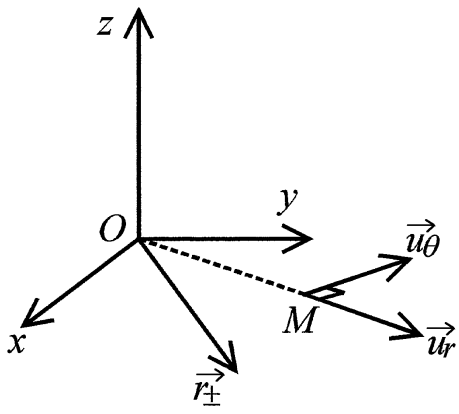
Observation dans une direction à $\overrightarrow{e_z}$:

– Pulsation ω_0 avec polarisation rectiligne // $\overrightarrow{e_z}$ (cf. 4.4.1.),

– Pulsations ω_- et ω_+, avec :

$\overrightarrow{E}$ selon $\pm\,\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ étant la direction du plan xOy perpendiculairement à OM (cf. figure),

donc $\overrightarrow{u_\theta}$ est invariant lors du mouvement de l'électron et $\overrightarrow{E}$ garde une direction constante ; d'où polarisation rectiligne, $\perp \overrightarrow{u_z}$



Agrégation

(Concours Interne)
OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

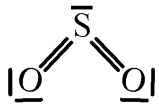
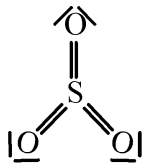
Composition avec exercices d'application :
Options Physique et Chimie - Session : 1994

Option : **CHIMIE**

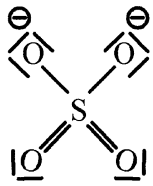
PARTIE A : **STRUCTURES**

I. Structure électronique

1. O : $1s^2\ 2s^2\ 2p^4$; S : $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^4$.

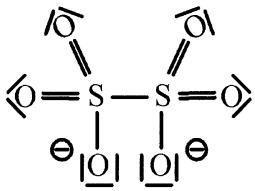
2.  trigonale ;  trigonale, plane. Angles ~ 120°.

3. sulfate

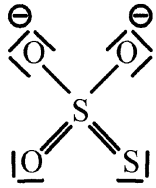


tétraédrique
Angles ~ 109°

dithionate

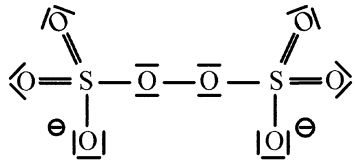


thiosulfate



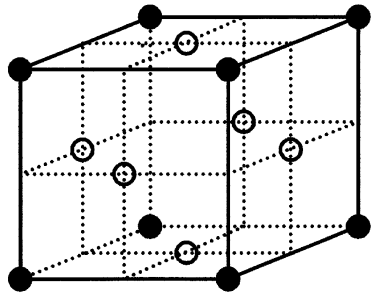
tétraédrique
~ 109°

péroxodisulfate ou persulfate



II. Structure cristalline

1. *a.*



8 sommets du cube $\times 1/8 = 1$
6 centres des faces $\times \frac{1}{2} = 3$
} 4 atomes / maille cubique

b. Blende : c.f.c S^{2-} : aux sommets du cube et aux centres des faces,

Zn^{2+} : occupent la moitié des lacunes tétraédriques.

Wurtzite : h.c S^{2-} : aux sommets de l'hexagone, aux centres des faces hexagonales et 3 à l'intérieur du prisme.

Zn^{2+} : occupent la moitié des lacunes tétraédriques.

c. $d = a\frac{\sqrt{3}}{4}$, $d = 234$ pm.

d. $r_{S^{2-}} + r_{Zn^{2+}} = 258$ pm , $d < r_{S^{2-}} + r_{Zn^{2+}}$ $\Rightarrow$ liaison partiellement covalente.

2. *a.* Enthalpie de formation du cristal à partir de ses ions à l'état gaz.

b. $\Delta H_f^0 = -656{,}6$ kJ.mol^{-1} (ion sulfate).

c. $\Delta H_h^0 (SO_4^{-2}) = -252{,}7$ kJ.mol^{-1} ; $\Delta H_h^0 (Cu^{2+}) = -2986{,}1$ kJ.mol^{-1},

$\left|\Delta H_f^0 (Cu^{2+})\right| >> \left|\Delta H_f^0 (SO_4^{2-})\right| \Rightarrow$ hydratation des ions cuivre.

d. $Cu\,SO_4, 5H_2O$: bleu $Cu\,SO_4, H_2O$: blanc,

$Cu\,SO_4, 3H_2O$ $Cu\,SO_4$.

Par chauffage, la forme bleue devient la forme blanche (perte de molécules d'eau). Cette déshydratation est réversible.

3. a. Cu : $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ \mathbf{4s^1\ 3d^{10}}$,

Cu^{2+} : $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ \mathbf{4s^0\ 3d^9}$.

b. $Cu(H_2O)_6^{2+}$ ou $Cu(H_2O)_4^{2+}$ octaèdre déformé selon un axe : 2 molécules d'eau à plus grande distance du Cu^{2+} que les 4 autres.

c. excès d'acide chlorhydrique $\rightarrow$ couleur verte puis jaune des complexes $[Cu\,Cl_n]^{2-n}$ en particulier $CuCl_4^{2-}$ de structure octaèdrique ou tétraédrique selon la nature des cations.

excès d'ammoniaque $\rightarrow$ coloration bleu intense de l'ion $Cu(NH_3)_4^{2+}$ plan carré (deux molécules d'eau dans l'axe de l'octaèdre allongé).

III. **Structure en solution et conductivité**

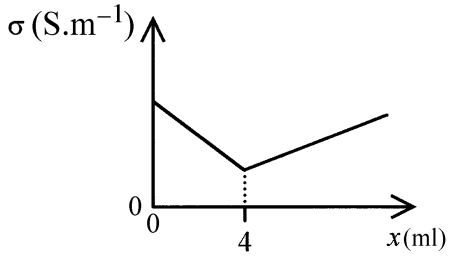
1. *a.* Liaison hydrogène dans l'eau, pas de transport de matière.

   b. Taille de SO_4^{-2} + petite que celle de HSO_4^- ; Charge de SO_4^{-2} + grande que celle de HSO_4^- $\Rightarrow$ Conductivité molaire limite de lion SO_4^{2-} supérieure à celle de l'ion HSO_4^-.

2. *a.* $\sigma_0 = 0{,}860\ Sm^{-1}$; $\sigma_e = 0{,}260\ Sm^{-1}$.

   b. $\sigma = 0{,}86 - 0{,}15\ x$ x en ml, σ en Sm^{-1} pour $0 \le x \le 4$ ml.

   $\sigma = 0{,}124\ x - 0{,}236$ pour $x > 4$ ml.

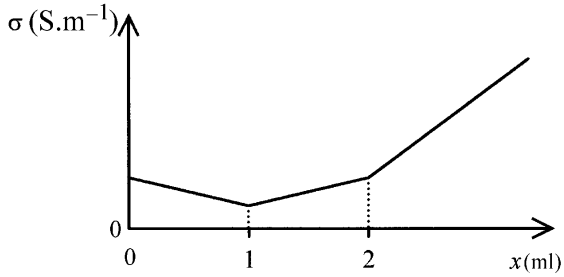


3. *a.* $\sigma' = 0{,}26 - 0{,}030\ y$ $y < 1$ ml.

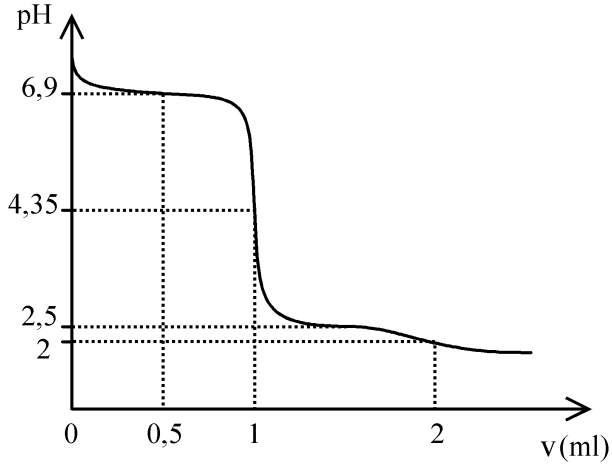
   $\sigma' = 0{,}20 + 0{,}030\ y$ $1\text{ ml} < y < 2$ ml.

   $\sigma' = -0{,}60 + 0{,}43\ y$ $y > 2$ ml .

   b.



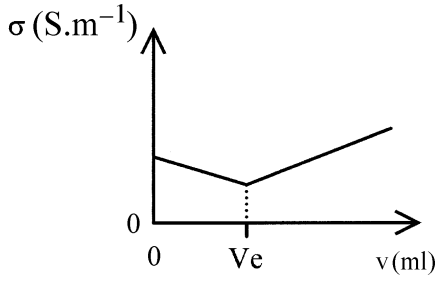
   c. Première équivalence observée avec hélianthine ou avec Bleu de Bromothymol $H^+ + SO_3^{2-} \rightarrow HSO_3^-$. La deuxième équivalence n'est guère observable.



4. *a.* $Ba^{2+} + SO_4^{2-} \rightleftarrows BaSO_4$

b. $\sigma_0 = 0{,}26\ Sm^{-1}$; $\sigma_1 = 0{,}252\ Sm^{-1}$; $\sigma_2 = 0{,}532\ Sm^{-1}$.

c.



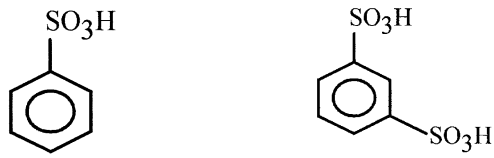
5. *a.* $v_0 = 510^{-7}$ ml ; $v_1 = 2 + 10^{-3}$ ml ; $v_2 = 4 + 10^{-1}$ ml.

b. v = 1,98 ml, pas de ↓ de $CaSO_4$ ni de ↓ $SrSO_4$. Pour 99,99 % de ↓ de $BaSO_4$, il y a contamination par $SrSO_4$.

PARTIE B : **CHIMIE ORGANIQUE**

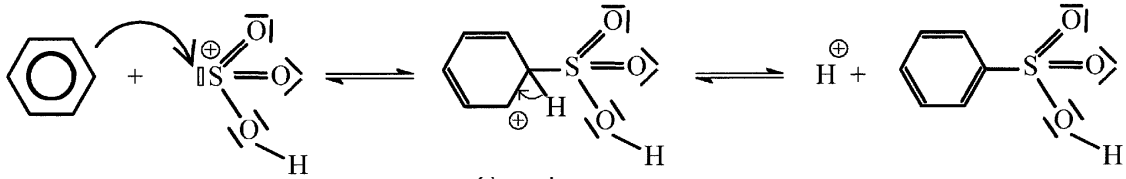
I. **Sulfonation**

1. *a.*



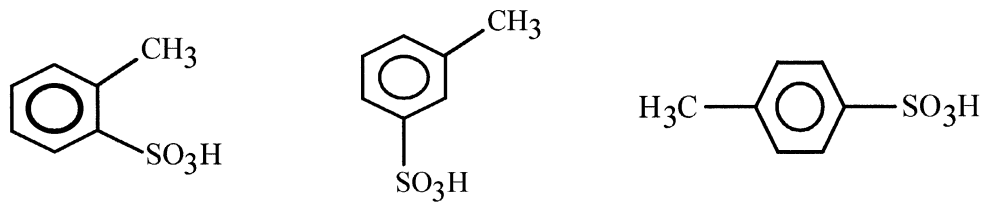
b. Monosulfonation : excès de benzène, température basse.

c. $SO_3 + H_2SO_4 \rightarrow HSO_3^+ + HSO_4^-$. Substitution électrophile par $^+SO_3H$ ou SO_3.



Complexe σ.

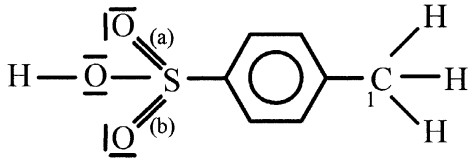
2. *a.* Ortho, méta, para :



b. CH_3 : hyperconjugaison ⇒ active le cycle aromatique,

oriente en ortho et para.

c.



Cycle plan

autour de C_1 : tétraèdre,

autour de S : tétraèdre.

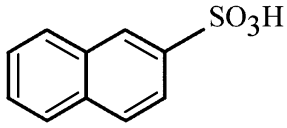
Liaisons Π : dans le cycle et liaisons *a.* et *b.*,

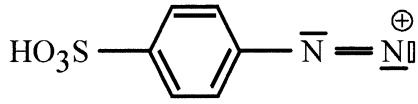
Liaisons σ : les autres.

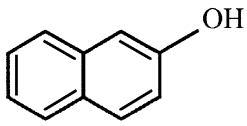
d. Dérivés sulfonés ⇒ détergents.

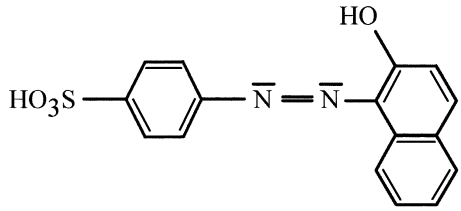
Chaîne aliphatique ou aromatique : hydrophobe
groupe fonctionnel SO_3H : hydrophile

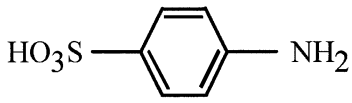
3. *a.*

A : 

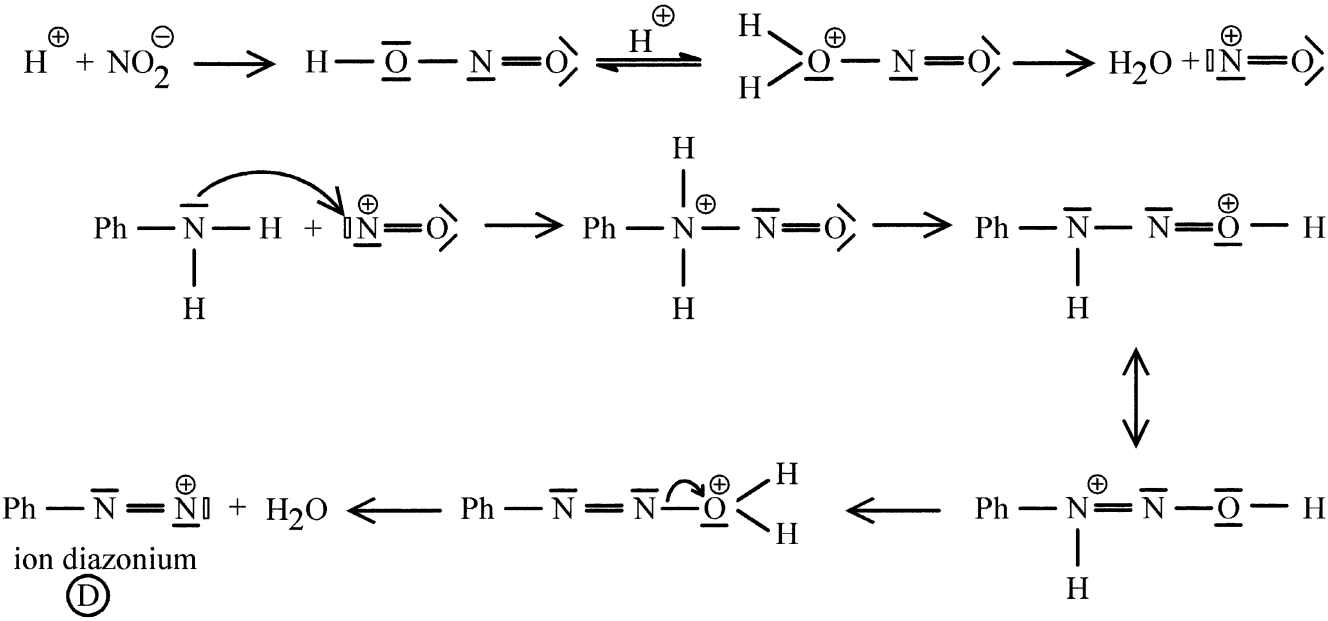
D : 

B : 

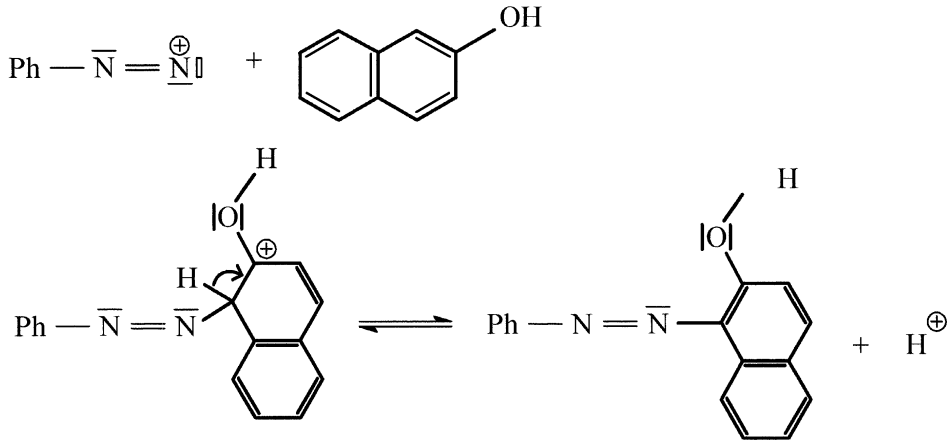
E : 

C : 

b. C → D



D → E



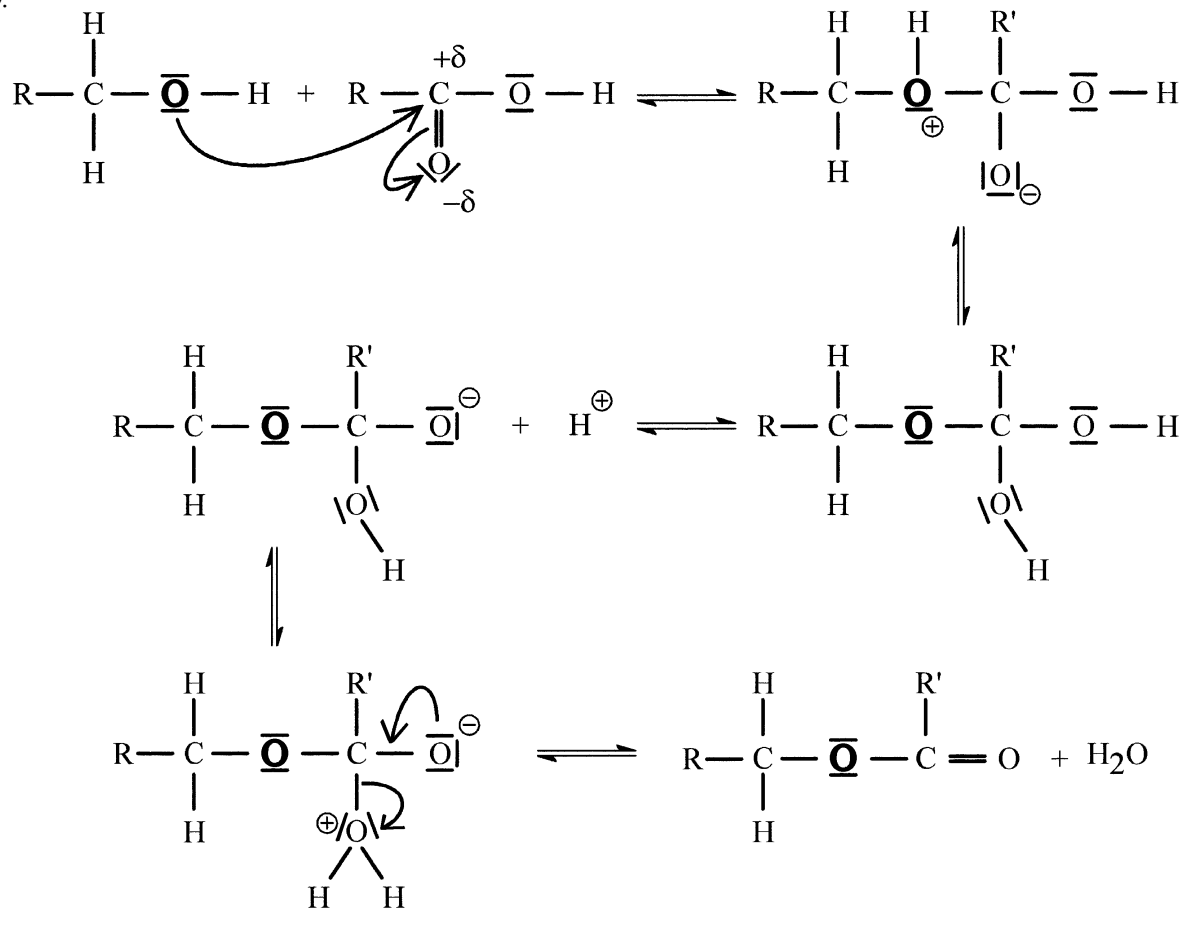
c. – N = N – groupe chromophore conjugaison avec les 10 e^- Π du noyau naphtalène + les 6 e^- Π du noyau benzénique.

II. **Dialkylsulfate**

1. *a.* $RCH_2OH + R'COOH \rightleftarrows RCH_2OCOR' + H_2O$

réaction équilibrée, lente, athermique.

b.



c. Les alcools et les acides forment des liaisons hydrogènes inter-moléculaires ; pas les esters ⇒ température ébullition + élevée des alcools et des acides par rapport aux esters.

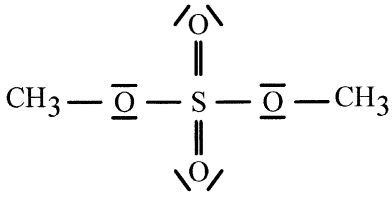
d. Élimination au fur et à mesure de l'ester formé, qui a la température d'ébullition la plus basse, du mélange réactionnel. Impossible pour l'éthanoate d'éthyle dont la température d'ébullition (77°C) est trop proche de celle de l'éthanol (78°C).

e. Voie indirecte : réaction totale avec chlorure d'acyle ou anhydride d'acide sur un alcool.

2. *a.* $RCH_2OH + H_2SO_4 \rightarrow RCH_2OSO_3H + H_2O$,

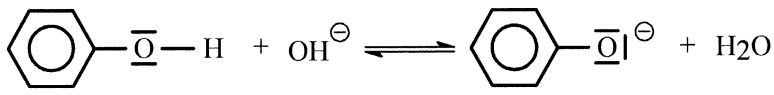
$RCH_2OSO_3H + H_2SO_4 \rightarrow RCH_2 - O - SO_2 - O - CH_2 - R + H_2O$.

b.

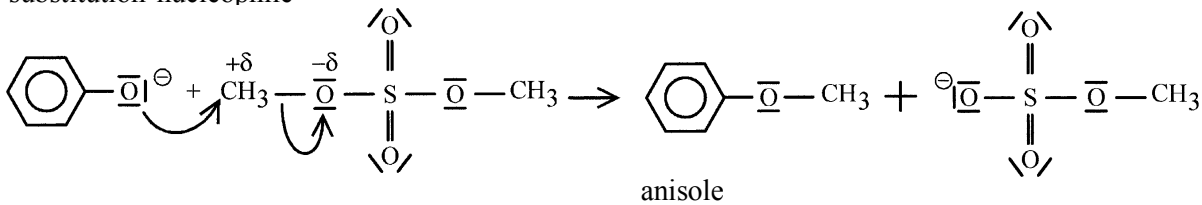


Tétraédrique : au niveau du soufre :
- des carbones,
- autour de 0, avec des angles voisins de 109°.

c.



substitution nucléophile

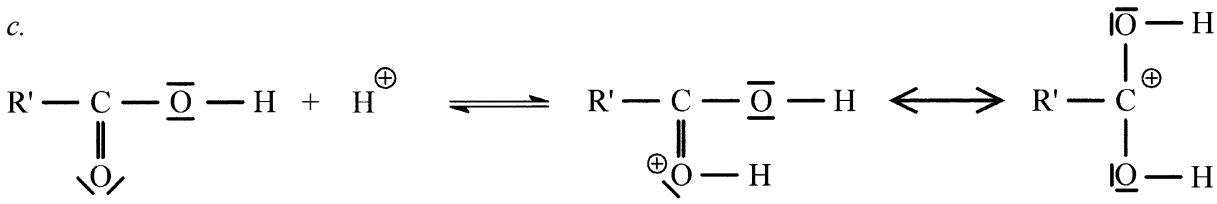


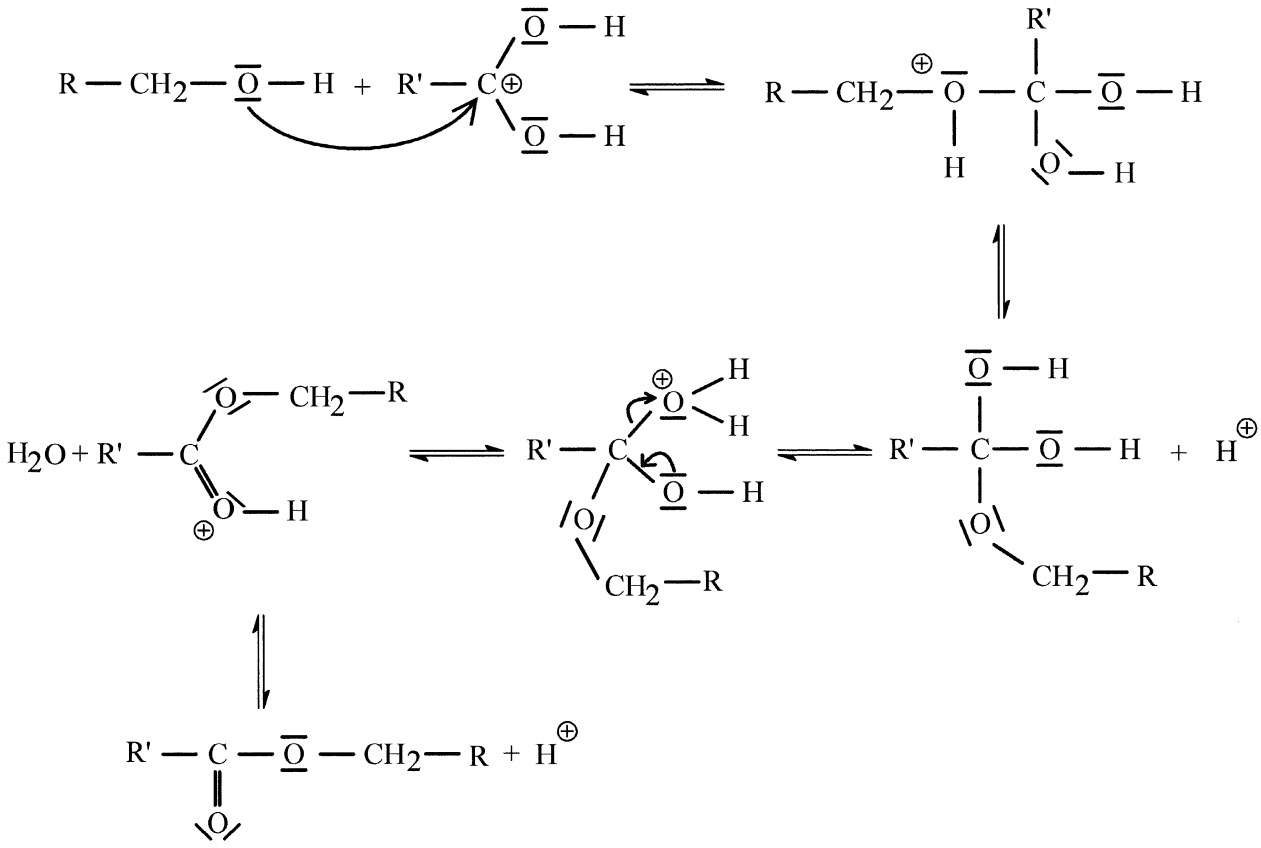
anisole

3. *a.* RCH_2OCOR' ou RCH_2OSO_3H ou $RCH_2O - SO_2 - O - CH_2 - R$.

b. Estérification : catalysée par H_2SO_4 mais une concentration trop grande en H_2SO_4 favorise la formation de sulfate d'alkyle.

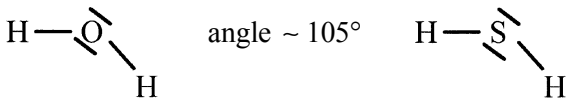
c.





Avec l'acide chlorhydrique, il y a risque de substitution nucléophile de Cl^- sur l'alcool pour donner RCH_2Cl.

III. **Thiol**

1. *a.*  angle ~ 105° angle ~ 92°.

b. Liaisons hydrogène plus fortes dans H_2O que dans H_2S

$\Rightarrow$ température d'ébullition de l'eau > température d'ébullition H_2S ,

acidité H_2S > acidité H_2O.

c. Méthanol moins acide que méthanethiol (dans l'eau pKa ≈ 15,5, pour le premier, voisin de 10 pour le second).

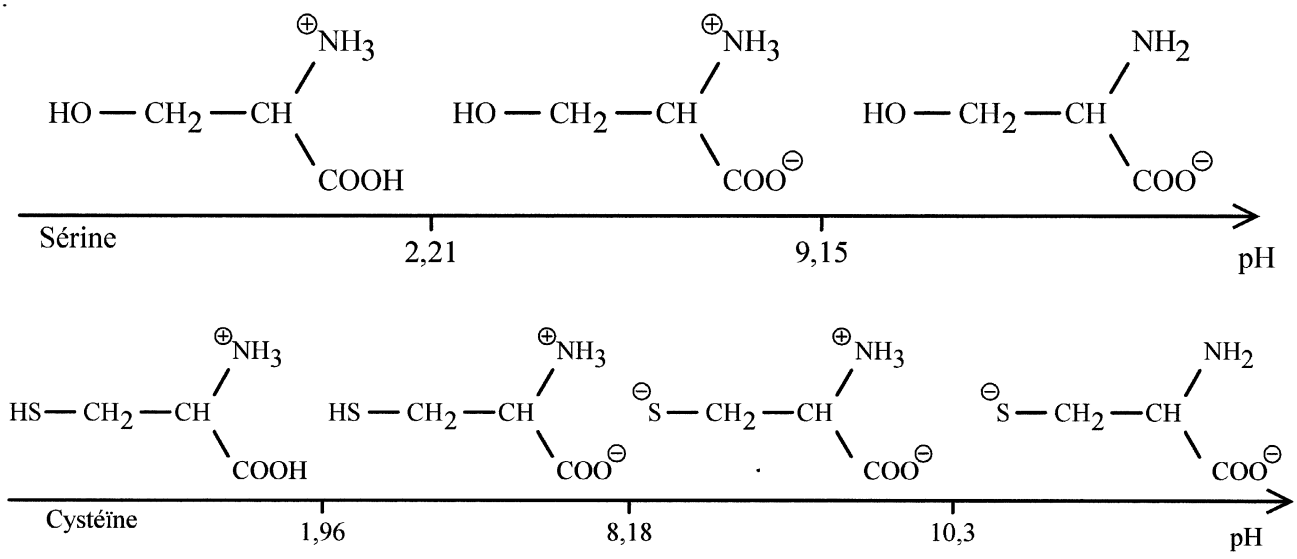
2. *a.* $\left\{\begin{array}{l} CH_3OH + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow HCHO + H_2O \\ CH_3OH + O_2 \rightarrow HCOOH + H_2O \\ CH_3OH + 3/2\,O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O \end{array}\right.$ avec catalyseur, à température ordinaire.

$2CH_3SH + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow CH_3 - S - S - CH_3 + H_2O$ sans catalyseur : liaison S – H plus faible que O–H.

b. S–S : octasoufre, polysulfure, thiosulfate, tétrathionate,
O–O : peroxyde d'hydrogène, peroxydes, peroxodisulfate.

IV. **Acide aminé soufré**

1.



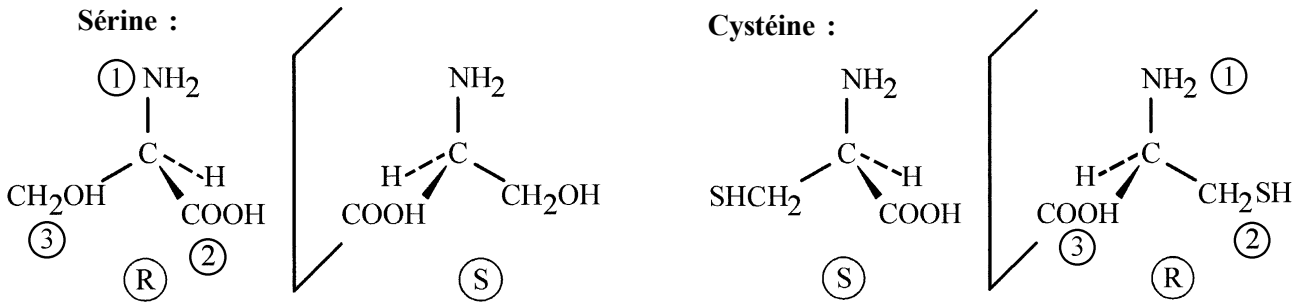
2. *a.* pH isoélectrique : maximum de la forme zwitterion (ou amphion) :
   – solubilité minimale,
   – pas d'électrophorèse : pas de mobilité dans un champ électrique.

   b. $pH_i = \frac{1}{2}(pK_{A1} + pK_{A2})$.

   c. $pH = pH_i = 5.68$.

   d. pH d'une solution d'acide aminé = pH_i.

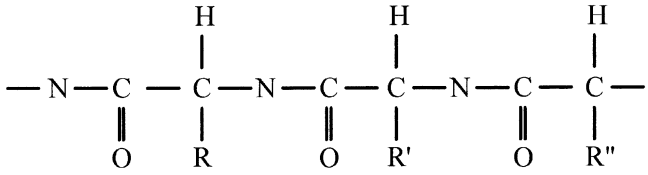
3. *a.* 2 stéréoisomères :



   b. 4 dipeptides : Ser – Cyst ; Cyst – Ser ; Ser – Ser ; Cyst – Cyst.

   Pour former le 1er par exemple, il faut :
   protéger la fonction COOH de la sérine,
   activer la fonction NH_2 de la sérine,
   protéger la fonction NH_2 de la cystéine,
   activer la fonction COOH de la cystéine
   (protection de NH_2 par RCOCl ; de COOH par estérification).

4. *a.* Polypeptide, enchaînement d'acides aminés par liaison peptidique du type :



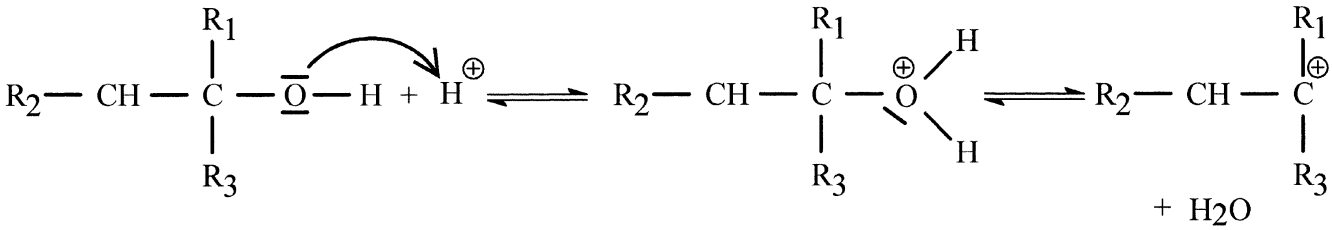
b. Structure secondaire : liaisons hydrogène inter résidus acides aminés, ponts disulfure entre les résidus acides aminés soufrés.

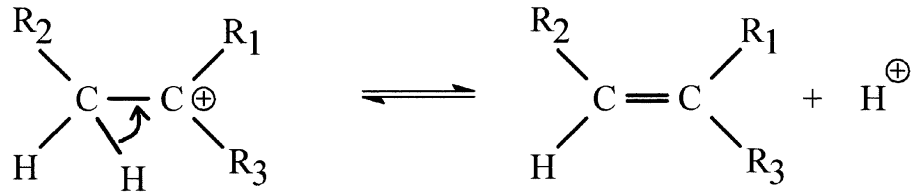
Structure tertiaire : repliement des chaînes en hélices ou en feuillets.

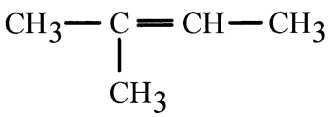
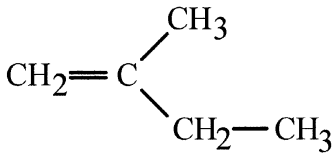
PARTIE C : **L'ACIDE SULFURIQUE ET l'ION SULFATE**

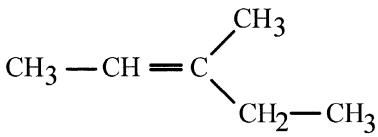
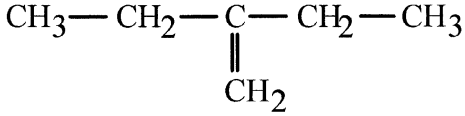
I. **En chimie organique**

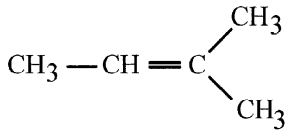
1. *a.*

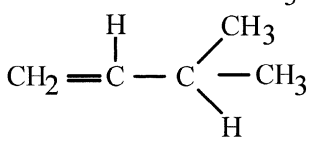




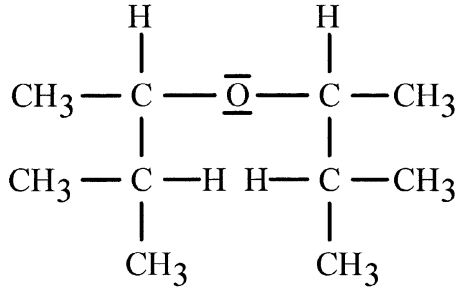
b.  majoritaire et  minoritaire.

 majoritaire et  minoritaire.

2. A température élevée : majoritaire : 

minoritaire : 

A température moins élevée : étheroxyde :



II. **En chimie inorganique**

1. *a.* Eau pure : anode : $2H_2O \rightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$,

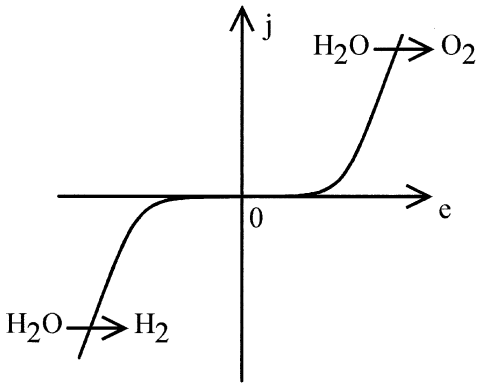
cathode : $H_2O + e^- \rightarrow \frac{1}{2}H_2 + OH^-$.

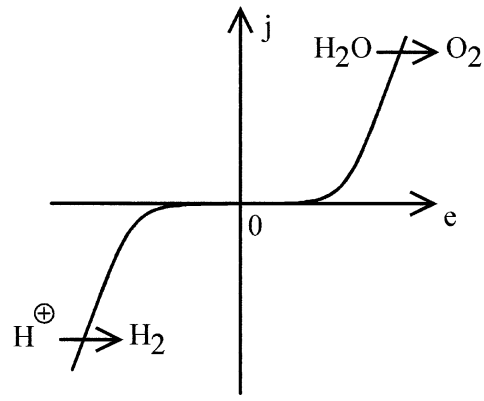
Eau acidifiée par $\mathbf{H_2SO_4}$: anode : $2H_2O \rightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$,

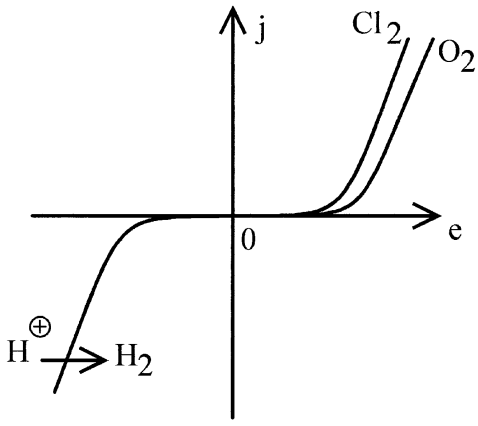
cathode : $H^+ + e^- \rightarrow \frac{1}{2}H_2$.

Eau acidifiée par HCl : anode : $2H_2O \rightarrow O_2 + 4H^+ + 4e^-$ et $2Cl^- \rightarrow Cl_2 + 2e^-$,

cathode : $H^+ + e^- \rightarrow \frac{1}{2}H_2$.





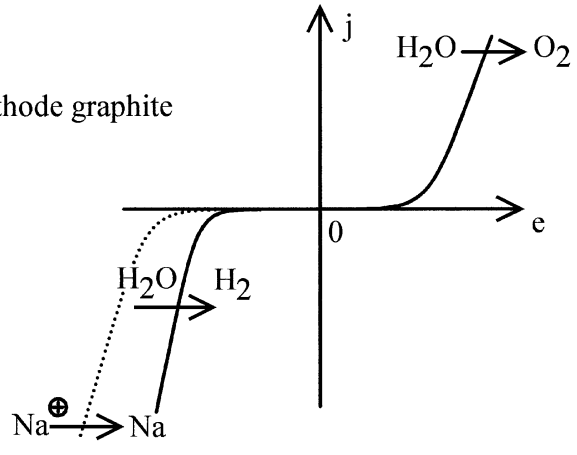


b. Avec la soude : anode : $4OH^- \rightarrow O_2 + 2H_2O + 4e^-$,

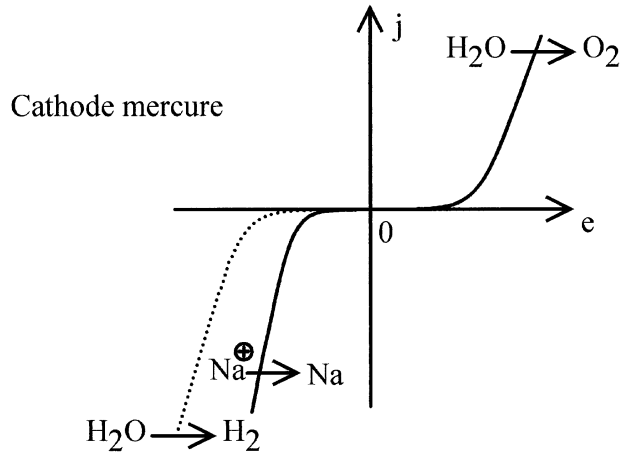
cathode graphite : $H_2O + e^- \rightarrow \frac{1}{2}H_2 + OH^-$,

cathode mercure : $Na^+ + e^- \rightarrow Na\,(Hg)$ amalgamé.

Cathode graphite



Cathode mercure



2. *a.* $Ca_3\,(PO_4)_2$ moins ionique que $Ca\,(H_2PO_4)_2$ car l'anion PO_4^{3-} est plus polarisable que $H_2PO_4^-$ (charge plus grande) $\Rightarrow$ solubilité dans l'eau plus faible de $Ca_3\,(PO_4)_2$ que $Ca\,(HPO_4)$.

b. $Ca_3\,(PO_4)_2 + H_2SO_4 \rightarrow 2Ca\,(HPO_4) + CaSO_4$,

$2Ca\,(HPO_4) + H_2SO_4 \rightarrow Ca\,(H_2PO_4)_2 + CaSO_4$,

$Ca\,(H_2PO_4)_2 + H_2SO_4 \rightarrow 3H_3PO_4 + CaSO_4$

Superphosphate simple : mélange de $Ca\,(H_2PO_4)_2$ et $CaSO_4$,

superphosphate triple : $Ca\,(H_2PO_4)_2$.

c. – A.T.P., A.D.P., glucose-6-phosphate... = métabolites intervenant dans le cycle énergétique.,
– phospholipides : membranes cellulaires,
– phosphate inorganique $\left(H_2PO_4^- + HPO_4^{2-}\right)$: réserve de phosphate pour les phosphorylations.

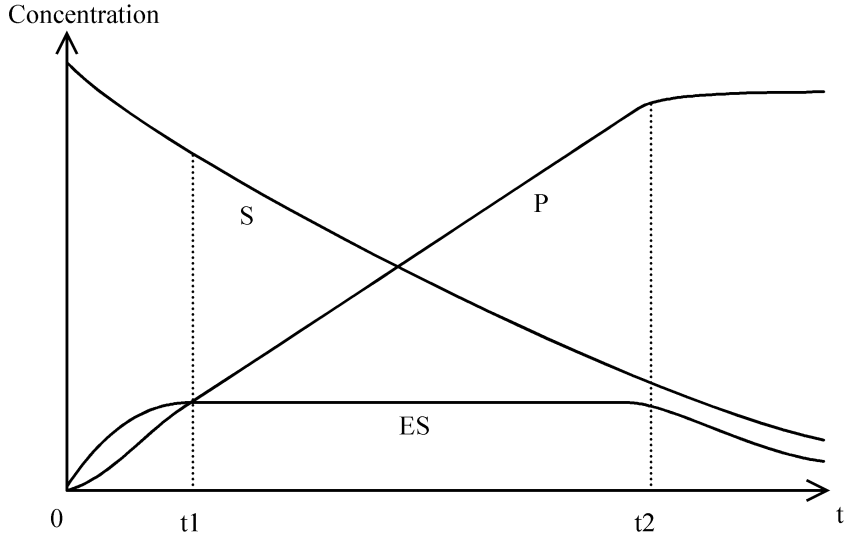
d. Azote : nitrate, ammonium, les acides aminés, les protéines.

Potassium : sous forme d'ion K^+.

Soufre : acides aminés soufrés, protéines, sulfate.

III. **En biologie**

1. $v^o = \dfrac{k_3 \cdot E^o \cdot S^o}{S^o + \dfrac{k_2 + k_3}{k_1}}$. On rapelle : l'approximation de l'état stationnaire sur ES valable entre les dates t_1 et t_2.



2. $V^o = \dfrac{V^o_{max} \cdot S^o}{S_o + K_M}$.

3. $\dfrac{1}{V^o} = \dfrac{1}{V^o_{max}} = \dfrac{K_M}{V^o_{max}} \cdot \dfrac{1}{S^o}$ $\qquad \dfrac{1}{V^o} = f\left(\dfrac{1}{S^o}\right)$ est une droite d'ordonnée à l'origine $\dfrac{1}{V^o_{max}}$

$K_M = 2{,}5 \text{ m mol.L}^{-1}$. et d'abscisse à l'origine : $-1/K_M$.

PARTIE D : **OXYDORÉDUCTION EN SOLUTION AQUEUSE**

I. **L'ion peroxodisulfate**

1. Oxydation anodique de l'ion sulfate, à froid, densité de courant très élevée.

2. $S_2O_8^{2-} + 2H_2O \rightarrow 4SO_4^{2-} + 4H^+ + O_2$.

3. *a.* $[CH_3OH]$ en excès $\rightarrow$ $v^o = k' \left[S_2O_8^{2-}\right]_0^{\alpha}$, $\qquad \alpha = \dfrac{3}{2}$.

b. $v_o = k_3 \sqrt{\dfrac{k_1}{k_4}} \left[S_2O_8^{2-}\right]^{3/2}$.

c. $\ln k = \ln A - \dfrac{E_a}{RT}$ (Arrhénius) $\quad E_a = 125 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

$E_a \sim E_{O-O}$ $\rightarrow$ rupture de la liaison O–O du peroxodisulfate = étape lente.

II. **Diagramme potentiel-pH du soufre (en se limitant aux espèces citées ci-dessous)**

1. *a.* $E^o_{S_2O_3^{2-}/S} = 0{,}49\,V$; $E = 0{,}46 - 0{,}09\,pH$.

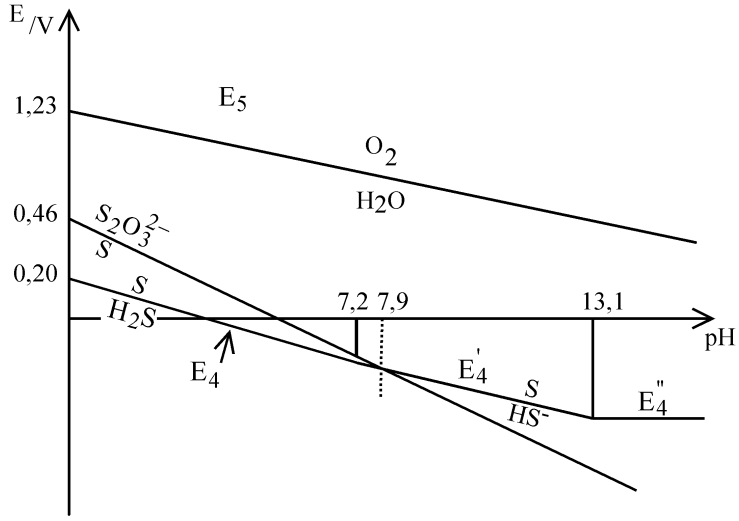
b. $pH < 7{,}2$ $E_4 = 0{,}20 - 0{,}06\,pH$,

$E_5 = 1{,}23 - 0{,}06\,pH$,

$pH > 7{,}2$ $E'_4 = -0{,}016 - 0{,}03\,pH$,

$pH > 13{,}1$ $E''_4 = -0{,}409$,

pH dismutation : $pH = 7{,}9$.



2. $S_2O_3^{2-} + 2H^+ \rightarrow S + SO_2 + H_2O$,

$pH = 1$.

3. *a.* $9 > pH > 1$; I^- forme avec I_2 un complexe I_3^- soluble dans l'eau, alors que I_2 n'est que très faiblement soluble :

(K) $I_2 + 2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$ ou $2I_2 + I_2 + 2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2I_3^- + S_4O_6^{2-}$ (K').

b. $$\ln K = \frac{2F}{RT}(E^o_6 - E^o_3)\ ; \qquad K = 4\ 10^{14} \quad \text{ou} \quad K' = 1{,}810^{20}$$

– si I_2 est dans la burette : à l'équivalence, apparition de la couleur brune de I_3^-. On peut aussi utiliser l'empois d'amidon (bleu en présence de I_2) :

$$\left[S_2O_3^{2-}\right] = 2{,}5.10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

– si I_2 est dans le bécher, l'équivalence s'observe par la disparition de la couleur brune et la concentration en $\left[S_2O_3^{2-}\right]$ vaut 0,1 $mol.L^{-1}$.

c.

$$\Delta E = \frac{E_6^o + E_3^o}{2} + \frac{0{,}06}{4} \log \frac{(I_2)_e \left(S_4O_6^{-2}\right)_e}{(I^-)_e^2 \cdot \left(S_2O_3^{2-}\right)_e^2} - 0{,}244$$

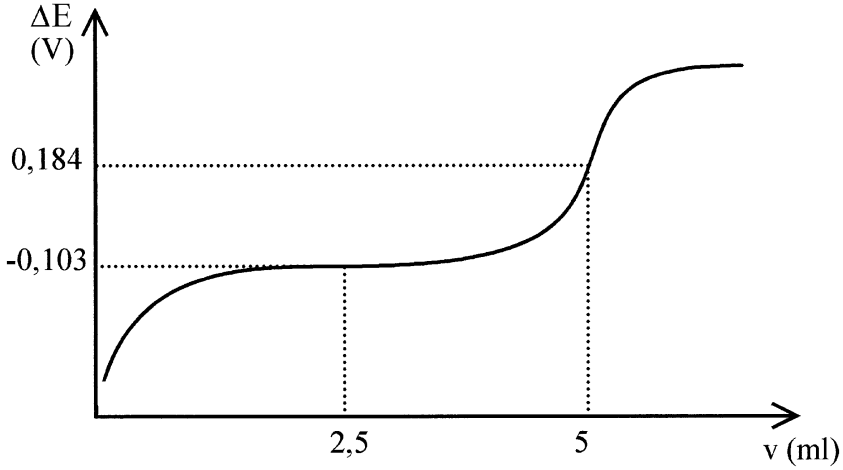
$$\Delta E = \frac{E_6^o + E_3^o}{2} - 0{,}244 + 0{,}015 \log \frac{1}{4\,(I^-)_e \left(S_2O_3^{2-}\right)_e}$$

$$\Delta E = 0{,}184 \text{ V}.$$

d. A la $\frac{1}{2}$ équivalence $E_{1/2} = E_6^o + \frac{0{,}06}{2} \log \frac{(S_4O_6^{2-})_{1/2}\, e}{\left(S_2O_3^{2-}\right)_{1/2}^2 e} - 0{,}244$

$$\Delta E_{1/2} = E_6^o + 0{,}03 \log \frac{5 10^{-3}}{10^{-4}} - 0{,}244$$

$$\Delta E_{1/2} = -0{,}103 \text{ V}.$$



III. **Solubilité des sulfures en fonction du pH**

1.

$$s = \sqrt{K_s \left(1 + \frac{[H^+]}{K_2} + \frac{[H^+]^2}{K_1 K_2}\right)} = \sqrt{Ks \left(1 + \frac{10^{-pH}}{K_2} + \frac{10^{-2pH}}{K_1 K_2}\right)}$$

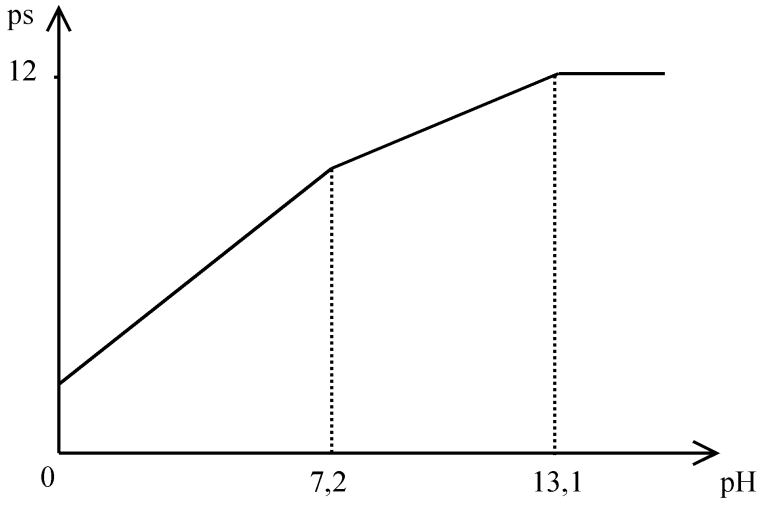
2. *a.* pH = 0,15.

b. pH = 3,15.

c. $pH < pK_1 = 7{,}2 \quad ps = pH + \frac{1}{2}\left(pK_s - pK_1 - pK_2\right) = pH + 1{,}85$

$7{,}2 < pH < 13{,}1 \quad ps = \frac{1}{2} pH + \frac{1}{2}\left(pK_s - pK_2\right) = \frac{1}{2} pH + 5{,}45$

$pH > 13{,}1 \quad ps = \frac{1}{2} pK_s = 12$



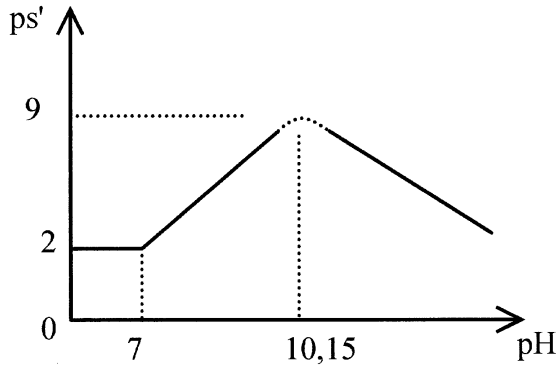
3. *a.* pH = 7,0.

b. $s' = 10^{12} \cdot 10^{-2pH} + 10^{-30} \times 10^{2pH}$.

c. pH < 10,5 $ps' = -12 + 2pH$,

pH > 10,5 $ps' = 30 - 2pH$.

pH < 7 $ps' = 2$,



4. ZnS précipite : on observe un précipité blanc.

PARTIE E : **OXYDATION EN PHASE SÈCHE**

1. $\Delta rH^o = -197{,}8 \text{ kJ.mol}^{-1}$; $\Delta rS^o = -187{,}8 \text{ kJ.mol}^{-1}\text{ K}^{-1}$.

2. $\Delta_r H^o_{1000°C} = -199{,}8 \text{ kJ.mol}^{-1}$; $\Delta_r S^o_{1000°C} = -190{,}8 \text{ J.mol}^{-1}\text{ K}^{-1}$,

$\Delta_r H^o_{1000°C} \sim \Delta_r H^o_{25°C}$; $\Delta_r S^o_{1000°C} \sim \Delta_r S^o_{25°C}$,

$\Delta_r G^o_T \text{ (kJ.mol}^{-1}) = -198 + 0{,}19\,T$.

3. T ↗ équilibre déplacé vers la gauche (SO_2).

4. *a.* $\ln K = \frac{23,8}{T} 10^3 - 22,6.$

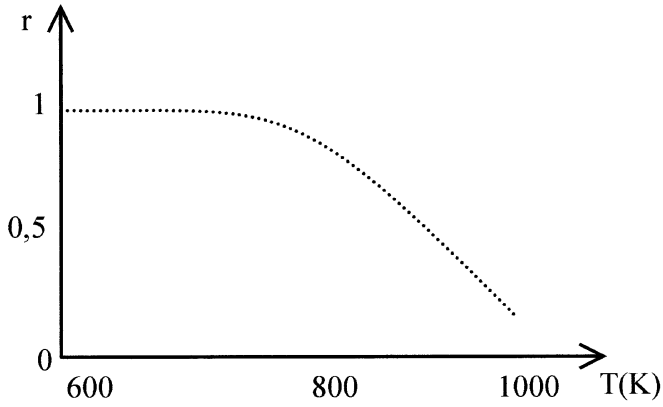
b. $\ln \frac{r^2 (3 - r)}{(1 - r)^3} = \frac{23,8}{T} \cdot 10^3 - 22,6.$

c.

$T_{(K)}$	r
983	0,5
792	0,9
641	0,99

rendement supérieur à 90 % pour T < 800 K.

d.



5. $\ln \frac{r'^2 (7 - r')}{(1 - r')^3} = \frac{23,8\,10^3}{T} - 22,6.$

$T_{(K)}$	946	765	623
r'	0,5	0,9	0,99

à la même température r' est très légèrement inférieur à r $\Rightarrow$ on peut utiliser de l'air pour la synthèse de SO_3.

6. *a.* Conditions : T ~ 400°C – 600°C, P atmosphérique, catalyseur V_2O_5 , promoteur K_2SO_4 , air deshydraté.

Contraintes : meilleur rendement à basse température,
mais cinétique lente à basse température.

b. SO_3 sert à préparer l'acide sulfurique. L'acide sulfurique est utilisé :

- engrais (de 30 à 60 %),
- sulfonate, colorants, explosifs,
- accumulateurs au plomb,
- pigments minéraux,
- fabrication des acides nitrique, chlorydrique,
- etc...

Agrégation

(Concours Interne)

OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercices d'application :
Options Physique Appliquée - Session : 1994

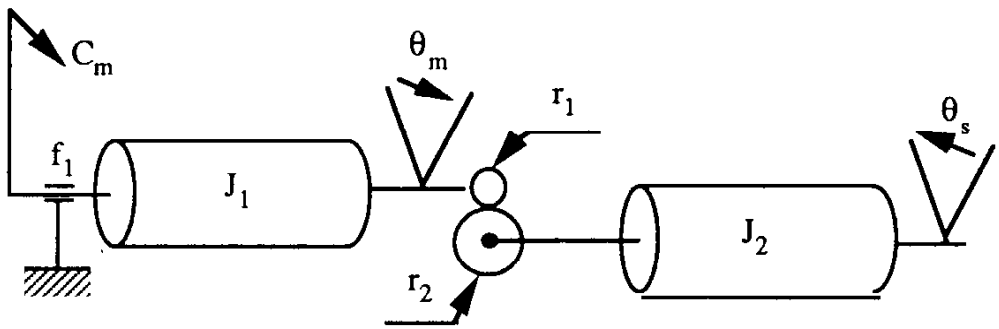
Option : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

CORRECTION DU PREMIER PROBLÈME

PREMIERE PARTIE

I - 1 MODELISATION

I-1-1



I-1-2

$$J_1 \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + f_1 \frac{d\theta_m}{dt} = C_m - F_{r1}$$

$$J_2 \frac{d^2\theta_s}{dt^2} = F_{r_2}$$

I-1-3

$J_1 p^2\theta_m(p) + f_1 p\theta_m(p) = C_m(p) - F(p)\, r_1$ (1)

$J_2 p^2 \theta_S(p) = F(p)\, r_2$ (2)

$$(2) \rightarrow F(p) = \frac{J_2 p^2 \theta_s(p)}{r_2}$$

reporté dans (1) $\rightarrow J_1 p^2\theta_m(p) + f_1 p\theta_m(p) = C_m(p) - \frac{J_2 p^2 \theta_s(p)}{r_2} r_1$ (1')

comme $\frac{\theta_m(p)}{\theta_s(p)} = \frac{1}{n} = \frac{r_2}{r_1}$

$$(1') \rightarrow J_1 p^2 \frac{\theta_s(p)}{n} + J_2 p^2 n\, \theta_s(p) + f_1 p \frac{\theta_s(p)}{n} = C_m(p)$$

d'où $$\left[\frac{\theta_s(p)}{C_m(p)} = \frac{1}{\left(\frac{J_1}{n} + nJ_2\right)p^2 + \frac{f_1}{n}p} = \frac{n}{f_1 p\left[1 + \frac{J_1 + n^2 J_2}{f_1}p\right]}\right]$$

I-1-4

$$\frac{\theta_s(p)}{C_m(p)} = \frac{n}{\left(J_1 + n^2 J_2\right)p^2}$$ commande d'accélération

I-1-5

$$\frac{\theta_s(p)}{C_m(p)} = \frac{1}{p^2}\frac{n}{J_1 + n^2 J_2} = \frac{1}{p^2}\frac{1}{\left(\frac{J_1}{n} + nJ_2\right)}$$

$\frac{J_1}{n}$ et nJ_2 sont tels que le produit $\frac{J_1}{n} \times nJ_2 = J_1 J_2 = C^{te}$

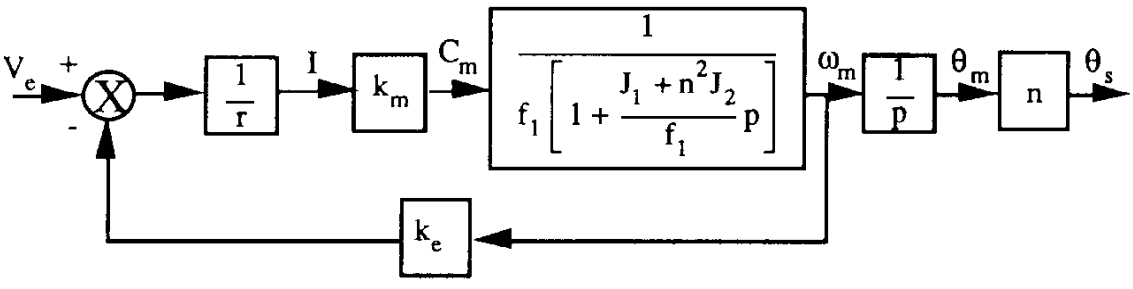
La somme est minimum (accélération max) lorsque

$$\frac{J_1}{n} = nJ_2 \text{ soit } n^2 = \frac{J_1}{J_2} \rightarrow \boxed{n = \pm\sqrt{\frac{J_1}{J_2}}}$$

on prendra $n > 0$ (pas d'inversion)

$$\text{A.N: } n = \sqrt{\frac{10^{-2}}{9.10^3}} = 1{,}05 \times 10^{-3}$$

I-1-6



$$\frac{\omega_m}{V_e} = \frac{k_m}{\left(rf_1 + k_m k_e\right)}\frac{1}{\left[1 + \frac{J_1 + n^2 J_2}{rf_1 + k_m k_e}rp\right]}$$

A.N. $\frac{\theta_s}{V_e} = \frac{6{,}92 \times 10^{-3}}{p} \times \frac{1}{1 + 1{,}15p}$

(n'a pas de rapport avec l'expression proposée dans le texte à ceux qui n'ont pas trouvé).

$$\frac{\theta_s}{V_e} = \frac{\omega_m}{V_e} \times \frac{n}{p}$$

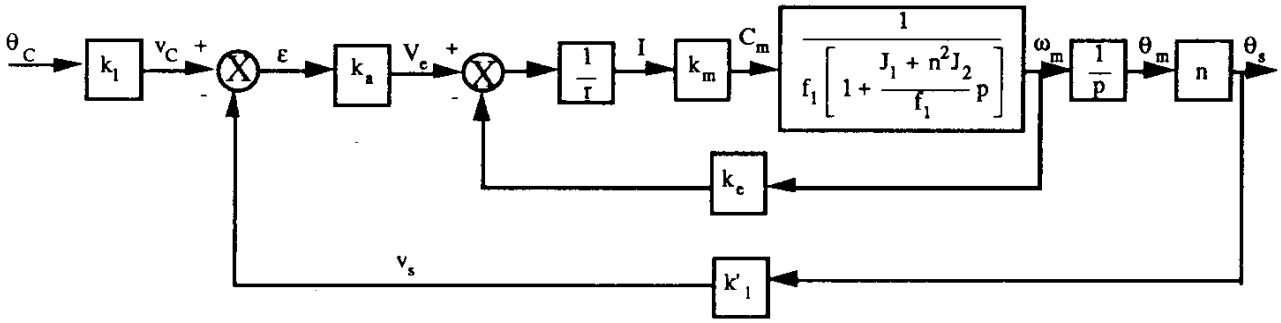
I-1-7 $rf_1 = 5 \times 10^{-3}$ $\quad J_1 = 10^{-2}$ kgm^2

$k_m k_e = 3{,}28 \times 10^{-3}$ $\quad n^2 J_2 = 0{,}9.10^{-2}$ kg m^2 (pour $n = 10^{-3}$)

on ne peut négliger ni f_1, ni J_1.

I - 2 ASSERVISSEMENT

I-2-1



I-2-2

$$\frac{\theta_s}{V_e} = \frac{nk_m}{(rf_1 + k_m k_e)\, p\left[1 + \frac{J_1 + n^2 J_2}{rf_1 + k_m k_e} rp\right]} = T_1(p)$$

$$\frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{k_1 k_a T_1(p)}{1 + k_a T_1(p) k_1} = \frac{n k_a k_m k_1}{(rf_1 + k_m k_e)\, p\left[1 + \frac{J_1 + n^2 J_2}{rf_1 + k_m k_e} rp\right] + n k_1 k_a k_m}$$

$$\frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{1}{1 + \frac{rf_1 + k_m k_e}{n k_1 k_a k_m} p + \frac{(J_1 + n^2 J_2) rp^2}{n k_1 k_a k_m}} \qquad \text{A.N : } \frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{1}{1 + \frac{14{,}46}{k_a} p + \frac{16{,}58}{k_a} p^2}$$

avec $\frac{\omega_m}{v_e}$ fournie par défaut : $\frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{1}{1 + \frac{20{,}28}{k_a} p + \frac{1{,}138}{k_a} p^2}$

I-2-3 Système du 2e ordre. Réponse indicielle

Réponse à 6 % près en un temps minimum si $D_1 < 6$ %

$$D_1 = \exp - \frac{z\pi}{\sqrt{1 - z^2}} \Leftrightarrow \text{Ln}\, D_1 = - \frac{z\pi}{\sqrt{1 - z^2}} \Leftrightarrow (1 - z^2)\, \text{Ln}^2 D_1 = z^2 \pi^2$$

$\Leftrightarrow z^2 (\text{Ln}^2 D_1 + \pi^2) = \text{Ln}^2 D_1$ $\qquad D_1 = 6\ \% \Leftrightarrow \text{Ln}^2 D_1 = 7{,}92$

$$z^2 = \frac{Ln^2 D_1}{Ln^2 D_1 + \pi^2} = 0,445$$

$z = 0,667$

Caractéristiques du système asservi : 2e ordre avec :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_a}{16,58}} = 0,2456\sqrt{k_a}$$

$$z = \frac{1}{2}\frac{14,46}{k_a} x\, 0,2456\sqrt{k_a} = \frac{1,776}{\sqrt{k_a}}$$

Réponse à 6 % près en temps minimum si $\left[k_a = \frac{1,776^2}{0,667^2} = 7,087\right]$

Temps mis pour atteindre cette valeur :

$$s(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin\left\{\omega_n \sqrt{1-z^2}\, t + \text{arctg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right\}\right] = 1 - 0,06$$

ou résoud $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin\left\{\omega_n \sqrt{1-z^2}\, t + \text{arctg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right\} - 0,06 = 0$

en faisant attention à l'homogénéité de ce qui se trouve entre les { } (degrés ou radians)

6 % par valeur inf : t = 4,15 secondes par valeur sup : 6,52 s

(0,2042 s avec $\frac{\omega_m}{v_e}$ donnée) (1er max $\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-z^2}}$ = 6,4491 s)

I-2-4 La vitesse de la sortie est la dérivée de la réponse indicielle

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \theta_0 \frac{\omega_n}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-z^2}\, t$$

on calcule la dérivée de cette vitesse :

$$\frac{d^2\theta_s}{dt^2} = -\theta_o \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \sin\left[\omega_n \sqrt{1-z^2}\, t - \varphi\right] \qquad \text{avec } \varphi = \text{arc tg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

La vitesse sera maximum pour $\sin\left(\omega_n \sqrt{1-z^2}\, t - \varphi\right) = 0$

soit $t' = \frac{k\pi + \text{arctg}\sqrt{1-z^2}/z}{\omega_n \sqrt{1-z^2}}$; la première valeur est obtenue pour k = 0

$$\Leftrightarrow t_1' = \frac{\text{arctg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}}{\omega_n \sqrt{1-z^2}}$$

(attention à travailler avec les même unités : degrès ou radians)

AN : $t'_1 = 1{,}73$ seconde

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t'1} = \theta_0 \frac{\omega_n}{\sqrt{1-z^2}} e^{-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}} \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

AN : vitesse max de la sortie $\omega_{MAX} = 3{,}08.10^{-2}$ rd.s^{-1} soit 0,294 t/mn

Le moteur tourne donc (vitesse max) à 294 t/mn.

I-2-5 Recherche du couple maximum

$$C_m(t) = \frac{J_1}{n}\frac{d^2\theta_s}{dt^2} + nJ_2\frac{d^2\theta_s}{dt^2} + \frac{f_1}{n}\frac{d\theta_s}{dt} = \left(\frac{J_1}{n} + nJ_2\right)\frac{d^2\theta_s}{dt^2} + \frac{f_1}{n}\frac{d\theta_s}{dt}$$

on remplace $\frac{d^2\theta_s}{dt^2}$ et $\frac{d\theta_s}{dt}$ par leur valeur

$$C_m(t) = -\left(\frac{J_1}{n} + nJ_2\right)\theta_o \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega nt} \sin\left[\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \varphi\right] + \frac{f_1}{n}\theta_o \frac{\omega_n}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega nt} \sin\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t$$

$$\boxed{\frac{dC_m(t)}{dt} = \left(\frac{J_1}{n} + nJ_2\right)\frac{d^3\theta_s}{dt^3} + \frac{f_1}{n}\frac{d^2\theta_s}{dt^2}}$$

$$C_m(t) = \theta_o \frac{\omega_n}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega nt}\left[\frac{f_1}{n}\sin\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \left(\frac{J_1}{n} + nJ_2\right)\omega_n \sin\left(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \varphi\right)\right]$$

$$\frac{d^3\theta_s}{dt^3} = -\theta_o \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-z^2}}\left\{-z\omega_n e^{-z\omega nt}\sin\left[\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \varphi\right] + e^{-z\omega nt}\,\omega_n\sqrt{1-z^2}\cos(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \varphi)\right\}$$

$$\frac{d^3\theta_s}{dt^3} = -\theta_o \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-z^2}}\omega_n e^{-z\omega nt}\left\{-z\sin\left(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \varphi\right) + \sqrt{1-z^2}\cos(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \varphi)\right\}$$

$$z = \cos\varphi\ ;\ \sqrt{1-z^2} = \sin\varphi \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

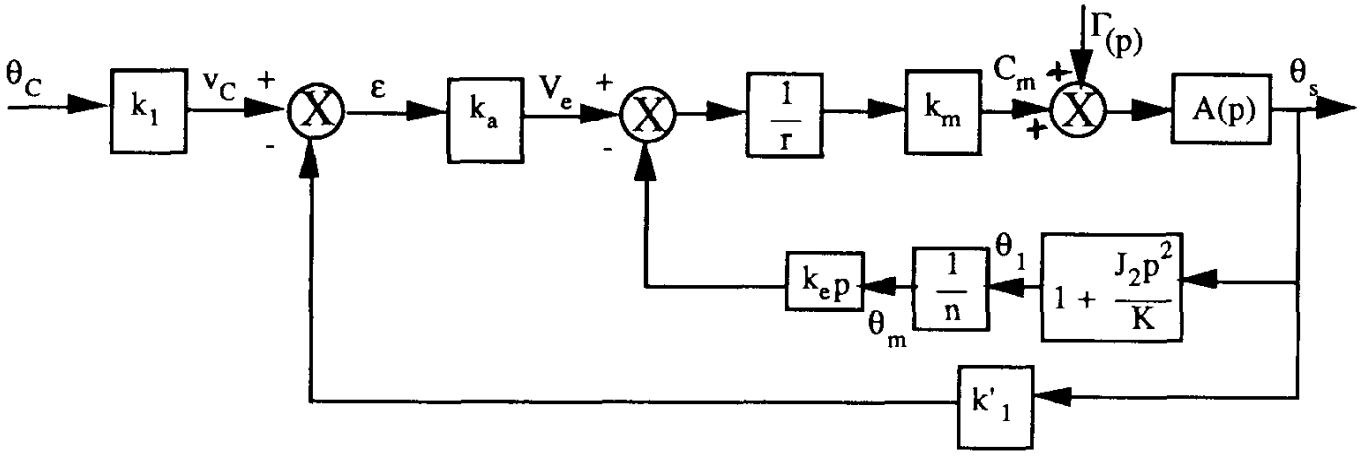
$$= -\theta_o \frac{\omega_n^3}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega nt}\left\{\sin\varphi\cos\left(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \varphi\right) - \cos\varphi\sin(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \varphi)\right\}$$

$$\frac{d^3\theta_s}{dt^3} = -\theta_o \frac{\omega_n^3}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega nt}\sin\left(2\varphi - \omega_n\sqrt{1-z^2}\,t\right) = \theta_o \frac{\omega_n^3}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega nt}\sin(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - 2\varphi)$$

$$\frac{dC_m(t)}{dt} = \left(\frac{J_1}{n} + nJ_2\right)\theta_0 \frac{\omega_n^3}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega nt}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - 2\varphi\right) - \frac{f_1}{n}\theta_0 \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega nt}\sin\left[\omega_n\sqrt{1-z^2}\,t - \varphi\right]$$

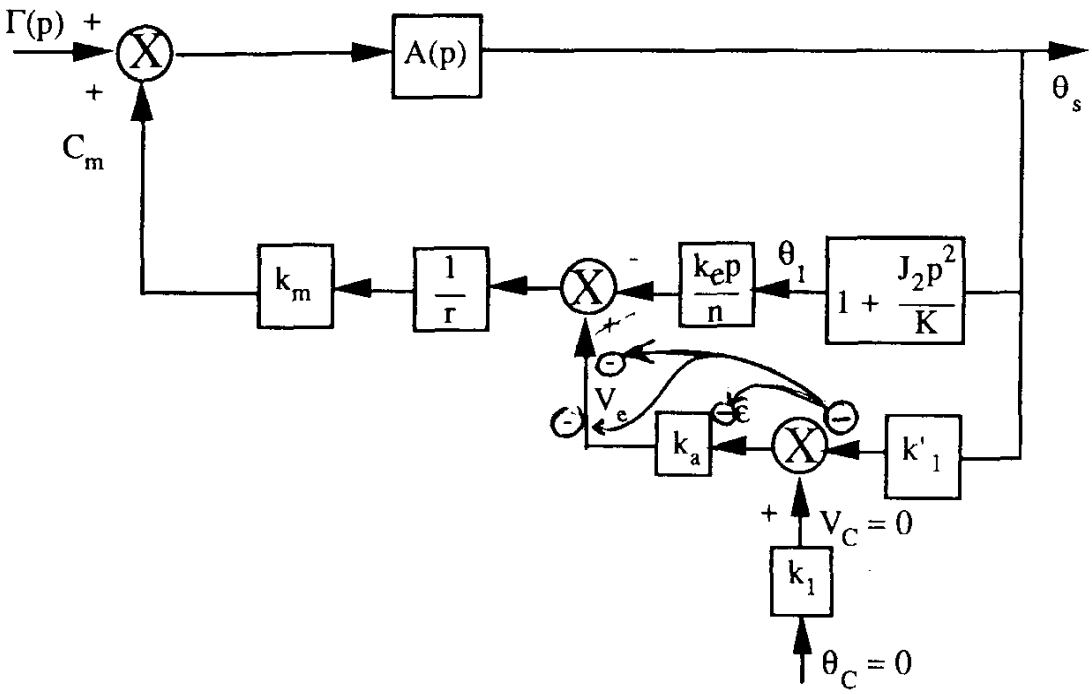
II - 2 Influence de la réversibilité du réducteur

II - 2 - 1 Schéma fonctionnel



$$A(p)=\frac{\theta_s}{C_m}$$

II - 2 - 2



$$\frac{dC_m(t)}{dt} = \theta_0 \frac{\omega_n^2}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_n t} \left\{ \left(\underbrace{\frac{J_1}{n} + nJ_2}_{19} \right) \omega_n \sin\left(\omega_n \sqrt{1-z^2}\, t - 2\varphi\right) - \underbrace{\frac{f_1}{n}}_{10} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-z^2}\, t - \varphi\right) \right\}$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

$\frac{dCm(t)}{dt}$ s'annule pour $t_1^{\cdot} = 5{,}326$ secondes

et pour $t_2^{\cdot} = 11{,}775$ secondes

à $t_1^{\cdot}$ ou a un minimum de couple $C_m^{\cdot}$ min = - 0,06mN

à $t_2^{\cdot}$ on a un maximum (relatif) de couple $C_m^{\cdot}$Max = + 0,0036 mN

Couple maximum absolu : au départ (t = 0) $C_{Max} = 0{,}81$ mN
courant d'induit correspondant : $I_{Max} = 14{,}17$A

I-2-6 (voir courbes fig 1)

I-2-7 t'_1 n'a pas changé.

$\omega_{max} = 0{,}48$ rd.s^{-1} soit 4,629 t/mn

Le moteur tourne à $N_{Max} = 4629$ t/mn

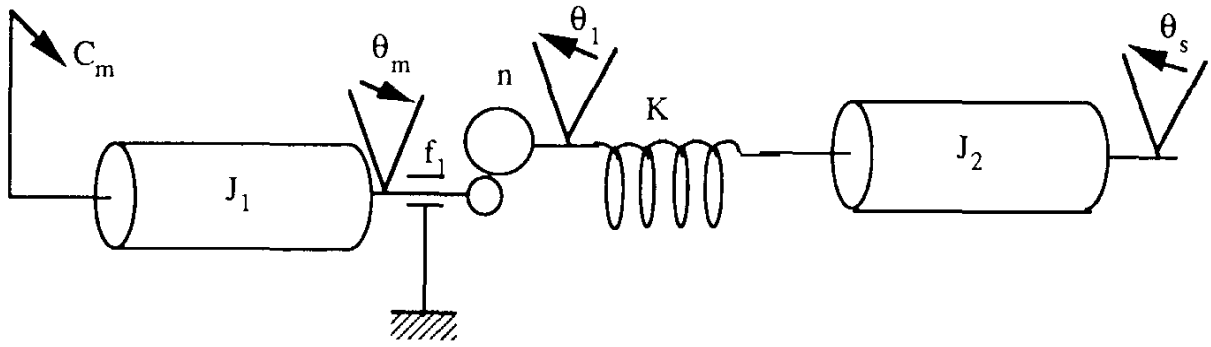
courant d'induit correspondant I_{Max} : 222,6A ; on dépasse les valeurs impulsionnelles max : soit on limite le courant d'induit et l'asservissement devient non linéaire, soit le moteur est soumis à une forte surcharge

→ dégats.

DEUXIEME PARTIE

II- 1 Influence de l'élasticité de la transmission

II-1-1



on décompose en éléments indéformables maintenus en équilibre.

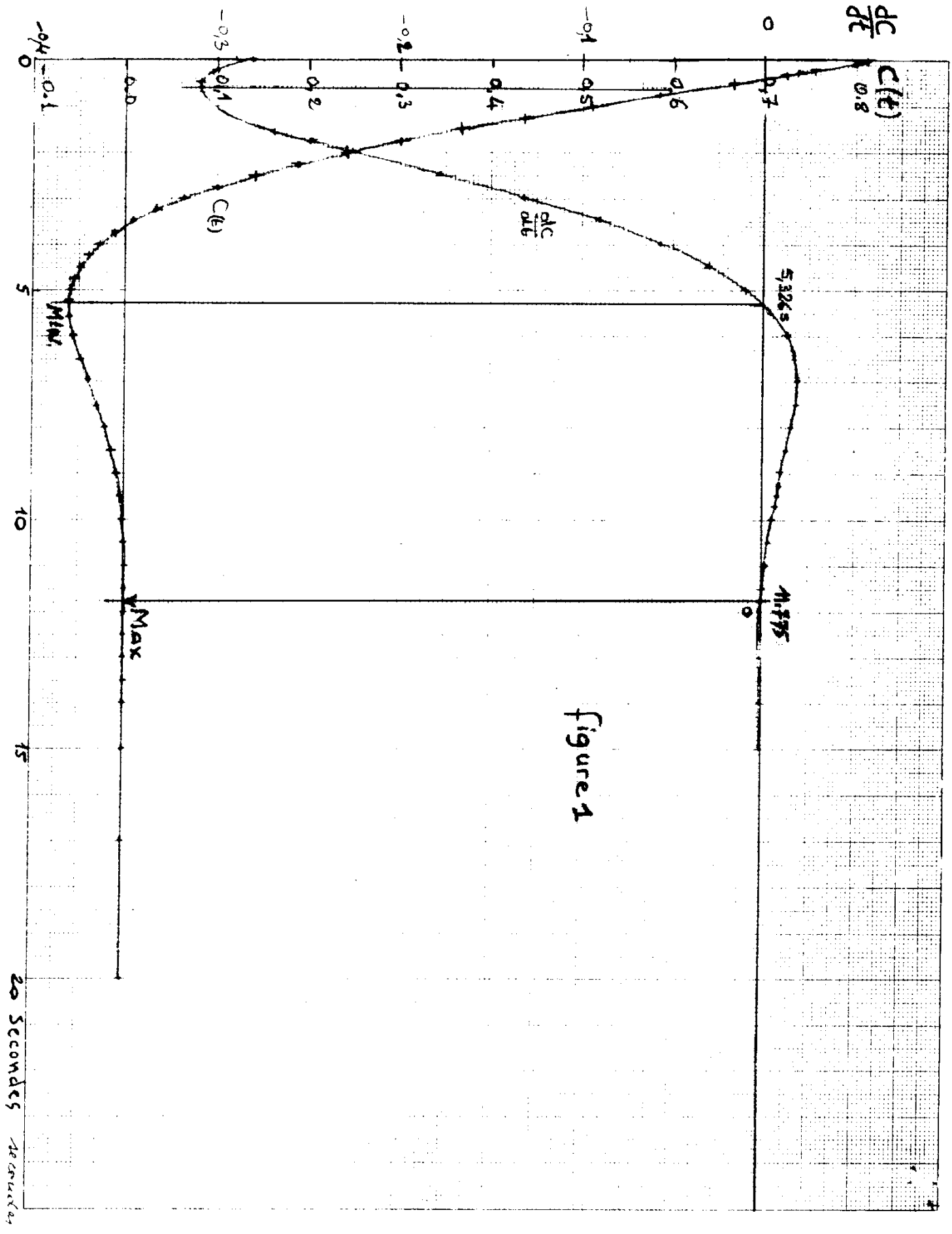
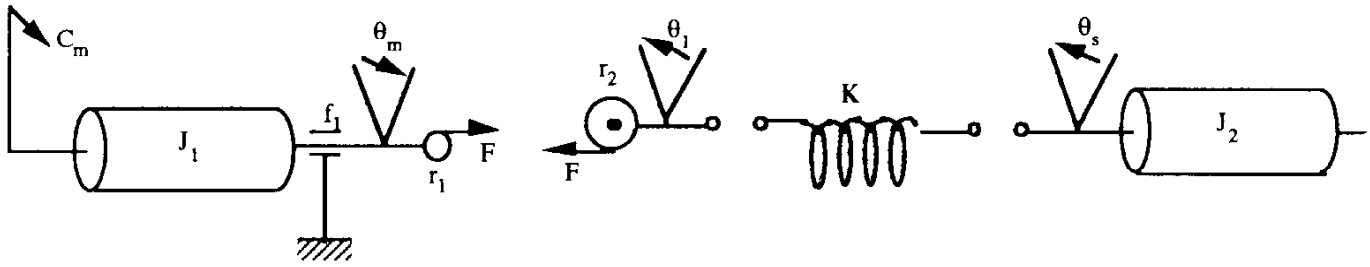


Figure 1



(1) $J_1\dfrac{d^2\theta_m}{dt^2}=C_m-f_1\dfrac{d\theta_m}{dt}-F_{r1} \quad \rightarrow J_1 p^2\theta_m+f_1 p\theta_m+F_{r1}=C_m$

(2) $F_{r2}=K(\theta_1-\theta_s) \quad \rightarrow F_{r2}=K(\theta_1-\theta_s)$

(3) $J_2\dfrac{d^2\theta_s}{dt^2}=K(\theta_1-\theta_s) \quad \rightarrow J_2 p^2\theta_s=K(\theta_1-\theta_s)$

(4) $\dfrac{\theta_1}{\theta_m}=n=\dfrac{r_1}{r_2} \quad \rightarrow \dfrac{\theta_1}{\theta_m}=n=\dfrac{r_1}{r_2}$

(2) $\rightarrow F=\dfrac{K(\theta_1-\theta_s)}{r_2}$

(1) $\rightarrow J_1 p^2\theta_m+f_1 p\theta_m+K(\theta_1-\theta_s)\dfrac{r_1}{r_2}=C_m \quad (1')$

(3) $\rightarrow \theta_1=\dfrac{J_2p^2\theta_s}{K}+\theta_s \qquad (3') \qquad \theta_s=\theta_1\dfrac{K}{K+J_2p^2}$

$(1')+(4) \quad \rightarrow J_1p^2\dfrac{\theta_1}{n}+f_1p\dfrac{\theta_1}{n}+Kn\theta_1-Kn\theta_S=C_m \quad (1'')$

$(1'')+(3') \quad \rightarrow \left\{\dfrac{J_1}{n}p^2\left(\dfrac{J_2p^2}{K}+1\right)+\dfrac{f_1}{n}p\left[\dfrac{J_2p^2}{K}+1\right]+Kn\left(\dfrac{J_2p^2}{K}+1\right)-Kn\right\}\theta_s=C_m$

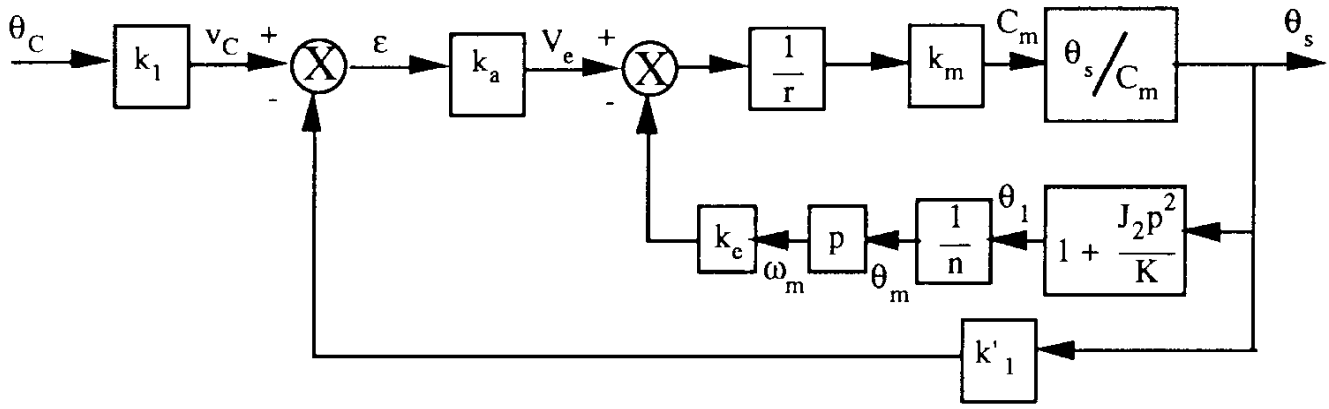
d'où $\dfrac{\theta_s(p)}{C_m(p)}=\dfrac{1}{\dfrac{J_1J_2}{nK}p^4+\dfrac{f_1J_2}{nK}p^3+\left(\dfrac{J_1}{n}+nJ_2\right)p^2+\dfrac{f_1}{n}p+\cancel{Kn}-\cancel{Kn}}$

Transmittance :

$$\boxed{\frac{\theta_s(p)}{C_m(p)}=\frac{nK}{J_1J_2p^4+f_1J_2p^3+K(J_1+n^2J_2)p^2+Kf_1p}}$$

AN : $\boxed{\dfrac{\theta_s}{C_m}=\dfrac{0,1}{p[9p^3+9p^2+1,9p+1]}}$

II-1-2 Schéma fonctionnel



(II-1-1, éq.(3')) $\rightarrow \theta_1(p) = \theta_s(p)\left[1+\frac{J_2p^2}{K}\right]$

(II-1-1 , éq.(4)) $\rightarrow \theta_m = \frac{\theta_1}{n}$

calcul de $\frac{\theta_s}{V_e}$. On pose $\frac{\theta_s(p)}{C_m(p)} = A(p) = \frac{nK}{J_1J_2p^4 + f_1J_2p^3 + K\left(J_1 + n^2J_2\right)p^2 + Kf_1p}$

$$\frac{\theta_s}{V_e} = \frac{\frac{k_m}{r}A(p)}{1+\frac{k_ep}{n}\left[1+\frac{J_2p^2}{K}\right]\frac{k_m}{r}A(p)} = \frac{nk_m}{\left(rf_1+k_ek_m\right)}\frac{1}{p\left[1+\frac{r\left(J_1+n^2J_2\right)}{rf_1+k_ek_m}p+\frac{J_2}{K}p^2+C(p)\right]}$$

$$C_{(p)} = \frac{rJ_1J_2p^3}{K\left(rf_1+k_ek_m\right)}$$

$$\boxed{\frac{\theta_s}{V_e} = \frac{nk_m}{\left(rf_1+k_ek_m\right)}\frac{1}{p\left[1+\frac{r\left(J_1+n^2J_2\right)}{rf_1+k_ek_m}p+\frac{J_2}{K}p^2+\frac{rJ_1J_2}{K\left(rf_1+k_ek_m\right)}p^3\right]}}$$

AN : $\boxed{\frac{\theta_s}{V_e} = T_{(p)} = \frac{6{,}918\times10^{-3}}{p\left[1+1{,}147p+9p^2+5{,}433p^3\right]}}$

on a $H(p) = \frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{k_1k_aT(p)}{1+k'_1k_aT(p)}$ pour $k'_1 = k_1$,

$$\boxed{\frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{1}{\frac{1}{k_1k_aT(p)}+1} = \frac{1}{1+p\frac{rf_1+k_ek_m}{nk_mk_1k_a}\left[1+\frac{r\left(J_1+n^2J_2\right)}{rf_1+k_ek_m}p+\frac{J_2}{K}p^2+\frac{rJ_1J_2p^3}{K\left(rf_1+k_ek_m\right)}\right]}}$$

$$\frac{\theta_s}{\theta_c} = \frac{1}{1+\frac{rf_1+k_ek_m}{nk_mk_1k_a}p+\frac{r\left(J_1+n^2J_2\right)}{nk_mk_1k_a}p^2+\frac{J_2\left(rf_1+k_ek_m\right)}{nk_mk_1k_aK}p^3\frac{rJ_1J_2}{nk_mk_1k_aK}p^4}$$

$$\text{AN} : \frac{\theta_s}{\theta_c}=\frac{1}{1+\frac{14,46}{k_a}p+\frac{16,58}{k_a}p^2+\frac{130,1}{k_a}p^3+\frac{78,53}{k_a}p^4}$$

II-1-3 $\theta_c(p)=\frac{0,1}{p}$

$$\theta_s(p)=\frac{0,1}{p}\text{x}\frac{1}{1+\frac{14,46}{k_a}p+\frac{16,58}{k_a}p^2+\frac{130,1}{k_a}p^3+\frac{78,53}{k_a}p^4}$$

$k_a = 7$

$$\theta_s(p)=\frac{0,1}{p}\text{x}\frac{1}{1+2,065p+2,368p^2+18,59p^3+11,22p^4}$$

factorisation du dénominateur :

$1 + 2,065\ p + 2,368\ p^2 + 18,59\ p^3 + 11,22\ p^4 = (p + 0,3383)\ (p + 1,574)\ [(p - 0,1278)^2 + 0,3887^2]$
un des pôles de H(p) est à partie réelle positive $\alpha = 0,1278$

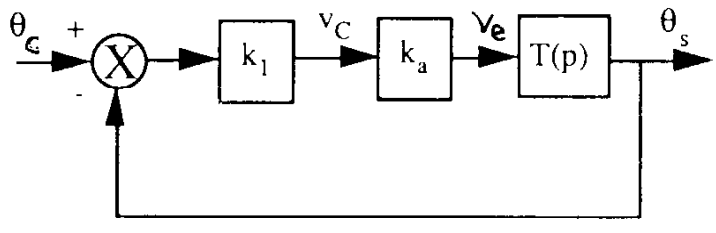
LE SYSTEME EST DONC INSTABLE

Vérification par ROUTH :

p^4	11,22	2,368	1	
p^3	18,59	2,065	0	
p^2	1,122	1	0	système instable
p^1	- 14,50	0	0	
p^0	1	0	0	

II - 1 - 4 Lieu des pôles de H(p)

Transmittance en B.O. : on précise que $H(p)=\frac{\theta_s}{\theta_c}$ et non $\frac{\theta_s}{V_c}$. Le système est donc à retour unitaire.



En boucle ouverte :

$$KG(p)=k_1k_aT(p)=\frac{k_1k_an\,k_m}{rf_1+k_ek_m}\;\frac{1}{p\left[1+\frac{r\left(J_1+n^2J_2\right)}{rf_1+k_ek_m}p+\frac{J_2}{K}p^2+\frac{rJ_1J_2}{K\left(rf_1+k_ek_m\right)}p^3\right]}$$

$$KG(p)=\frac{6{,}918\times10^{-2}\,k_a}{p\left[1+1{,}147\,p+9p^2+5{,}433p^3\right]}$$

Factorisation du dénominateur :

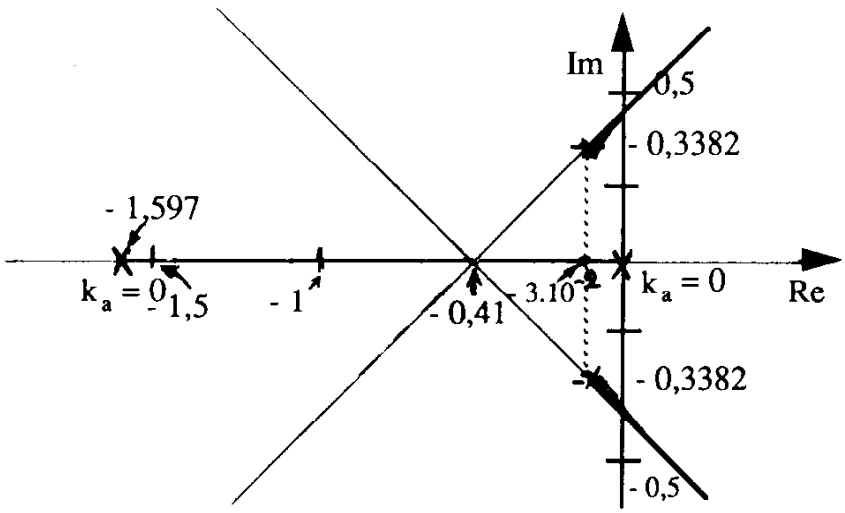
$$1 + 1{,}147p + 9p^2 + 5{,}433p^3 = (p + 1{,}597)\,[(p + 3 \times 10^{-2}) + 0{,}3382^2] \times 5{,}433$$

$$KG(p)=\frac{1{,}273\times10^{-2}\,k_a}{p(p+1{,}597)\left[\left(p+3.10^{-2}\right)^2+0{,}3382^2\right]}$$

Lieu des pôles :

Pt. de concours des asymptôtes :

$$\frac{-1{,}597-2\times3\times10^{-2}}{4}=-0{,}4143$$



Intersection avec l'axe imaginaire :

$$1 + KG(j\omega) = 0$$

$$1+\frac{1{,}273\times10^{-2}\,k_a}{j\omega\left[1+1{,}147\,j\omega-9\omega^2-5{,}433\,j\omega^3\right]}=0$$

soit : $j\omega - 1{,}147\omega^2 - 9j\omega^3 + 5{,}433\omega^4 + 1{,}273 \times 10^{-2}\,k_a = 0$

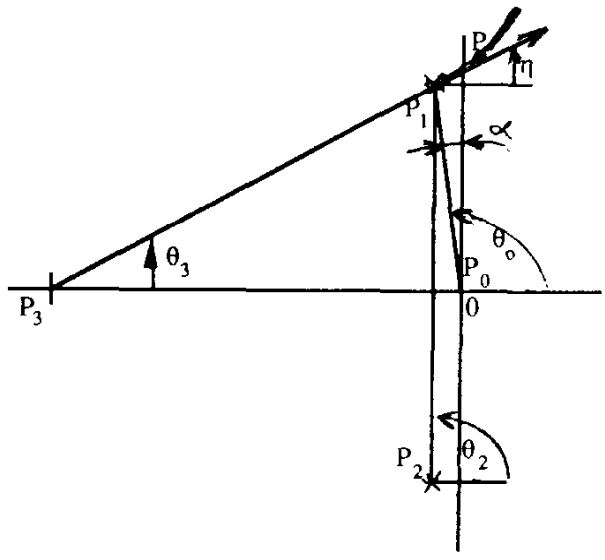
$\omega\,(1 - 9\omega^2) = 0$

$\omega^2\,[5{,}433\omega^2 - 1{,}147] + 1{,}273 \times 10^{-2}\,k_a = 0$

solutions : $\omega = 0 \Rightarrow k_a = 0$

$$\omega=\frac{1}{3}\Rightarrow k_a=4{,}742$$

Tangentes aux points de départ complexes ($p = -3.10^{-2} \pm j\ 0{,}3382$)



$-\arg(p - p_o) - \arg(p - p_1) - \arg(p - p_2) - \arg(p - p_3) = \pi + 2\lambda\pi$

soit $\arg(p - p_O) + \arg(p - p1) + \arg(p - p2) + \arg(p - p3) = \pi + 2(\lambda - 1)\pi$

θ_0 η $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ θ_3

$$\eta = \pi - \frac{\pi}{2} + 2(\lambda - 1)\pi - \theta_0 - \theta_3$$

$$\eta = -\left(\theta_0 \frac{\pi}{2}\right) - \theta_3 + 2(\lambda - 1)\pi = -(\alpha + \theta_3) + 2(\lambda - 1)\pi$$

$\theta_3 = 12°$ (voir lieu des pôles sur papier millimétré fig 2)

$\alpha = 5°$ (voir lieu des pôles sur papier millimétré)

d'où $\eta = -17°$ à $2k\pi$ près. Ce qui explique l'intersection à $\omega = \pm \frac{1}{3}$ avec un départ à $\pm 0{,}3382$

Point de séparation sur l'axe réel :

$$1 + KG(p) = 0 \quad \text{ou} \quad G(p) = -\frac{1}{K}$$

$$\frac{d}{d\alpha} G(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\alpha + 1{,}147\alpha^2 + 9\alpha^3 + 5{,}433\alpha^4}\right] = 0$$

soit : $1 + 2{,}294\ \alpha + 27\ \alpha^2 + 21{,}73\ \alpha^3 = 0$

$\alpha = -1{,}186$

$$-\frac{1}{K} = -0{,}2606 \quad \Leftrightarrow K = 3{,}837 = 6{,}918 \times 10^{-2} k_a$$

d'où $k_a = 55{,}47$ pour $\alpha = -1{,}186$

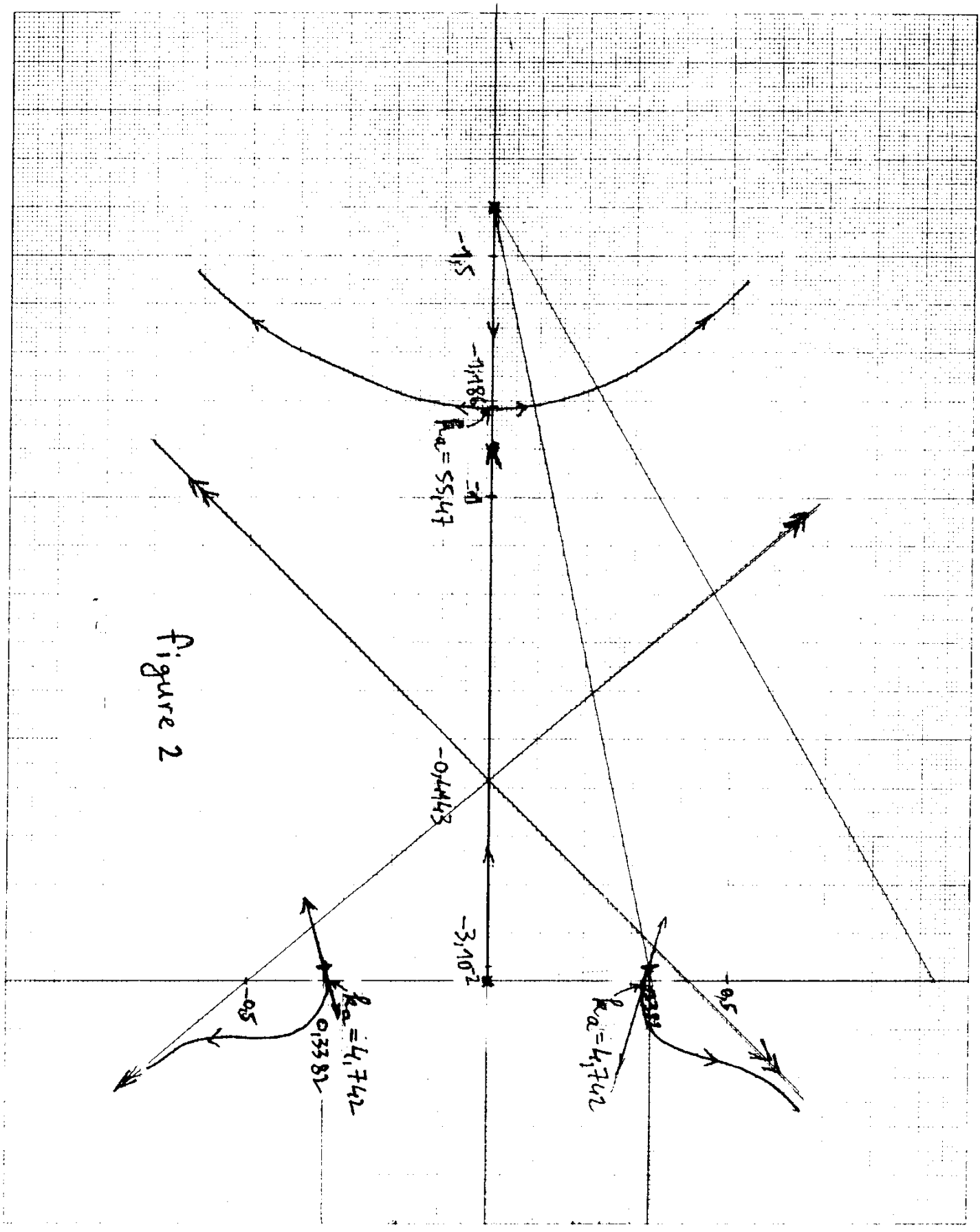
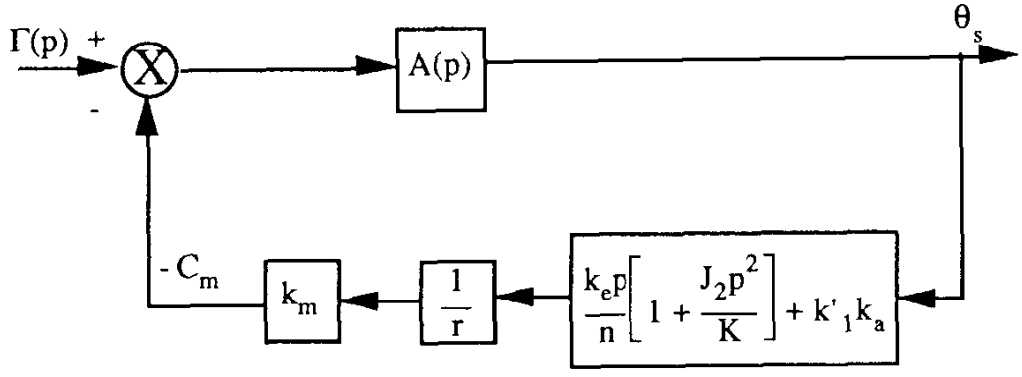


figure 2

on réduit la boucle secondaire :



II - 2 - 3 Transmittance $\frac{\theta_s}{\Gamma}$

$$\frac{\theta_s}{\Gamma}=\frac{A(p)}{1+\frac{k_m}{r}\left[\frac{k_e p}{n}\left(1+\frac{J_2 p^2}{K}\right)+k'_1 k_a\right]A(p)}=\frac{1}{\frac{1}{A(p)}+\frac{k_m}{r}\left[\frac{k_e p}{n}\left(1+\frac{J_2 p^2}{K}\right)+k'_1 k_a\right]}$$

II - 2 - 4 $\Gamma_{(p)}=\frac{\Gamma_0}{p}$

$$\underbrace{\lim_{t\to\infty}}\theta_s(t)=\theta_0+\underbrace{\lim_{p\to 0}}\, p\theta_s(p)=\underbrace{\lim_{p\to 0}}\, p\frac{\Gamma_0}{p}\frac{1}{\frac{1}{A(p)}+\frac{k_m}{r}\left[\frac{k_e p}{n}\left(1+\frac{J_2 p^2}{K}\right)+k'_1 k_a\right]}$$

(si elle existe)

$\underbrace{\lim_{p\to 0}}\frac{1}{A_{(p)}}=0$ à cause de l'intégration

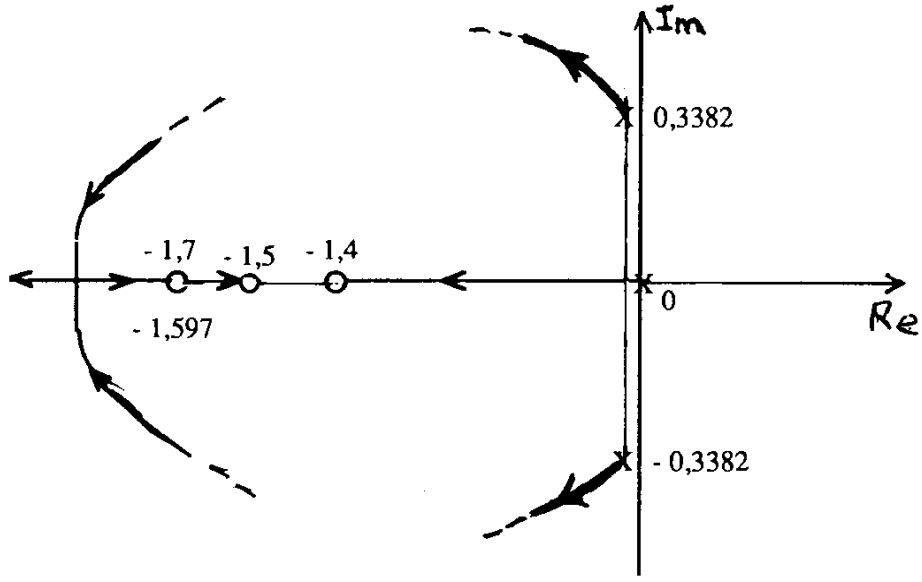
donc $\underbrace{\lim_{t\to\infty}}\theta_s(t)=\theta_0+\frac{r\Gamma_0}{k_m k'_1 k_a}=\theta_0+0{,}8726\frac{\Gamma_0}{k_a}$

AN : $\theta_{s\infty}=\frac{8{,}726}{k_a}$

II - 2 - 5 $\theta_{s\infty}=10^{-2}\geq\frac{8{,}726}{k_a}$ d'où $k_a\geq 872{,}6$

Le système est instable

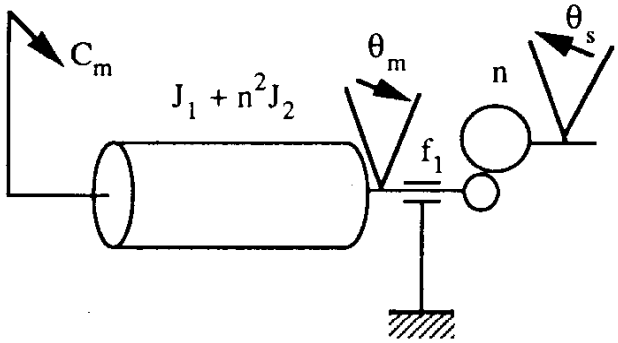
II - 2 - 6 Adjonction de 3 zéros en B.O., situés, un au-delà de -1,6, les 2 autres entre 0 et 1,6 (d'autres dispositions sont possibles)

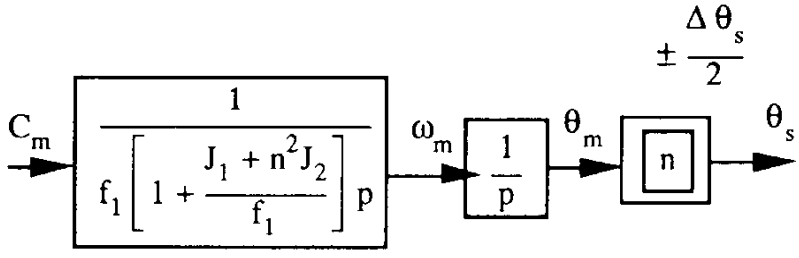


II - 2 - 7 L'adjonctionde 3 zéros conduit à une dérivation d'ordre 3, d'où un bruit beaucoup trop important

II - 2 - 8 Système couronne-vis sans fin

II-2-8-1





II-2-8-2

Si Cm > o, $\theta_s = n\theta_m - \frac{\Delta\theta_s}{2}$

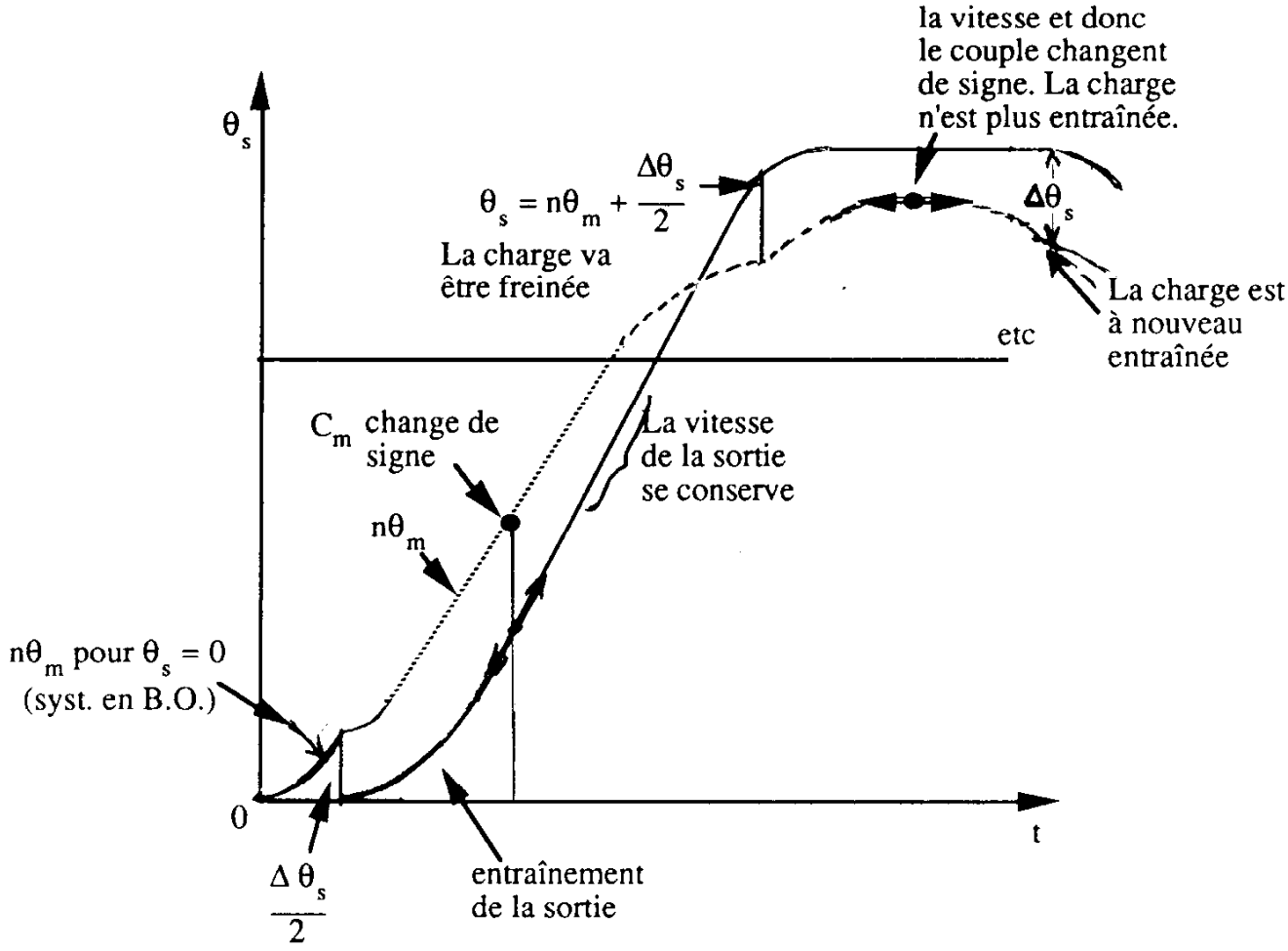
(charge entrainée)

Si Cm < o, $\theta_s = n\theta_m + \frac{\Delta\theta_s}{2}$

(entrainement par la charge)

Régime intermédiaire : $|\theta_s - n\theta_m| < \frac{\Delta\theta_s}{2} \Rightarrow \frac{d\theta_s}{dt} = \text{constante } \forall \frac{d\theta_m}{dt}$

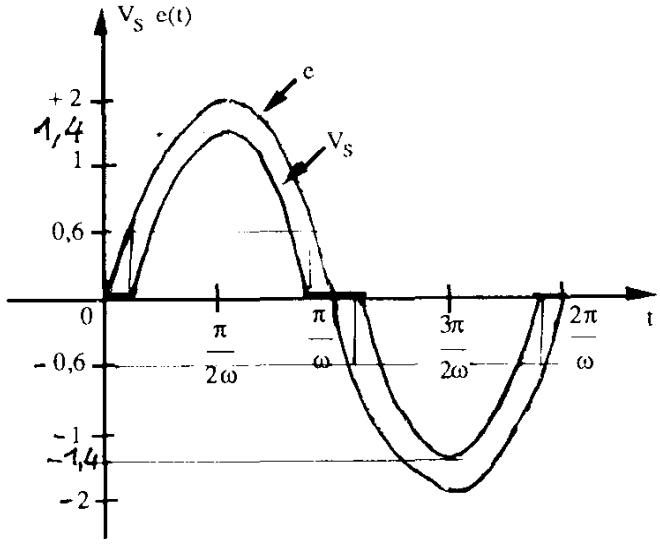
Allure de la sortie en réponse à un échelon d'entrée :



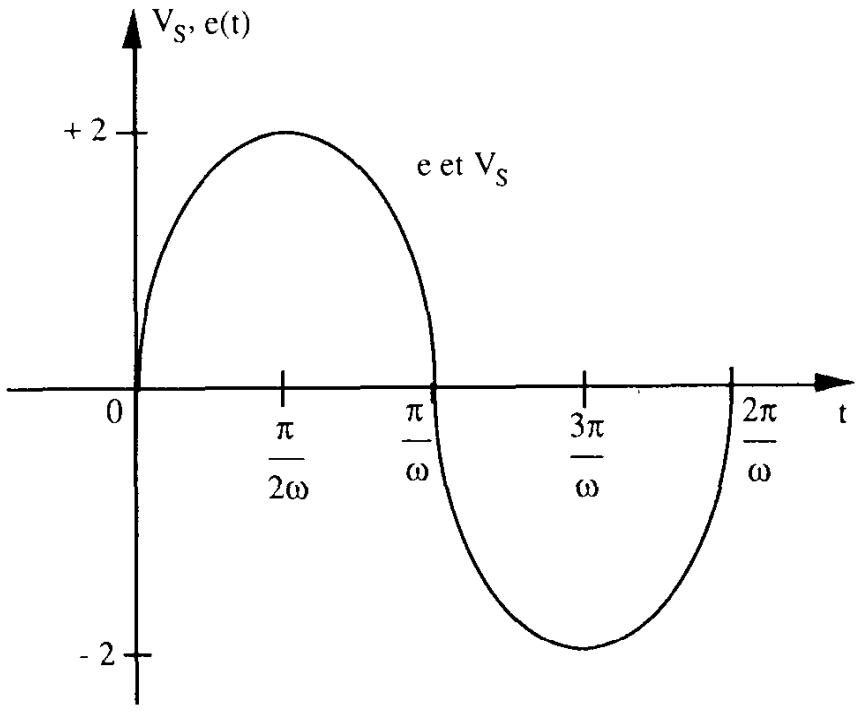
TROISIEME PARTIE

III - 1 Etudes préliminaires

III-1-1



III-1-2



III-1-3 Lorsque e augmente, la tension aux bornes de R (associée à D_1) diminue ainsi que le courant qui la parcourt. Par contre le courant de base de T_1 augmente. Lorsque $I_R = I_{B_1} = I_{B_1}max$, D_1 est bloquée et e(t) n'est plus transmise.

Soit V_S max la tension de sortie correspondante.

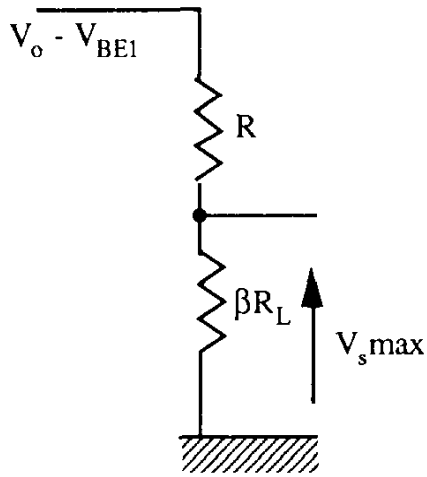
on a : $V_S\,max = R_L I_{E_1} max = R_L \beta I_{B_1} max$

$$V_o = R I_{B_1 max} + V_{BE_1} + R_L \beta I_{B_1 max}$$

$$\text{d'où} \quad I_{B_1\,max} = \frac{V_0 - V_{BE1}}{R + \beta R_L}$$

et $V_{s\,max} = R_L \beta \dfrac{V_0 - V_{BE1}}{R + \beta R_L} = \dfrac{R_L \beta}{R + R_L \beta} (V_o - V_{BE1})$

que l'on peut mettre sous forme de diviseur de tension :



III - 1 - 4

$$V_{s\,max} = \pm (V_0 - V_{BE}) \frac{\beta R_L}{R + \beta R_L} = \pm 26{,}7 \text{ volts}$$

III - 1 - 5

$$P_{L\,max} = \frac{\left(\dfrac{V_{s\,max}}{\sqrt{2}}\right)}{3} = \frac{\dfrac{(V_0 - V_{BE1})^2}{2(R + \beta R_L)^2} (\beta R_L)^2}{3} = \frac{\dfrac{29{,}4^2 \times 300^2}{2 \times (30 + 300)^2}}{3} = 119{,}1 \text{ W}$$

III - 1 - 6 $\quad V_{R(t)} = (30 - 0{,}6) - 26{,}7 \sin \omega t = 29{,}4 - 26{,}7 \sin \omega t$

III - 1 - 7 Pour une résistance, $P_R = \dfrac{V^2_{R(t)}}{R} = \dfrac{1}{R 2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} (29{,}4 - 26{,}7 \sin \theta)^2 \, d\theta$

$$P_R = \frac{29{,}4^2}{R} + \frac{26{,}7^2}{2R} = 40{,}7 \text{ watts}$$

d'où la puissance fournie par les alimentations : 81,4 watts (aux résistances R)

III - 1 - 8 on a $V_{CE} = V_c - V_E = 30 - 26{,}7 \sin \omega t$

III - 1 - 9 Entre o et $\frac{T}{2}$, on a $I_c \# I_e = \frac{v_s}{R_L} = \frac{26,7 \sin \omega t}{3} = 8,9 \sin \omega t$

Entre $\frac{T}{2}$ et T, on a $I_c = I_e = 0$

III - 1 - 10

$$P_{T_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{CE}(t) I_c(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (30 - 26,7 \sin\theta) 8,9 \sin\theta \, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (30 - 26,7 \sin\theta) x 0 x d\theta$$

$$P_{T_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 267 \sin\theta \, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 237,6 \sin^2\theta \, d\theta = \frac{-267}{2\pi} \cos\theta \Big|_0^{\pi} - \frac{237,6}{2x2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$P_{T_1} = \frac{267}{\pi} - \frac{237,6}{4\pi} \theta \Big|_0^{\pi} + \frac{237,6}{4\pi} \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\pi} = \frac{267}{\pi} - \frac{237,6}{4} = 25,6 w$$

III - 1 - 11 $\rho = \frac{P_L}{P_{tot}} = \frac{P_L}{2P_R + 2P_{T_1} + P_L} = 0,473$ soit 47,3 %

III - 1 - 12 $R_e = R//R//\beta R_L$ soit $R_e = 14,3\ \Omega$

III - 1 - 13 $i_e = \frac{e}{R_e} = \frac{26,7 \sin \omega t}{14,3} = 1,87 \sin \omega t$

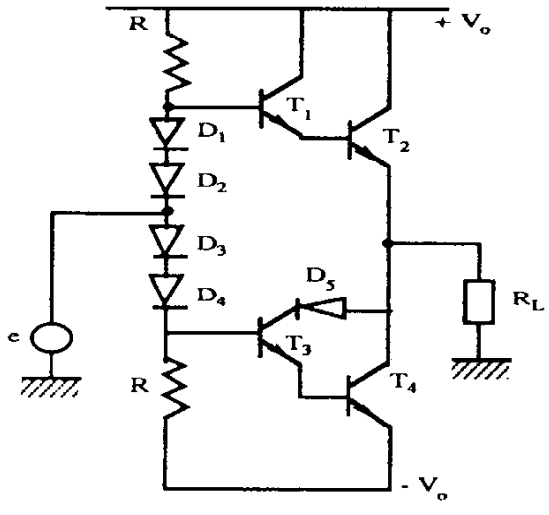
III-2 Etude d'un montage plus performant

III - 2 - 1

$$\begin{cases} V_s \max = (V_0 - V_{BE1}) \dfrac{R_L \beta}{R + R_L \beta} \\ R_e = R//R//\beta R_L \quad R = 30\Omega \ ; \beta R_L = 300\Omega \end{cases}$$

Pour augmenter R_e, il faut augmenter R. Ce faisant, si on ne veut pas modifier V_{Smax}, il faut augmenter βR_L, donc β.

III - 2 - 2 On utilise un montage Darlington NPN et un PNP composite.



D_5 permet de symétriser le montage. On peut la supprimer en même temps que l'une des diodes D_3 ou D_4.

La dynamique de sortie est diminuée à cause des 2 V_{BE} en série (T_1 T_2 et D_5 T_3)

III - 2 - 3 Considérons par exemple T_1 : si θ augmente, V_{BE1} de seuil diminue et comme la tension de seuil de la diode D_1 reste à peut près constante, I_{b1} augmente. Le courant de collecteur I_{C1} augmente, d'autant plus que β augmente avec la température, ce qui augmente d'autant plus la température du transistor T_1. Il y a risque d'emballement.

III - 2 - 4 Emballement thermique

III-2-4-1 $V_{D1} + V_{BE1} + R_E I_{E1} + R_L I_S = 0$

$I_S = I_{E1} + I_{E2}$ # o si le montage est symétrique.

Il reste $V_{D1} + V_{BE1} + R_E I_{E1} = 0$

soit, en considérant I_{E1} # I_{C1} : $V_{D1} + V_{BE1} + R_E I_{C1} = 0$

En dérivant par rapport à θ_j :

$$\frac{dV_{D1}}{d\theta_j} + \frac{dV_{BE1}}{d\theta_j} + R_E \frac{dI_c}{d\theta_j} = 0$$

Comme $\frac{dV_{BE1}}{d\theta_j} = -2.10^{-3}\ V.degre^{-1}$ et $\frac{dV_{D1}}{d\theta_j} = 0$

il vient : $\frac{dI_c}{d\theta_j} = \frac{2.10^{-3}}{R_E}$ soit : $\boxed{dI_c = \frac{2.10^{-3}}{R_E}\, d\theta_j}$

III-2-4-2

Loi d'ohm thermique :

$\theta_j - \theta_a = R_{thja} P$ soit en différenciant : $d\theta_j = R_{thja}\, dP$

P # $V_{CE} I_C$ d'où $dP = V_{CE} dI_C + I_C dV_{CE}$

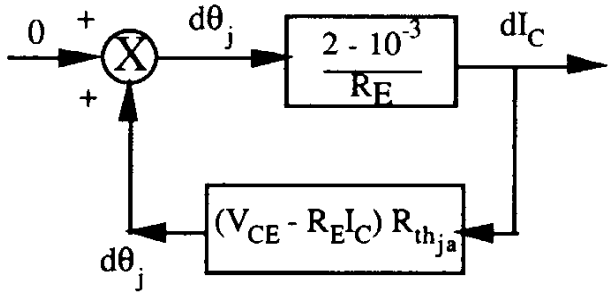
$V_{CE1} = V_o - R_{E1} I_{E1} - R_L (I_{E1} + I_{E2}) = V_o - R_{E1} I_{E1}$ en considérant I_{E1} et I_{E2} égaux et opposés.

d'où dV_{CE1} # $- R_{E1}\, dI_{C1}$

et $dP = V_{CE} dI_c - R_E I_c dI_c = (V_{CE} - R_E I_c)\, dI_c$

donc $\boxed{d\theta_j = R_{thja} (V_{CE} - R_E I_C) dI_C}$

III-2-4-3



Stabilité si $\frac{2.10^{-3}}{R_E}(V_{CE} - R_E I_C) R_{thja} < 1$

soit : $\left[\frac{2.10^{-3}}{R_E} V_{CE} - 2.10^{-3} I_C\right] R_{thja} < 1$

Au repos, I_C est de quelques milliampères donc on a à peu près $\frac{2.10^{-3}}{R_E} V_{CE}\ R_{thja} < 1$

soit $R_E > 2.10^{-3}\ V_{CE} \times R_{thja}$

III-2-4-4

$R_E > 2.10^{-3} \times 30 \times 2 = 120 \times 10^{-3} = 0{,}12\ \Omega$ on prendra par exemple $0{,}25\Omega$

III-2-5 Montage définitif

III-2-5-1 Gain en tension de l'ampli de puissance voisin de 1
$\rightarrow V_{CC} = \pm 30$ volts (en ne tenant pas compte des $V_{CE\ sat}$)

III-2-5-2 Gain $\frac{v_s}{v_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

III-2-5-3 R_3 = stabilité thermique de T_1 et surtout évacuation du courant I_{CB0} de T_2 lorsque T_1 est bloqué.

R_4 = stabilité thermique de T_2
R_5 = stabilité thermique de T_3
R_6 = stabilité thermique de T_4
R_7 = évacuation de I_{CBO} de T_4 lorsque T_3 est bloqué.

III-2-5-4

Par rapport à l'étude faite, ou prendra par exemple $R_4 = R_6 = 0{,}25\Omega$
R_5 = 100 à 200 Ω (car R_{thja} correspondante est beaucoup plus grande que pour T_2 ou T_4)
$R_3 = R_7$ = 100 à 200 Ω (il ne faut pas que le courant I_{CB0} max rende le transistor correspondant conducteur.

III-2-5-5 Diodes de "roue libre" protègent les transistors T_1 et T_2 en assurant la continuité des courants lors des régimes transistoires en cas de charge selfique.
Ces diodes doivent être rapides.

Agrégation

(Concours Interne)

OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercices d'application :
Options Physique Appliquée - Session : 1994

Option : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

CORRECTION DU SECOND PROBLÈME

I1 Les expressions et les valeurs de L_s , L_r et σ sont :

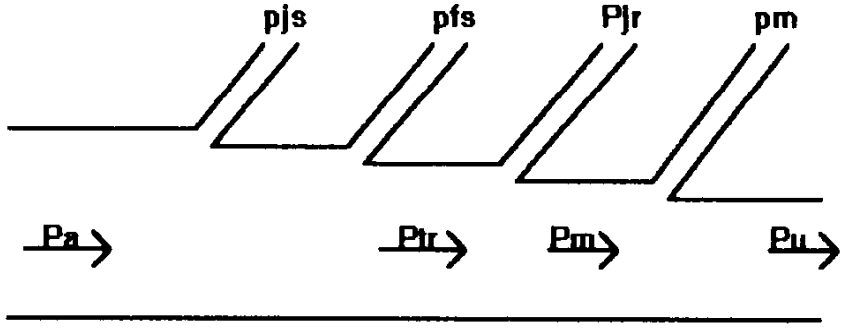
$L_s=L_m+l_s= 8.115$ mH ; $L_r=L_m+l_r= 8.085$ mH ; $\sigma = 1- L_m^2/L_rL_s =0.024$.

I2 La non-saturation du circuit magnétique de la machine implique la constance de L_m donc de L_s et de L_r , elle permet d'additionner les flux magnétiques et donc d'établir les schémas équivalents utilisés dans la suite.

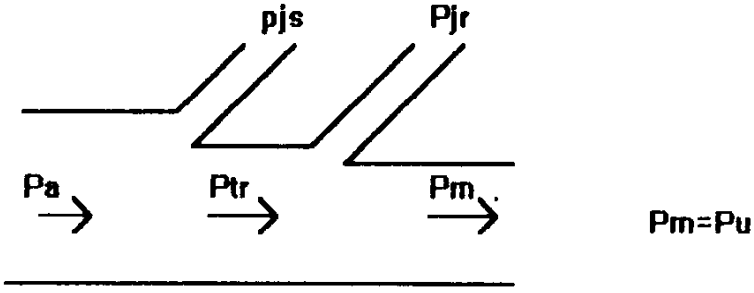
I31 N est l'inductance de fuite globalisée ramenée au rotor ; L est l'inductance magnétisante : le courant qui la traverse permet de déterminer le flux résultant statorique:

$L=L_s= 8.115$mH ; $N=\sigma L_r(L_s/L_r)^2= 204$ µH ; $R=R_r(L_s/L_r)^2 = 11.85$mΩ .

I32 Le bilan de puissance se représente de la façon suivante:



où Pa est la puissance électrique absorbée , Ptr la puissance transmise au rotor , Pm la puissance mécanique , Pu la puissance mécanique utile , pjs les pertes Joule stator , pfs les pertes fer stator ,Pjr les pertes Joule rotor , et pm les pertes mécaniques .Ce bilan se simplifie de la façon représentée ci-dessous en tenant compte des hypothèses simplificatrices.



Les relations entre les différentes puissances sont:

$Ptr=Pa-pjs$; $Pm=Ptr-Pjr$; $Pjr = g\,Ptr$; $Pm=(1-g)Ptr$; $pjs=3RI^2$; $P_a=3VI\cos\varphi$.

I33 Suivant les différentes valeurs de g on obtient, sachant que les pertes Joule rotor sont toujours positives :

$0<g<1$	$P_{tr}>0$, $P_m>0$, $P_a>0$	fonctionnement moteur
$g>1$	$P_{tr}>0$, $P_a>0$, $P_m<0$	fonctionnement frein (mais pas génératrice).
$g<0$	$P_{tr}<0$, $P_a<0$, $P_m<0$	fonctionnement frein et génératrice hypersynchrone.

I34 La relation est $\underline{E_s}=j\omega_s\underline{\Phi_s}$ $E_s=\omega_s\Phi_s$ en module .

I35 En considérant la pulsation rotorique comme une grandeur positive , $\omega_r=|g|\omega_s$, on obtient

$g>0$	$\omega_s=\omega_r+p\Omega$	fonctionnement moteur
$g<0$	$\omega_s=-\omega_r+p\Omega$	fonctionnement génératrice hypersynchrone.

I36a

$$C\Omega_s = P_{tr} = 3\frac{R}{g}I_r^2 = 3E_s^2\frac{R/g}{R^2/g^2+N^2\omega_s^2} \Rightarrow C = 3p\frac{E_s^2}{\omega_s^2}\frac{R\omega_r}{R^2+N^2\omega_r^2} = 3p\Phi_s^2\frac{R\omega_r}{R^2+N^2\omega_r^2}$$

pour le tracé on remplace ω_r par ω_s-$p\Omega$.

I36b Voir graphe en annexe. E_S=215 V ω_S=628 rd/s Φ_S= 0.342 V $rd^{-1}s^{-1}$. Valeurs caractéristiques :

$\omega_{rmax}=R/N$=58.1 rd/s Ω_{max}=285 rd/s $C_{max}=3p\omega_r\Phi_s^2/2R$=1722 Nm
C_d=couple de démarrage= 315 Nm

I36c A Φ_S=constante ,la caractéristique $C=f(\Omega)$ se translate parallèlement à l'axe des abcisses Ω.
E_S=107.5 V f_S=50 Hz Φ_S=0.342 V $rd^{-1}s^{-1}$= constante .Voir graphe joint en annexe.

I36d Si on néglige les fuites magnétiques , N=0 , $C=3p\Phi_S^2\omega_r/R=3p\Phi_S I_r$ .La caractéristique mécanique est une droite ,la machine ne présente plus de couple de décrochage.Ces résultats sont les mêmes que ceux obtenus pour la machine à courant continu .

I37a Les longueurs des différents vecteurs de Fresnel sont : $I_m=E_S/L\omega_S$=42.2 A ;

$$I_r = \frac{E_s}{\sqrt{R^2/g^2+N^2\omega_s^2}}=380A \text{ ; } \tan\varphi_r=0.232 \text{ ; } I = \frac{E_s\left|jN\omega_s+jL\omega_s+R/g\right|}{\left|jL\omega_s(R/g+jN\omega_s)\right|}=392A \text{ ; } R_SI=6.03A$$

$$V = \left|\frac{(RR_s/g)-LN\omega_s^2+j(L+N)\omega_sR_s+(R/g)L\omega_s}{R/g+j(L+N)\omega_s}\right| I = 220.7V$$ .Voir graphe en annexe.

I37b Lorsque Φ_S=constante ,un couple constant équivaut à ω_r=constante.Dans ces conditions les impédances du schéma équivalent $N\omega_s$,$L\omega_S$ et $R/g=R\omega_S/\omega_r$ sont proportionnelles à ω_s ,et E_S est proportionnelle à ω_S , les courants I_m , I_r , et I sont donc constants . Voir graphe en annexe.
Le diagramme des courants est inchangé .Le diagramme des tensions est modifié,la chute de tension aux bornes de $R_S$est relativement plus importante. R_SI=6.02V ; E_S=21.5V ; V=27.3V .

I37c $$\underline{E_s} = \underline{V}\frac{(jN\omega_s+R/g)jL\omega_s}{R_s(j(L+N)\omega_s+R/g)+(jN\omega_s+R/g)jL\omega_s}$$; $\Phi_S=E_S/\omega_S$;

$$V^2 = \frac{\Phi_s^2}{L^2}\left[\frac{(RR_s-NL\omega_s\omega_r)^2+(R_s(L+N)\omega_r+RL\omega_s)^2}{(N\omega_r)^2+R^2}\right]$$

Application numérique: Φ_S=0.342V/rd/s ω_r=13.9rd/s implique V=220V (I37a)
ω_r=13.9rd/s implique V=27.3V(I37b).

I41 l est l'inductance de fuite globalisée ramenée au stator .L' est l'inductance magnétisante , le courant qui la traverse permet d'obtenir le flux résultant rotorique Φ_r.
$L'=(1-\sigma)L_S$=7.916mH ; $l=\sigma L_S$=198.8µH ; $R'=(L_m/L_r)^2R_r$=11.28mΩ .

I42 $\underline{E}_r=j\omega_S\underline{\Phi}_r$ en module $E_r=\omega_S\Phi_r$

I43a $$C=\frac{3p}{\omega_s}\frac{R'}{g}I_r'^2=\frac{3p}{\omega_s}\frac{R'}{g}\frac{(L'\omega_s)^2}{(R'/g)^2+(L'\omega_s)^2}I^2=3pI^2L'^2\frac{R'\omega_r}{R'^2+L'^2\omega_r^2}$$
pour le tracé on remplace ω_r par ω_S-pΩ .

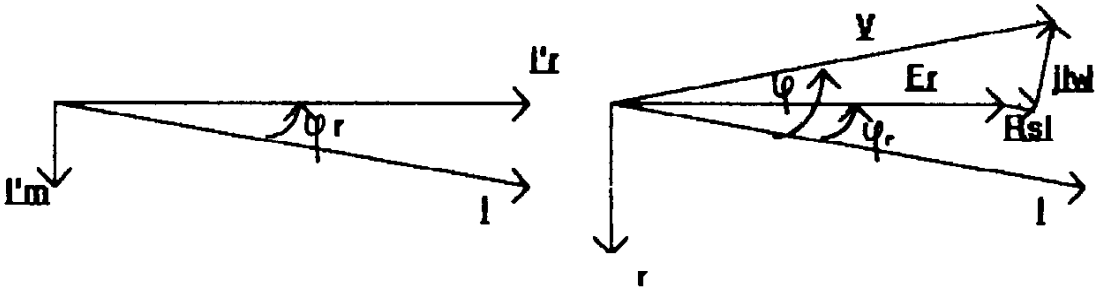
I43b Voir graphe en annexe.Les points caractéristiques sont:
$\omega_{rmax}=R'/L'=R_r/L_r=1/\tau_r$=1.425rd/s ; $C_{max}=3pI^2L'^2\omega_r/2R'$=3799Nm
Ω_{max}=313.4rd/s ; C_d=17.24Nm.

I43c La caractéristique est translatée parallèlement à l'axe des abcisses Ω .Elle existe pour ω_S=0 et correspond à une alimentation en courant continu utilisée en freinage par beaucoup de convertisseurs. Voir graphe en annexe.

I43d L'expression de Φ_r $\Phi_r=E_r/\omega_S$; $\underline{E}_r=jL'\omega_S\underline{I}'_m$;
$$\Phi r=LI\frac{R'/g}{\sqrt{(R'/g)^2+(L'\omega_s)^2}}=LI\frac{R'}{\sqrt{R'^2+L'^2p^2(\Omega_s-\Omega)^2}}$$ .Voir tracé du graphe en annexe.
La commande en courant ne permet pas de contrôler le flux rotorique .Celui-ci n'existe que pour un intervalle de Ω très étroit ,ce qui explique la caractéristique de couple.

I44a On exprime la puissance électromagnétique P_e. $P_e=3E_rI'_r=3\omega_S\Phi_SI'_r$.On en déduit le couple électromagnétique $C=3p\Phi_rI'_r=3pL'I_mI_r$ .Comme pour la machine à courant continu le couple est égal au produit d'un flux et d'un courant .Φ_r est l'équivalent du flux inducteur de la machine à courant continu et il est controlé par le courant I'_m et I'_r est l'équivalent du courant induit. Pour contrôler le couple en régime permanent, il faut contrôler Φ_r ,c'est à dire I'_m , et I'_r.

I44b $$I'_r=I\frac{L'\omega_r}{\sqrt{R'^2+L'^2\omega_r^2}}$$=328A ; $$I'_m=I\frac{R'}{\sqrt{R'^2+L'^2\omega_r^2}}$$=36.5A ; $E_r=R'I'_r\omega_S/\omega_r$=205V
R_SI=5.1V ; $l\omega_SI$=47V ;
$$\cos\varphi=\frac{E_r\cos\varphi_r+R_sI_s}{V}$$=0.949

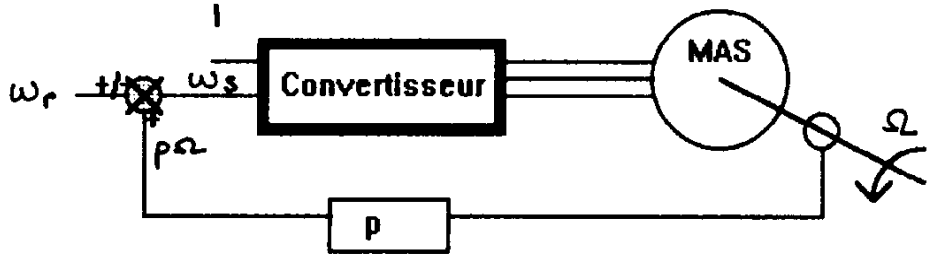


I44c $\cos\varphi_r=I'_r/I$; $\sin\varphi_r=I'_m/I$; $\tan\varphi_r=L'\omega_r/R'=\tau_r\omega_r$.

I44d L'expression du couple électromagnétique devient :
$C=\frac{3p}{\omega_s}LTI'_mI'_r=\frac{3}{2}pLT^2\sin 2\varphi_r$ .Il est maximal pour la valeur $\varphi_r=\pi/4$;alors $\tan\varphi_r=1$ et $\omega_r=1/\tau_r$.
A couple donné la valeur efficace de I est minimale pour cette valeur de ω_r.

I44e Application numérique : C=563 Nm .

I44f En régime permanent , le couple électromagnétique est imposé par les valeurs de I et ω_r : on dit alors qu'il y a autopilotage fréquentiel. Le schéma fonctionnel permettant de réaliser cette commande est:



Le fonctionnement moteur correspond au signe + sur l'opérateur de sommation de ω_r et $p\Omega$ .Le fonctionnement génératrice correspond au signe - .

II11a Voir document réponse en annexe

II11b $I=\sqrt{\frac{2}{3}}I_0$=345A ; $I_n=\frac{2}{\pi}I_0\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin(n\theta)d\theta\Rightarrow\hat{I}_n=\frac{4I_0}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{6}$ si n=2k+1 et $\hat{I}_n$=0 si n=2k

$\hat{I}_1=\sqrt{3}\frac{2I_0}{\pi}\Rightarrow I_1=I_0\frac{\sqrt{6}}{\pi}=330A\left(\hat{I}_1=467A\right)$

II11c Voir document réponse en annexe . $\overline{U}_m=\frac{3\sqrt{6}V}{\pi}\cos\varphi$

II11d La puissance P a pour expression $P=3VI_1\cos\varphi=3VI_0\frac{\sqrt{6}}{\pi}\cos\varphi$; cas d'une tension sinusoïdale et d'un courant non-sinusoïdal.

II11e La puissance P_a a pour expression $P_a=\overline{U}_mI_0$; cas d'une grandeur constante , ici I_0.

II11f P>0 si $-\frac{\pi}{2}\prec\varphi\prec+\frac{\pi}{2}$ alors P_a>0 et U_m>0 ;

P<0 si $+\frac{\pi}{2}\prec\varphi\prec\frac{3\pi}{2}$ alors P_a<0 et U_m<0 ;

Côté machine l'échange de puissance est lié au cos φ et côté "continu" l'échange de puissance est lié au signe de U_m .Le convertisseur est réversible .

II11g Voir document réponse en annexe.La tension d'amorçage vaut $-\sqrt{6}V\sin\varphi$ et la tension de blocage est $\sqrt{6}V\sin\varphi$. Suivant le signe de φ, on peut choisir
φ<0 commande à l'amorçage et blocage spontané => utilisation de thyristors
φ>0 commande au blocage et amorçage spontané => utilisation de thyristor diode dual .
Dans le cas précédemment étudié φ>0 , on ne pourra utiliser des thyristors qu'après modification de la structure du convertisseur.
II12a Voir document réponse en annexe.

II12b On calcule l'amplitude de l'harmonique n de la façon suivante:

$$\hat{I}_n = \frac{2}{\pi} I_0 \int_{\pi/6-\alpha_2}^{\pi/6-\alpha_1} \sin(n\theta)d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/6+\alpha_1} \sin(n\theta)d\theta + \int_{\pi/6+\alpha_2}^{5\pi/6-\alpha_2} \sin(n\theta)d\theta + \int_{5\pi/6-\alpha_1}^{5\pi/6} \sin(n\theta)d\theta$$

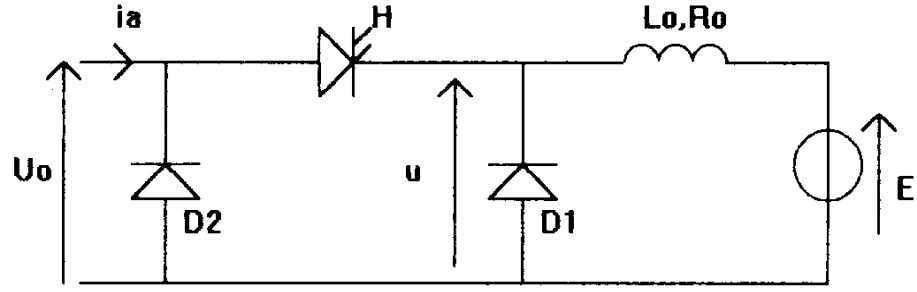
$$\hat{I}_n = \frac{4I_0}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{6}\left(-2\cos n\alpha_1 + 2\cos n\alpha_2 + 1\right)$$

II12c On souhaite annuler l'harmonique 5 et l'harmonique 7 , d'où :

$$-2\cos 5\alpha_1 + 2\cos 5\alpha_2 + 1 = 0$$
$$-2\cos 7\alpha_1 + 2\cos 7\alpha_2 + 1 = 0$$

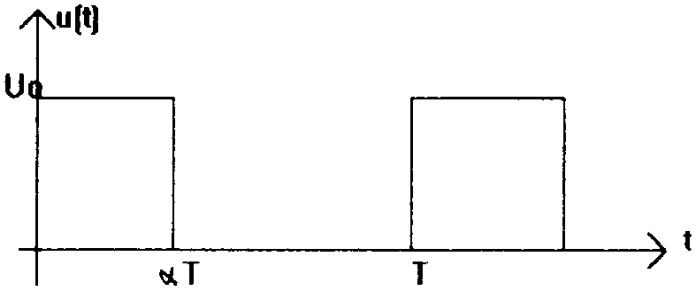
II12d I_1=308A ; I_5=0 ; I_7=0 ; I_{11}=87.3A .

II21a



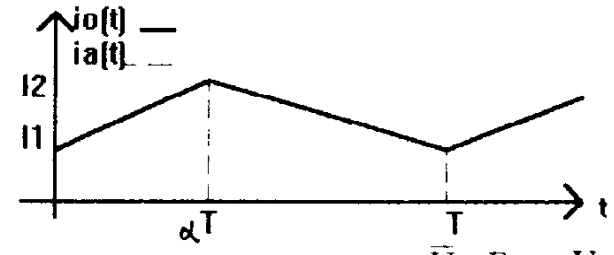
La structure ainsi obtenue est un "hacheur " abaisseur à liaison directe.

II21b L'allure de la tension u(t) est :



La valeur moyenne de u(t) est $\bar{U} = \alpha U_0$.

II21c



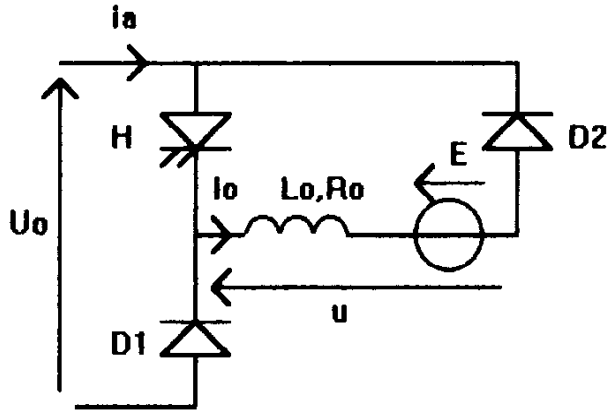
La valeur moyenne de i_0 est $I_0 = \dfrac{\bar{U} - E}{R_0} = \dfrac{\alpha U_0 - E}{R_0}$ et $\bar{u}_L = 0$

Déterminons l'ondulation Δi_0: dans l'intervalle $(0,\alpha T)$ $i_0(t) = \left(I_1 - \frac{U_0 - E}{R_0}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0 - E}{R_0}$.La constante de temps L_0/R_0 est grande devant T , on peut donc linéariser et en écrivant que $i_0(\alpha T)=I_2$ on obtient : $\Delta i_0 = \frac{\alpha(1-\alpha)U_0}{L_0 f}$;Δi_0 est max pour $\alpha=1/2$.

II21d Pour régler la valeur moyenne I_0de i_0 il faut agir sur $\overline{U}$ donc sur α.

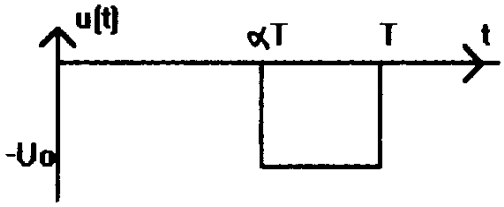
II21e $\Delta\hat{i}_0 = \frac{U_0}{4L_0 f} \Rightarrow L_0 = 5\text{mH}$.

II22a



La structure ainsi obtenue est un "hacheur " élévateur qui permet à la source E de renvoyer son énergie vers le réseau continu U_0 de valeur plus élevée .

II22b

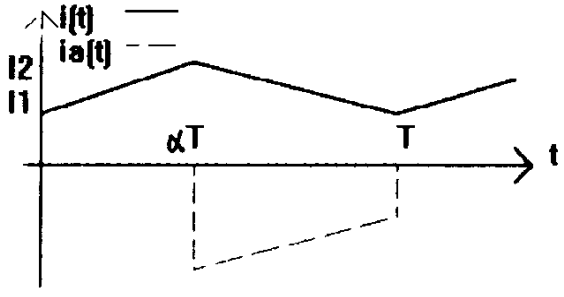


de 0 à αT H et D1 passants u=0
de αT à T D1 et D2 passantes u=-Uo

$$\overline{U} = -(1-\alpha)U_0$$

II22c $I_0 = \frac{-(1-\alpha)U_0 - E}{R_0}$ .Pour que I_0 soit positive il faut que $E< -U_0(1-\alpha)$ c'est à dire que E soit négative.

II22d



de 0 à αT $i(t) = (I_1 + \frac{E}{R_0})e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{E}{R_0}$ .En linéarisant et de la même façon que précédemment on détermine $\Delta i_O = \frac{U_0(1-\alpha)\alpha}{L_0 f}$

II22e La valeur de I_O est imposée par $\bar{U}$ c'est à dire par α.

II22f L'expression de Δi_O est la même et la valeur de L_O adoptée précédemment permet d'obtenir la même valeur d'ondulation maximale .

II23 MOD1 : le sens de transfert de l'énergie s'effectue de U_O vers E .($U_0\bar{I}_s>0$) .La machine asynchrone fonctionne en moteur .

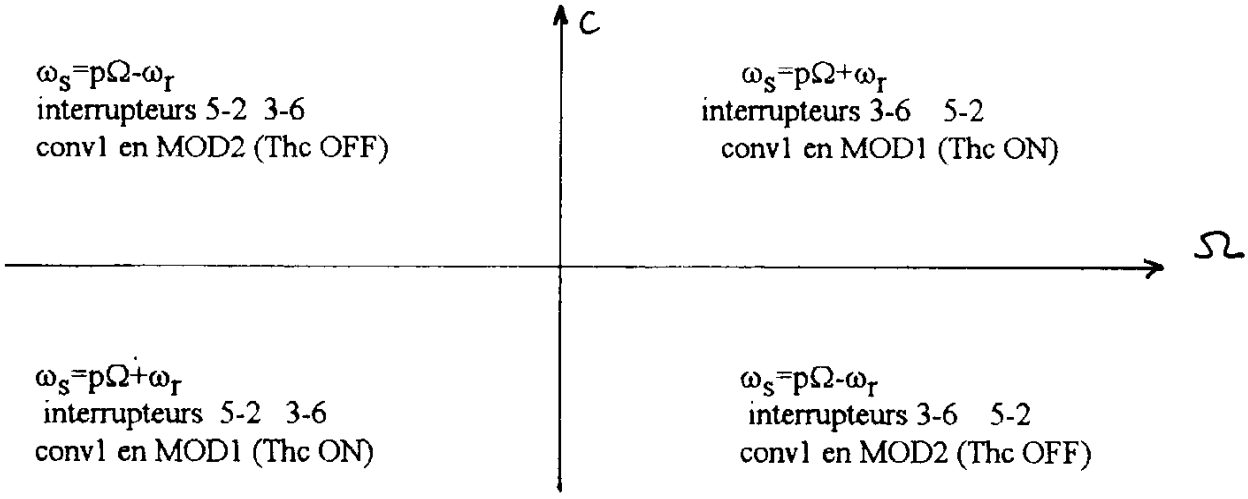
MOD2 : le sens de transfert de l'énerdie s'effectue de E vers U_O .($U_0\bar{I}_s<0$). La machine asynchrone fonctionne en frein.

III1La machine asynchrone se conduit comme une source de courant au sens de l'électronique de puissance .A l'instant des commutations le convertisseur connecterait donc deux sources de courant ce qui induirait des surtensions .Pour éviter cela , on modifie la structure du convertisseur .

III2 Le sens de rotation est imposé par l'ordre des phases qui est imposé par la séquence de commande des interrupteurs de conv2 . Pour changer le sens de rotation, il faut permuter les commandes des interrupteurs 3-6 avec celles des interrupteurs 5-2 (par exemple).

III3 Pour obtenir un couple de freinage , c'est à dire , un couple négatif ,il faut utiliser le signe - de l'opérateur de sommation $\omega_S=p\Omega-\omega_r$ (voir schéma d'autopilotage fréquentiel) et régler le conv1 en MOD2.

III4



III51 Les valeurs des couples sont obtenues grâce aux relations précédemment établies :
$C = 3pL'^2I^2 \frac{R'\omega_r}{R'^2 + L'^2\omega_r^2}$. Voir document réponse en annexe .

III52 Au démarrage $I'_r = I\frac{L'\omega_r}{\sqrt{R'^2 + L'^2\omega_r^2}}$ et $I'_m = I\frac{R'}{\sqrt{R'^2 + L'^2\omega_r^2}}$

I'_r=707A ; I'_m=160A ; E_r=7.97V ; Φ_r=1.27V/rd/s ; R_sI=8.18V ; $l\omega_sI$=0.9V ; V=16V ; cosφ=0.996 $\cos\varphi_r$=0.975. Voir diagramme en annexe.

III53 Les différentes grandeurs sont calculées grâce aux relations établies dans les parties précédentes :

I'_m (A)	I'_r (A)	E_r (V)	V (V)	Φ_r (v/rd/s)	cosφ	$2\,U_m$ (V)	I_0 (A)	α
36	328	205	220	0.286	0.949	977	423	0.65
57.9	416	317.4	324.2	0.458	-0.95	-1440	539	0.04

La première ligne correspond au fonctionnement moteur à la vitesse de 140 km/h.
La seconde ligne correspond au fonctionnement frein à la vitesse de 140 km/h .
Voir diagramme en annexe.

III61 La puissance électromagnétique instantanée a pour expression :
$P_e(t)=e_{s1}(t)i_{s1}(t) + e_{s2}(t)i_{s2}(t) +e_{s3}(t)i_{s3}(t)$ avec

$$e_{s1}(t) = E_s\sqrt{2}\sin(\omega_s t);e_{s2}(t) = E_s\sqrt{2}\sin\left(\omega_s t-\frac{2\pi}{3}\right);e_{s3}(t) = E_s\sqrt{2}\sin\left(\omega_s t-\frac{4\pi}{3}\right)\text{ et}$$

$$i_{s1}(t) = \sum_n I_{sn}\sqrt{2}\sin(n\omega_s t-\varphi_n)$$

$$i_{s2}(t) = \sum_n I_{sn}\sqrt{2}\sin\left(n(\omega_s t-\frac{2\pi}{3})-\varphi_n\right)$$

$$i_{s3}(t) = \sum_n I_{sn}\sqrt{2}\sin\left(n(\omega_s t-\frac{4\pi}{3})-\varphi_n\right)$$

ce qui donne:

$$P_e(t) = 3E_sI_{s1}\cos\varphi+\sum_1 3E_s\left[I_{s6k-1}\cos\left(6k\omega_s t-(6k-1)\varphi\right)+I_{s6k+1}\cos\left(6k\omega_s t-(6k+1)\varphi\right)\right]$$

Le premier terme correspond à la puissance moyenne .

III62

$$C(t) = \frac{3p}{\omega_s}E_sI_{s1}\cos\varphi+\sum_1\frac{3pE_s}{\omega_s}\left[I_{s6k-1}\cos\left(6k\omega_s t-(6k-1)\varphi\right)+I_{s6k+1}\cos\left(6k\omega_s t-(6k+1)\varphi\right)\right]$$

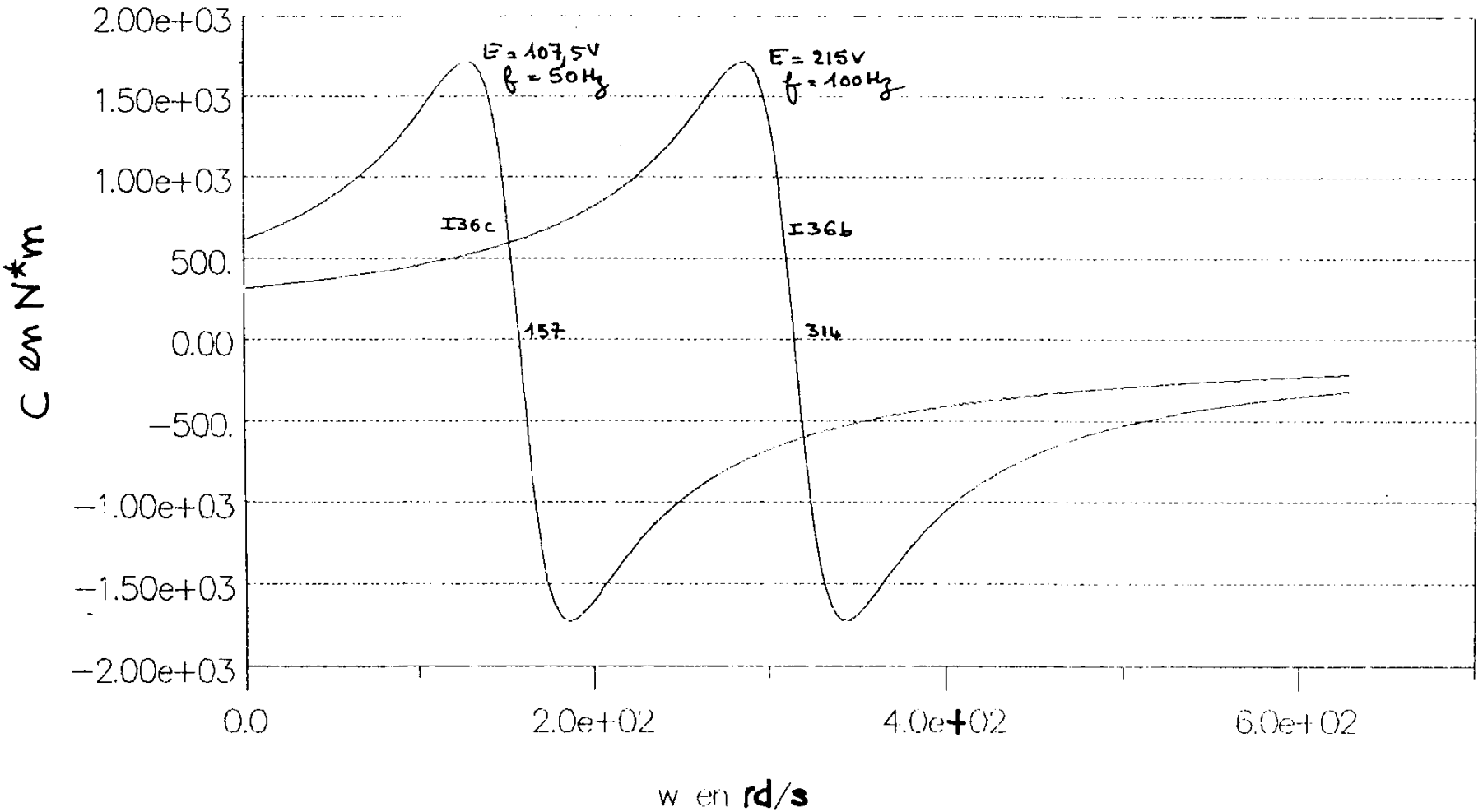
III63 On retrouve le couple moyen et les couples pulsatoires dont les pulsations sont des multiples 6k de ω et dont les amplitudes sont liées aux amplitudes des harmoniques de courant.

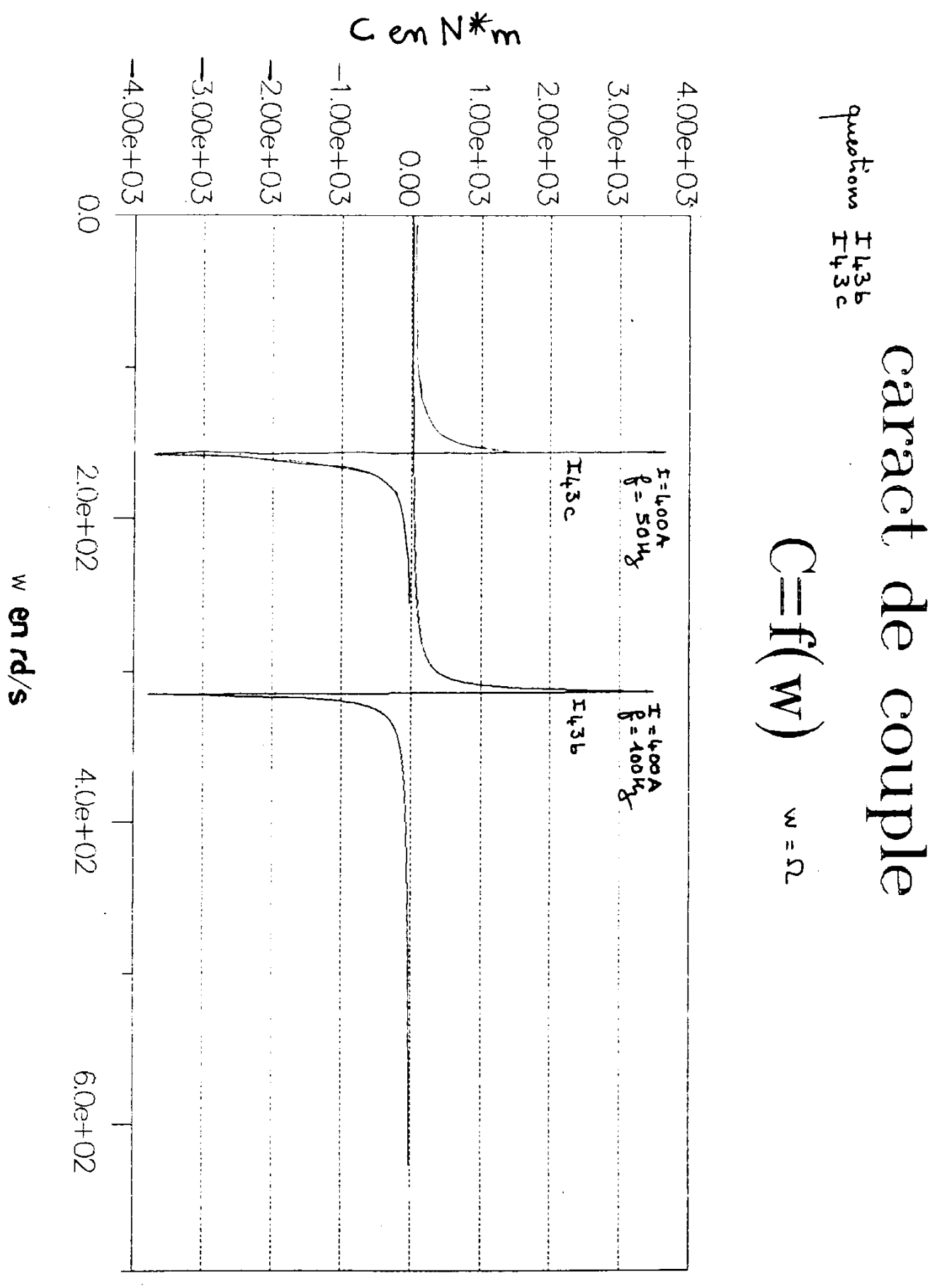
III64 On trouve C= 5404 Nm et $\hat{C}_6$=1856Nm : amplitude du premier harmonique de couple dont la pulsation est $6\omega_S$ .Avec un découpage qui permet d'annuler les harmoniques de courant jusqu'au rang 13 , le premier harmonique de couple a pour pulsation $18\omega_S$

caract de couple

questions I63b
I63c

C=f(w) w = Ω

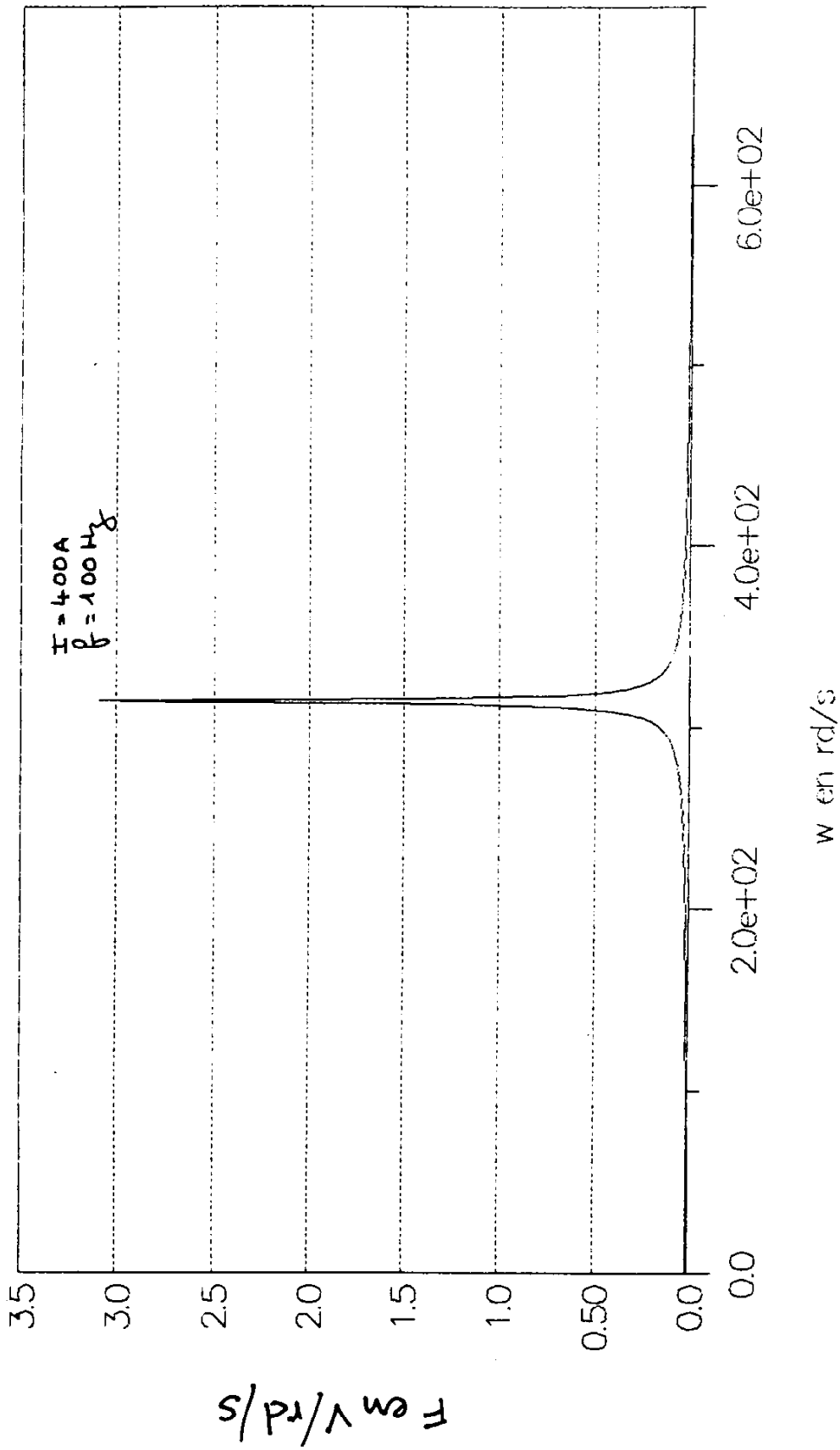



caract de couple
C=f(W)
W = Ω
questions I43b I43c
C en N*m
4.00e+03
3.00e+03
2.00e+03
1.00e+03
0.00
-1.00e+03
-2.00e+03
-3.00e+03
-4.00e+03
0.0
2.0e+02
4.0e+02
6.0e+02
W en rd/s
I=400A f= 50Hz
I43c
I=400A f=100Hz
I43b

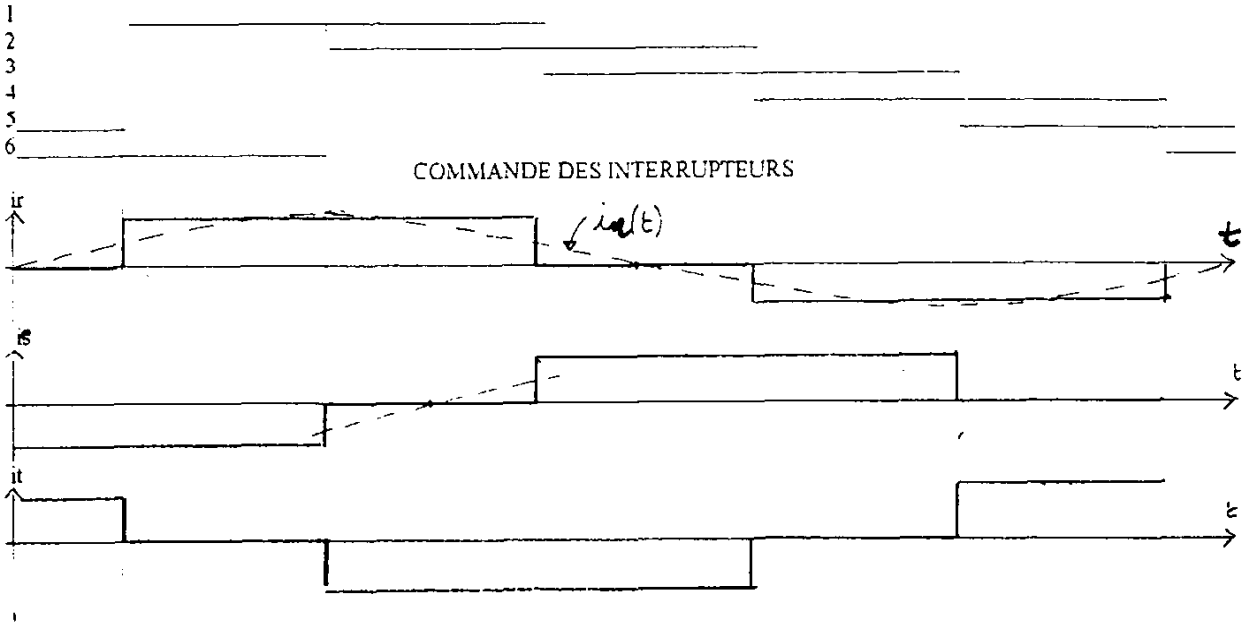
FLUX ROTORIQUE

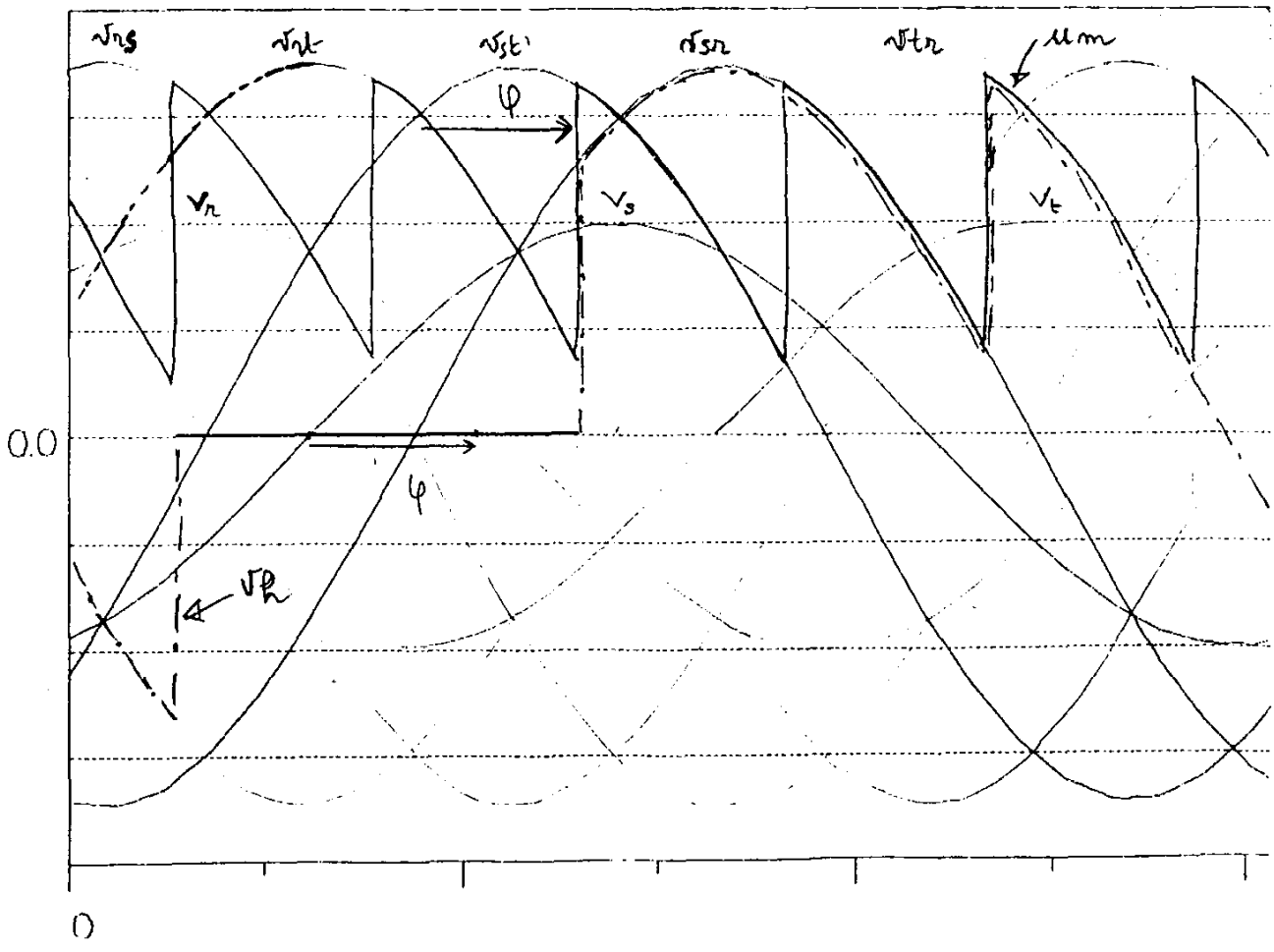
$F = f(w)$ $w = \Omega$

question I43d.

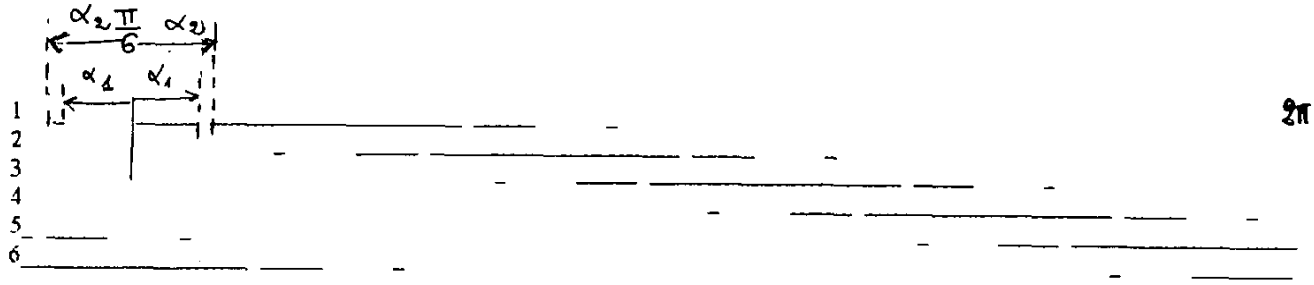


DOCUMENT REPONSE 3

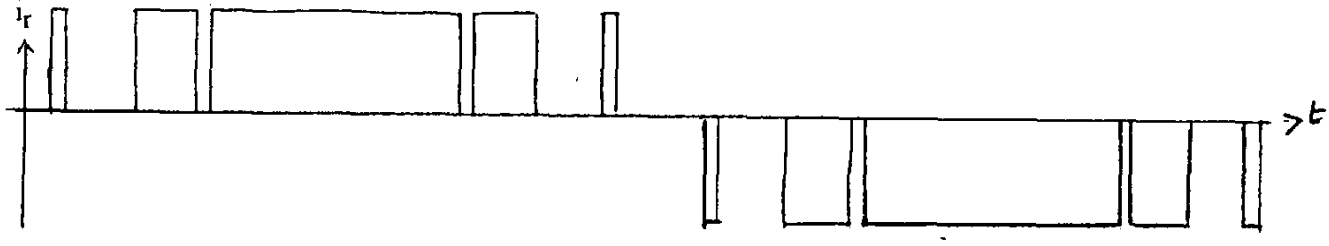




DOCUMENT REPONSE 4



COMMUTATION DES INTERRUPTEURS

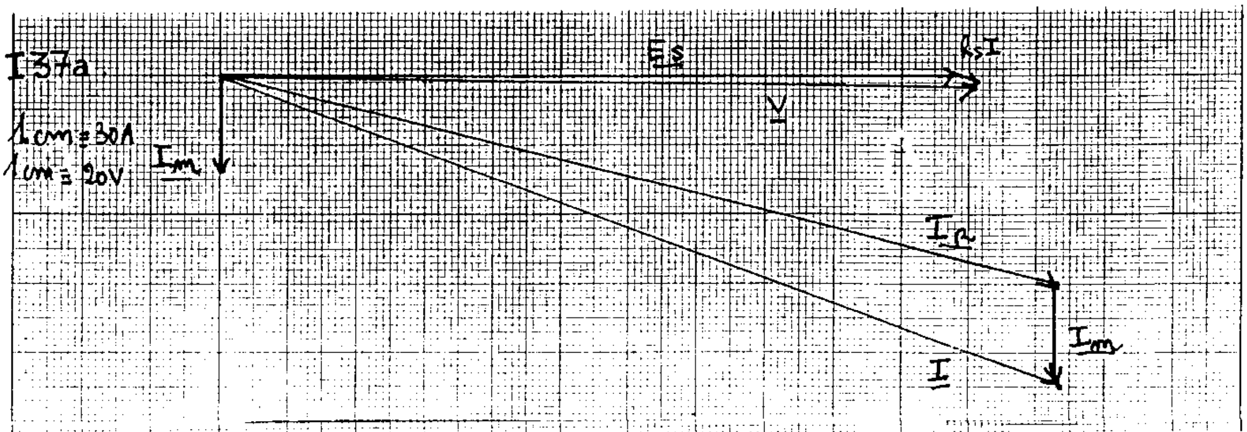


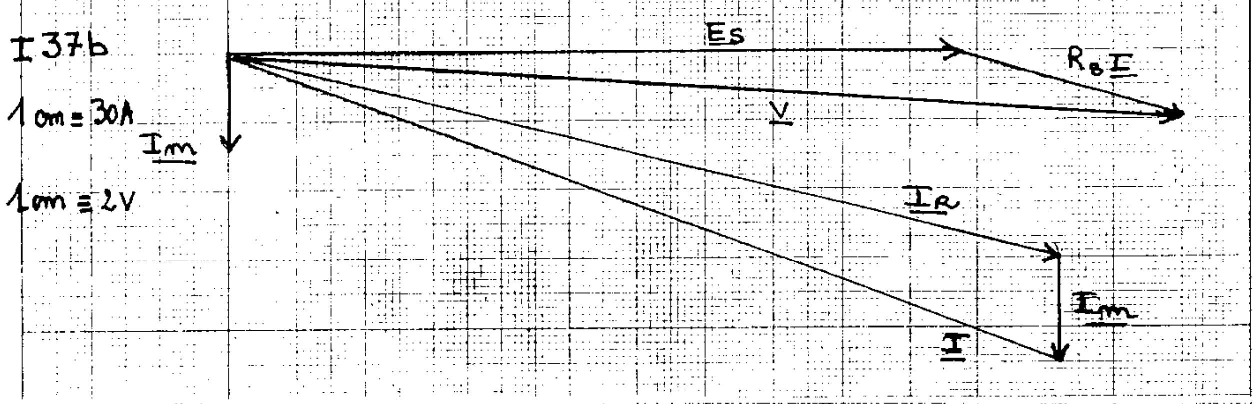
TRACTION

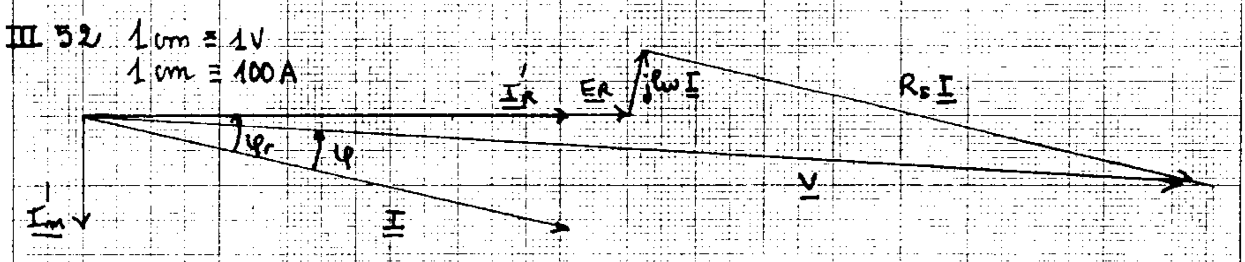
vitesse rame en km/h	I en A	n en tr/min	ω_r en rd/s	C en N.m
0	725	0	6.28	5385
50	540	1198	5.315	3464
80	440	1917	7.207	1750
110	380	2637	10.42	920
140	330	3356	12.92	563,4

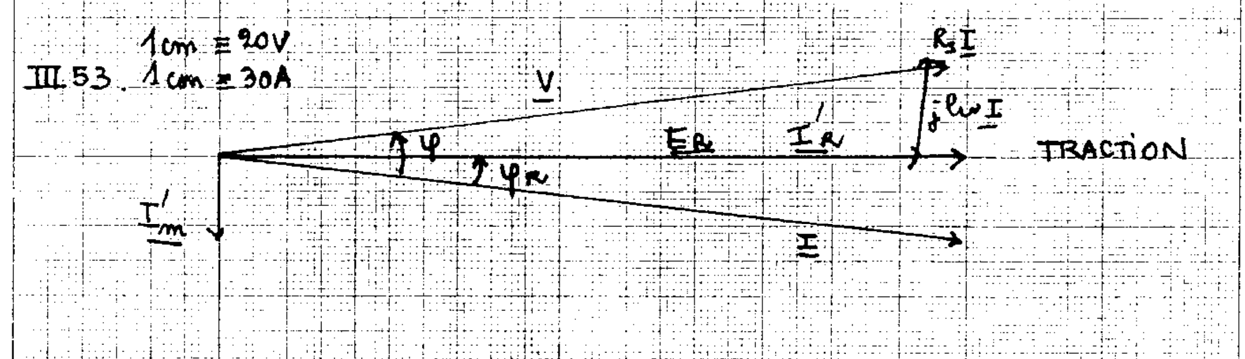
FREINAGE

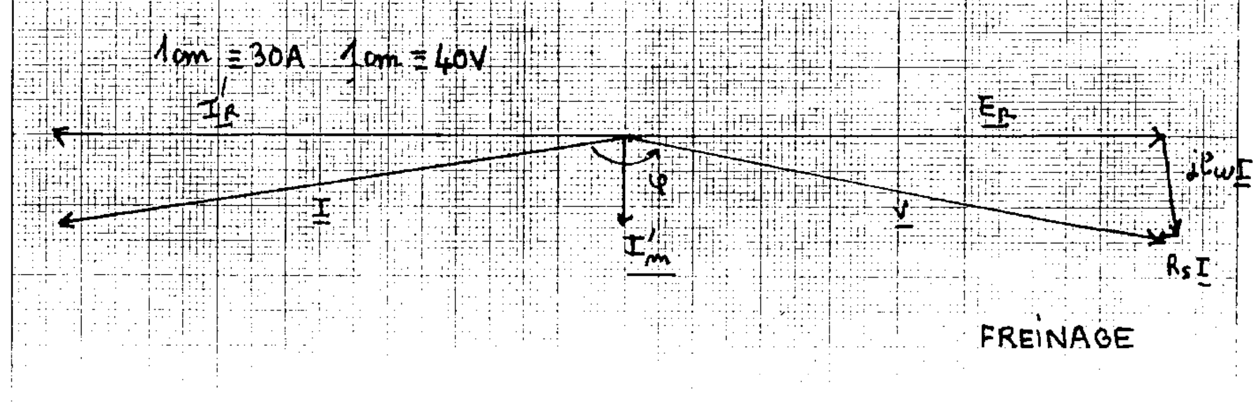
vi tesse rame en km/h	I en A	n en tr/min	ω_r enrd/s	C en N.m
10	420	239	4.27	2516
50	420	1198	4,27	2516
80	420	1917	5.466	2045
110	420	2637	7.79	1526
140	420	3356	10.24	1144


I 37a
1 cm ≡ 30 A
1 cm ≡ 20 V
Es
RsI
V
Im
IR
Im
I


I 37b
1 cm ≡ 30 A
1 cm ≡ 2 V
Es
RsI
V
Im
IR
Im
I


III 52 1 cm ≡ 1 V
1 cm ≡ 100 A
I'R
ER
jlωI
RsI
φr
φ
V
I'm
I


1 cm ≡ 20 V
III 53 1 cm ≡ 30 A
RsI
V
jlωI
φ
ER
I'R
TRACTION
φR
I'm
I


1 cm ≡ 30 A 1 cm ≡ 40 V
I'R
ER
jl'ωI
φ
I
V
I'm
RsI
FREINAGE

C.A.P.E.S

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de Physique avec applications - Session : 1994

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DU PRISME

A.1. Plan de section principale : plan perpendiculaire à l'arête.

A.2. **Formules du prisme.**

A.2.*a.* $$\mathbf{\sin i = n \sin r} \quad (1)$$

$$\mathbf{\sin i' = n \sin r'} \quad (2)$$

A.2.*b.* $$(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{II'}) + (\overrightarrow{II'}, \overrightarrow{I'N'}) = (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{I'N'})$$

C'est-à-dire $$\mathbf{r + r' = A} \quad (3)$$

A.2.*c.* $$(\overrightarrow{I'S'}, \overrightarrow{SI}) = (\overrightarrow{I'S'}, \overrightarrow{I'N'}) + (\overrightarrow{I'N'}, \overrightarrow{IN}) + (\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{SI})$$

$$D = i' - A + i \qquad \text{C'est-à-dire } \mathbf{D = i + i' - A} \quad (4)$$

A.3. **Influence de l'angle d'incidence sur la déviation.**

A.3.*a.* (1) $\cos i \, di = n \cos r \, dr$

(2) $\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr'$

(3) $dr + dr' = 0$

(4) $dD = di + di'$

$(1) \times \cos r' + (2) \times \cos r$ donne $\cos i \cos r' \, di + \cos i' \cos r \, di' = n \cos r \cos r' \, (\overbrace{dr + dr'}^{0})$

C'est-à-dire $$di' = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} di$$

$$\boxed{\Rightarrow dD = di \left\{1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}\right\}}$$

A.3.b. Extremum $\frac{dD}{di} = 0$ quand $\cos i \cos r' = \cos i' \cos r$ qui conduit à $r = \pm r'$.

En fait $r = -r'$ impossible $(r + r' = A \neq 0)$; donc $r = r' = \frac{A}{2}$

et i_m tel que $\sin i_m = n \sin \frac{A}{2}$

i_m ↑ valeur de l'angle d'incidence correspondant

avec de façon évidente $i' = i_m$

$$(4) \Rightarrow D_m = 2\, i_m - A$$

A.3.c. La relation précédente $\Rightarrow$ $i_m = \frac{D_m + A}{2}$ et compte tenu de $r = \frac{A}{2}$ la relation (1) s'écrit :

$$\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

A.3.*d.* *Application Numérique :* **n = 1,72**.

A.4. **Influence de la valeur de l'indice sur la déviation.**

Cette fois (1) donne $0 = \sin r\, dn + n \cos r\, dr$,

(2) donne $\cos i'\, di' = \sin r'\, dn + n \cos r'\, dr'$,

(3) donne $dr + dr' = 0$,

(4) donne $dD = di'$.

On fait toujours $\cos r' \times (1) + \cos r\, (2)$ et on obtient :

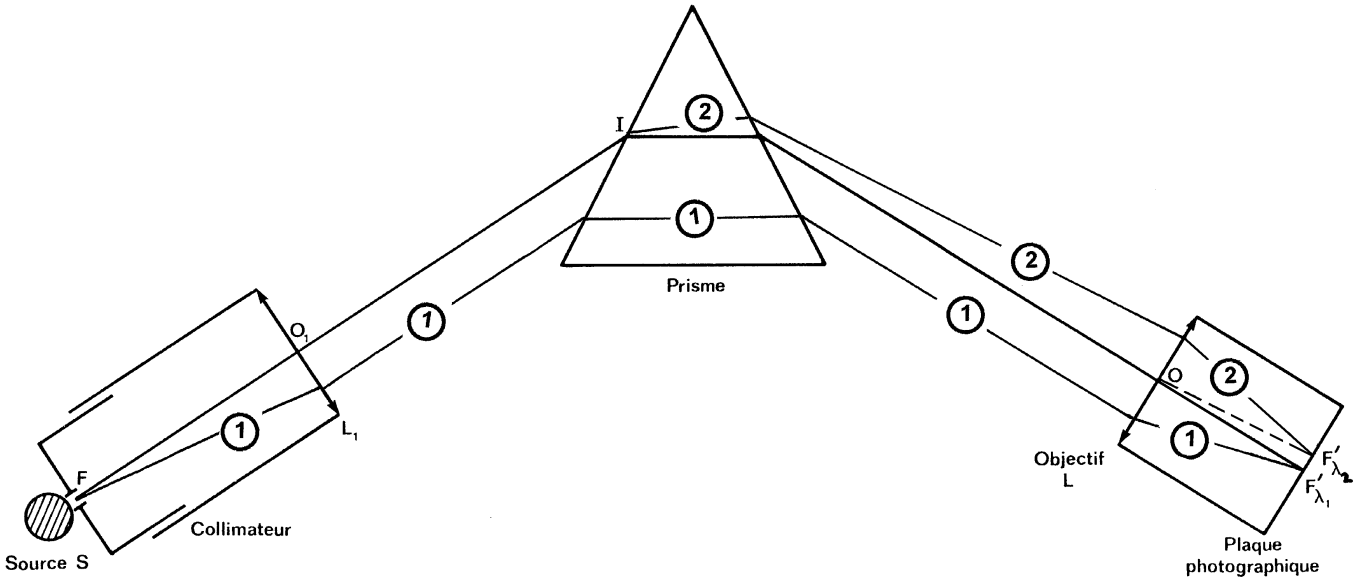
$$\boxed{dD = \frac{\sin (r + r')}{\cos i' \cos r}\, dn = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r}\, dn}$$

A.5. **Spectrographe à prisme.**

A.5.*a.* A.5.*a.*α. Système achromatique : système corrigé des aberrations chromatiques c'est-à-dire de celles provoquées par le phénomène de dispersion de la lumière.

A.5.*a.*β. Le prisme est rigoureusement stigmatique pour les points à l'infini. Cette position de la fente F fait que le collimateur est réglé sur l'infini.

A.5.*b.*



A.5.*c.* A.5.*c.*α.
$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn} \times \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r} \times \left(-\frac{2b}{\lambda^3} d\lambda \right) = \frac{\sin A}{\cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right) \cos\frac{A}{2}} \times \left(-\frac{2b}{\lambda^3} d\lambda \right)$$

C'est-à-dire
$$\boxed{dD = -\frac{4\, b \sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right)} \frac{d\lambda}{\lambda^3}}$$

A.5.*c.*β. dD étant faible on a : $F'_{\lambda_1} F'_{\lambda_2} = f' |dD|$.

A.5.*c.*γ. $F'_{\lambda_1} F'_{\lambda_2} = 6{,}4510^{-4}$ m.

A.5.*d.* Il faut remplacer la plaque photographique par un oculaire : son rôle sera de donner de l'image objective (jouant le rôle d'objet pour l'oculaire) une image virtuelle (située entre PP et le PR de l'œil - idéalement au PR de l'œil -) en augmentant l'angle sous lequel cette image est vue par l'œil.

DEUXIÈME PARTIE

PROPAGATION D'ONDES ACOUSTIQUES

B.1. Propagation d'une onde acoustique dans un tuyau de section constante contenant un fluide unique.

B.1.*a.* En appliquant la loi de la résultante cinétique au système de masse $\rho_0 S\, dx$:

$$\rho_0 S\, dx \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = S \left\{ p\left(x + \psi_{(x, t)},\ t\right) - p\left(x + dx + \psi_{(x + dx, t)},\ t\right) \right\}.$$

Remarque : En toute rigueur il faut distinguer :

→ $u_{①}(x, t) = \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)$ qui représente à l'instant t la vitesse du fluide qui est **à l'équilibre en x**.

→ $u_{②}(x, t)$ (qui intervient dans l'équation d'Euler) qui représente la vitesse du fluide **qui à t est en x.**

On a avec les rotations de l'énoncé : $u_{②}\left(x + \psi_{(x,\, t)},\ t\right) = u_{①}(x, t)$.

En fait dans le cadre de l'approximation acoustique :

$$u_{②}\left(x + \psi_{(x,\, t)},\ t\right) = u_{②}(x, t) + \psi_{(x,\, t)} \frac{\partial u_{②}}{\partial x}(x, t) = u_{①}(x, t)$$

Donc à des termes du second ordre près $u_{②}(x, t) = u_{①}(x, t)$ (noté u(x, t) dans l'énoncé) :

$$p\left(x + \psi_{(x,\, t)}, t\right) - p\left(x + dx + \psi_{(x + dx,\, t)}, t\right)$$

$$= p(x, t) + \psi_{(x,\, t)} \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) - p(x, t) - \left[dx + \psi_{(x,\, t)} + \underbrace{dx \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)}_{\text{négligeable}}\right] \frac{\partial p}{\partial x}(x, t)$$

$$\Rightarrow \rho_0\, S\, dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) = -\, dx \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) \qquad \text{C'est-à-dire} \qquad \boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) = -\frac{\partial p}{\partial x}(x, t)}$$

B.1.*b*. B.1.*b*.α. Mouvements de faible amplitude : on peut considérer la viscosité négligeable. On peut par ailleurs supposer que, par suite de la fréquence des mouvements acoustiques les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire (évolution **adiabatique** de la tranche de fluide considérée) : d'où l'évolution supposée isentropique.

B.1.b.β. $\chi_s \# -\dfrac{1}{v_0} \dfrac{v - v_0}{P - P_0}$ avec $v_0 = S\, dx$ et $v = S\left\{\psi_{(x + dx,\, t)} + x + dx - \psi_{(x,\, t)} - x\right\}$

$$= v_0 \left\{1 + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)\right\}$$

C'est-à-dire $\qquad v - v_0 = v_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \chi_s = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \times \dfrac{1}{p(x, t)}$

C'est-à-dire $\qquad \boxed{p(x, t) = -\dfrac{1}{\chi_s} \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)}$

B.1.*c*. B.1.*c*.α. En dérivant cette dernière relation /x et en tenant compte de l'équation de B.1.*a*. on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) - \rho_0\, \chi_s \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) = 0}$$

B.1.c.β. $\psi_{(x,\,t)} = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ avec $c^2 = \frac{1}{\chi_s \rho_0}$

B.1.c.γ. $\psi_1 (x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$: OPP se propageant vers les x ➚ à la célérité :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \rho_0}}}$$

$$\left(f\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{c}\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \text{ avec } \Delta x = c\Delta t\right)$$

De même $\psi_2 (x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$: OPP se propageant vers les x ↓.

Donc : $$c = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \rho_0}}$$

B.1.d. En dérivant /x l'équation de propagation $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0$

C'est-à-dire $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

et compte tenu de la relation établie au B.1.*b*.β. on a :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0}$$

De même en dérivant l'équation de propagation relative à ψ/t

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

B.1.e. B.1.e.α. Gaz parfait $\rho_0 = \frac{M\rho_0}{RT_0}$ $\chi_T = \frac{1}{\rho_0}$ et $\chi_s = \frac{\chi_T}{\gamma} = \frac{1}{\gamma P_0} \rightarrow$ $\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}}$

B.1.*e*.β. *Application Numérique :* $c = 343\ m.s^{-1}$.

B.1.f. B.1.f.α. $$\psi_1 (x, t) = A_1 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x\right)$$

propagation vers les x ➚.

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Application Numérique : $k = 18{,}3\ m^{-1}$.

B.1.f.β. $p_1 = -\dfrac{1}{\chi_s}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x}$ c'est-à-dire $\boxed{\underline{p_1} = \dfrac{i\,k}{\chi_s} A_1\, e^{i(\omega t - kx)}}$

$u_1 = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t}$ $\boxed{\underline{u_1} = i\,\omega\, A_1\, e^{i(\omega t - kx)}}$

B.1.f.γ. $\dfrac{\underline{p_1}}{\underline{u_1}} = \dfrac{k}{\chi_s \omega} = \dfrac{\omega}{c}\,\dfrac{\rho_0 c^2}{\omega} = \rho_0 c = \Re$

B.1.g. $\dfrac{p'_1}{u'_1} = \dfrac{-k}{\chi_s \omega} = -\Re$

B.2. **Réflexion et transmission dans un tuyau de section constante contenant deux fluides.**

B.2.a. On écrit : $\underline{p'_1} = p'_{0_1}\, e^{i\left(\omega'_1 t + k_1 x\right)}\left(\overrightarrow{k'_1} = -\overrightarrow{k_1} = -\dfrac{\omega}{c_1}\overrightarrow{ux}\right)$

$\underline{p_2} = p_{0_2}\, e^{i\left(\omega_2 t - k_2 x\right)}$ avec $k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$

La continuité de p c'est-à-dire $\left(\underset{\text{milieu ①}}{p_①} = \underset{\text{milieu ②}}{p_②}\right)_{x=0}$ se traduit par :

$p_{0_1}\, e^{i\omega t} + p'_{0_1}\, e^{i\omega_1 t} = p_{0_2}\, e^{i\omega_2 t}$; cette relation devant être vraie quelque soit t

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega'_1 = \omega_2 = \omega}$$

B.2.b. Donc :

$$\boxed{\underline{p'_1} = p'_{0_1}\, e^{i(\omega t + k_1 x)}} \qquad k_1 = \frac{\omega}{c_1}$$

$$\boxed{\underline{p_2} = p_{0_2}\, e^{i(\omega t - k_2 x)}} \qquad k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

B.2.*c*. Continuité de la pression : $p_{0_1} + p'_{0_1} = p_{0_2}$ (1)

Continuité du débit volumique $\left(S\,u_① = S\,u_②\right)_{x=0}$ c'est-à-dire $S\left\{\underline{u_1} + \underline{u'_1}\right\}_{x=0} = S\,\underline{u_2}_{x=0}$ ou encore, compte tenu de B.1.*f*.γ. et B.1.*g*. $\left(\underline{u_1} = \dfrac{\underline{p_1}}{\Re_1}\ ,\ \underline{u'_1} = -\dfrac{\underline{p'_1}}{\Re_1}\ ,\ \underline{u_2} = \dfrac{\underline{p_2}}{\Re_2}\right)$.

$$\frac{1}{\Re_1}\left(p_{0_1} - p'_{0_1}\right) = \frac{1}{\Re_2}\, p_{0_2} \qquad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{r_{12} = \dfrac{p'_{0_1}}{p_{0_1}} = \dfrac{\Re_2 - \Re_1}{\Re_2 + \Re_1}}$ et $\boxed{t_{12} = \dfrac{2\,\Re_2}{\Re_1 + \Re_2}} = \dfrac{p_{0_2}}{p_{0_1}}$

B.2.d. B.2.d.α. $\mathscr{P}_1 = \left| p_1\, u_1 \right| S = \dfrac{p_1^2\, S}{\Re_1} \quad \mathscr{P}_1 = \dfrac{p'^2_1\, S}{\Re_1} \quad \mathscr{P}_2 = \dfrac{p'^2_2\, S}{\Re_2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{T = \left(\dfrac{\mathscr{P}_2}{\mathscr{P}_1}\right)_{x=0} = \left(\dfrac{p_2^2}{p_1^2}\right)_{x=0} \times \dfrac{\Re_1}{\Re_2} = \dfrac{4\,\Re_1\,\Re_2}{\left(\Re_1 + \Re_2\right)^2}}$

et : $R = \left(\dfrac{p'^2_1}{\Re_1} = \dfrac{1}{\dfrac{p_1^2}{\Re_1}}\right)_{x=0} = \left(\dfrac{p'^2_1}{p_1^2}\right)_{x=0} = \left(\dfrac{\Re_2 - \Re_1}{\Re_2 + \Re_1}\right)^2$

B.2.*d*.β. Remarque : $T + R = 1$ conservation de l'énergie, le milieu étant supposé non absorbant.

B.2.*e*. $T \# 0{,}001 \qquad R \# 0{,}999$ **La réflexion est pratiquement totale.**

B.3. **Réflexion et transmission dues à un changement de section dans un tuyau sonore.**

B.3.*a*. Continuité de la pression : $p_{0_1} + p'_{0_1} = p_{0_2}$ (1)

Continuité du débit volumique $S_1\, u_{①} = S_2\, u_{②}$

c'est-à-dire : $S_1 \left\{\underline{u_1} + \underline{u'_1}\right\}_{x=0} = S_2 \left(\underline{u_2}\right)_{x=0}$

C'est-à-dire $\dfrac{S_1}{\Re_1}\left(p_{0_1} - p'_{0_1}\right) = \dfrac{S_2}{\Re_2}\, p_{0_2}$ que l'on peut encore écrire :

$$\frac{1}{Z_1}\left(p_{0_1} - p'_{0_1}\right) = \frac{1}{Z_2}\, p_{0_2} \qquad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{r_{12} = \dfrac{p'_{0_1}}{p_{0_1}} = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}}$ et $\boxed{t_{12} = \dfrac{p_{0_2}}{p_{0_2}} = \dfrac{2\,Z_2}{Z_2 + Z_1}}$

B.3.b. $\mathscr{P}_1 = \left| p_1\, u_1 \right| S_1 = \dfrac{p_1^2\, S_1}{\Re_1} \quad \mathscr{P}_1 = p'^2_1 \dfrac{S_1}{\Re_1} \quad \mathscr{P}_2 = p_2^2 \dfrac{S_2}{\Re_2}$

donc : $T = \dfrac{4\,Z_1\,Z_2}{\left(Z_1 + Z_2\right)^2} \qquad R = \left(\dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$

B.3.*c*. Oui.

$r_{12} = \dfrac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$ La réflexion se fait avec un déphasage de π (pour l'onde de supression) si $S_2 > S_1$.

$t_{12} = \dfrac{2\,S_1}{S_1 + S_2}$ Pas de déphasage (t_{12} toujours positif).

B.3.*d.* Oui.

TROISIÈME PARTIE

THERMODYNAMIQUE

C.1. Quelques propriétés d'un gaz parfait.

C.1.*a.* $PV = nRT$

C.1.*b.* C.1.*b.*α. $H = U + PV$

C.1.*b.*β. Transformation du GP de T à T + dT $dU = n\,C_v\,dT$

$dH = n\,C_p\,dT = n\,C_v\,dT + d\,(pv)$

$dH = n\,(C_v + R)\,dT$

C'est-à-dire $C_p = C_v + R$ ou $\mathbf{C_p - C_v = R}$

C.1.*b.*γ. Dans cette dernière relation :

$$C_v\,(\gamma - 1) = R \Rightarrow \boxed{C_v = \frac{R}{\gamma - 1}}$$

C.1.b.δ. $dU = n\,C_v\,dT = \dfrac{n\,R}{\gamma - 1}\,dT = \dfrac{d\,(pv)}{\gamma - 1} \Rightarrow \boxed{\Delta U = \dfrac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1}}$

C.2. Transformations réversibles d'un gaz parfait.

C.2.*a.* C.2.*a.*α.

- $P_2 = P_1 = 3P_0$ (équilibre mécanique du piston),
- gaz de droite (compartiment (2)) : évolution adiabatique réversible :

$$P_2V_2^{\gamma} = P_0V_0^{\gamma} \Rightarrow V_2 = V_0\left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{1/\gamma} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{V_2 = V_0\,(3)^{-1/\gamma}}$$

- $\dfrac{P_2V_2}{T_2} = nR = \dfrac{P_0V_0}{T_0} \Rightarrow T_2 = \dfrac{P_2}{P_0}\,\dfrac{V_2}{V_0}\,T_0$ c'est-à-dire $\boxed{T_2 = T_0\,(3)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$

C.2.a.β.

- V_1 tel que $V_1 + V_2 = 2V_0 \Rightarrow$ $\boxed{V_1 = V_0\left\{2 - (3)^{-1/\gamma}\right\}}$
- T_1 tel que $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = nR = \dfrac{P_0V_0}{T_0} \Rightarrow$ $\boxed{T_1 = T_0\left\{6 - (3)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}}$

C.2.*b.* C.2.*b.*α. Premier principe à l'ensemble : $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = Q_1$.

C.2.b.β. $\Delta U_1 = \dfrac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1}$ et $\Delta U_2 = \dfrac{P_2V_2 - P_0V_0}{\gamma - 1}$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{P_1V_1 + P_2V_2 - 2P_0V_0}{\gamma - 1} = \frac{3P_0\left(V_1 + V_2\right) - 2P_0V_0}{\gamma - 1}$$ c'est-à-dire $\boxed{Q_1 = \dfrac{4\,P_0\,V_0}{\gamma - 1}}$

C.3. **Détente irréversible d'un gaz parfait.**

C.3.*a.* Initialement la pression est P_0 (équilibre mécanique du piston).

Donc : $$T_0 = \frac{P_0V_A}{nR}$$

C.3.*b.* C.3.*b.*α. Cas ① : V_B est suffisamment faible (valeur-seuil V_{B_s} à préciser) pour que la pression du gaz atteigne la valeur P_0 sans que le piston rencontre la paroi $\mathscr{F}$ percée d'un trou (figure ①). Dans ce cas il est bien évident que la pression finale est égale à P_0.

Figure ①

Cas ② : cette fois la pression finale P_f du gaz est inférieure à P_0 et l'équilibre du piston est dû aux forces de pression (P_0 S et P_f S) mais aussi à l'action de contact de la paroi $\mathscr{F}$ sur le piston (figure ②).

Figure ②

Il est cette fois évident que le volume final est égal à V_B.

La valeur-seuil V_{B_s} correspond au cas où la pression dans le cylindre atteint P_0 quand le piston vient juste au contact de la paroi .

C.3.*b.*β. Il s'agit du cas ① ; dans ce cas il est clair que $\mathbf{P_1 = P_0}$

D'autre part $W = \Delta U = \dfrac{P_0V_1 - P_0V_A}{\gamma - 1}$ (1) (la transformation est adiabatique).

D'autre part :

$$W = P_{ext} \cdot \underbrace{S}_{\text{section du piston}} \cdot \underbrace{l}_{\substack{\text{distance dont le piston s'est déplacé} \\ \text{(cf figure ①)}}} = P_0 S l = P_0 \left(V_A + \underbrace{V_B}_{\text{(cf figure ①)}} - V_1 \right)$$

on retient donc : $$W = P_0 \left(V_A + V_B - V_1 \right) \qquad (2)$$

Si on compare les deux expression de W $\Rightarrow$ $\boxed{V_1 = V_A + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) V_B}$

Alors : $P_0 V_1 = nRT_1 \Rightarrow$ $\boxed{T_1 = \frac{P_0 \left\{ V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B \right\}}{nR}}$

C.3.*b*.γ. On pourra remarquer que le résultat précédent suppose :

$$V_1 \geq V_B \quad \text{c'est-à-dire} \quad V_A + \frac{\gamma - 1}{\gamma} V_B \geq V_B \quad \text{c'est-à-dire} \quad V_B \leq \gamma V_A$$

on voit donc apparaître la valeur-seuil de V_B :

$$\boxed{V_{B_s} = \gamma V_A}$$

Le cas ② correspond donc à $V_B \geq V_{B_s} = \gamma V_A$.

C.3.*b*.δ. C'est l'état final représenté sur la figure ②. Il est cette fois évident que :

$$\boxed{V_2 = V_B}$$

On peut toujours écrire $W = \Delta U = \frac{P_2 V_B - P_0 V_A}{\gamma - 1}$; et d'autre part $W = P_0 Sl' = P_0 V_A$ (cf figure ②).

$\Rightarrow$ $\boxed{P_2 = \frac{\gamma P_0 V_A}{V_B}}$ on en déduit $\boxed{T_2 = \frac{P_2 V_B}{nR} = \gamma T_0}$

Remarque : En écrivant que le cas ② correspond à $P_2 \leq P_0$ on retrouve $V_B \geq \gamma V_A = V_{B_s}$.

C.3.*c*. C.3.*c*.α. dS (en supposant un chemin réversible allant de l'état initial à l'état final) :

$$dS = n C_p \frac{dT}{T} + \frac{h}{T} dp = n C_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dp = n C_p \left(\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} \right) - nR \frac{dp}{p}$$

c'est-à-dire $dS = n C_p \left\{ \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} \right\} \Rightarrow$ $\boxed{s = n C_p \ln \left(V p^{1/\gamma} \right) + cte}$

C.3.c.β.

$$\boxed{\Delta S_1 = n\,C_p \ln\left(\frac{V_1}{V_A}\right) = n\,C_p \ln\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

$\Delta S_1 > 0$: conforme au second principe (évolution spontanée d'un système thermiquement isolé).

C.3.c.γ.

$$\Delta S_2 = n\,C_p \ln\left\{\frac{V_2}{V_A} \times \left(\frac{P_2}{P_0}\right)^{1/\gamma}\right\} = n\,C_p \ln\left\{\frac{V_B}{V_A} \times \left(\frac{\gamma V_A}{V_B}\right)^{1/\gamma}\right\}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\Delta S_2 = nC_p \ln\left\{\gamma \left\{\frac{V_B}{\gamma V_A}\right\}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}}$$

on est ici dans le cas ② où $V_B \geq \gamma V_A \Rightarrow \Delta S_2 > 0$ c'est-à-dire que le résultat est toujours conforme au second principe.

C.A.P.E.S

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de chimie avec applications - Session : 1994

A Premier Problème

I. Obtention du dioxygène par distillation fractionnée de l'air liquide

1) *Équilibre liquide-vapeur des mélanges de dioxygène et de diazote*

a) $dG_{TP,\,l} = \mu_{O_2 l}\, du_{O_2 l} + \mu_{N_2 l}\, du_{N_2 l}$

b) $dG_{TP,\,g} = \mu_{O_2 g}\, du_{O_2 g} + \mu_{N_2 g}\, du_{N_2 g}$

c) $dG = dG_{TP,\,l} + dG_{TP,\,g} = \left(\mu_{O_2 l} - \mu_{O_2 g}\right) du_{O_2 l} + \left(\mu_{N_2 l} - \mu_{N_2 g}\right) du_{N_2 l}$

équilibre physique $\Rightarrow$ $dG = 0$ $\forall$ $du_{O_2 l}$ et $du_{N_2 l}$ $\Rightarrow$ $\mu_{O_2 l} = \mu_{O_2 g}$ et $\mu_{N_2 l} = \mu_{N_2 g}$

d) $V = \begin{pmatrix} \text{nombre de variables} \\ \text{intensives du système} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{nombre de relations connues} \\ \text{entre les variables} \end{pmatrix}$

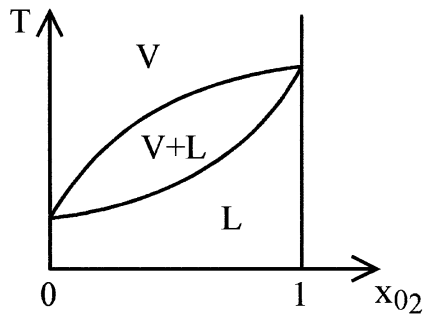
$= 6 - 6 =$ **0 = V**

car $\begin{cases} T, P, x_{O_2 g}, x_{O_2 l} \\ x_{N_2 g}, x_{N_2 l} \end{cases}$ $\begin{cases} T \text{ et } P \text{ sont fixés} \\ x_{N_2 l} + x_{N_2 g} = 1 \quad \text{et} \quad x_{O_2 l} + x_{O_2 g} = 1 \\ \mu_{N_2 l} = \mu_{N_2 g} \quad \text{et} \quad \mu_{O_2 l} = \mu_{O_2 g} \end{cases}$

2) *Diagramme d'équilibre isobare des mélanges de dioxygène et de diazote*

a) a_1) **L : courbe d'ébullition** **V : courbe de rosée**

a_2)



b) $\begin{cases} n = n_l + n_g \\ n_{O_2} = n_{O_2 l} + n_{O_2 g} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xn = x_l\, n_l + x_g\, n_g \\ n = n_l + n_g \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{n_g}{n_l} = \dfrac{x_l - x}{x - x_g}}$

Application Numérique : $\mathbf{\dfrac{n_g}{n_l} = 0{,}46}$.

3) *Applications : liquéfaction de l'air et distillation fractionnée de l'air liquide*

a) a_1) $\mathbf{T_l = 80{,}6\ K}$ a_2) $\mathbf{x_{0_2} \approx 0{,}40}$ dans la 1ère goutte

a_3) $\mathbf{T_l' = 78{,}6\ K}$ a_4) $\mathbf{x_{0_2} = 0{,}21}$ dans dernière goutte

$\mathbf{x_{0_2} = 0{,}10}$ dans la vapeur

b) b_1) Le gaz qui s'échappe est plus riche en N_2 car c'est le plus volatil.

b_2) Le liquide restant s'appauvrit en N_2 donc T_{eb} augmente.

II. Structure de la molécule de dioxygène

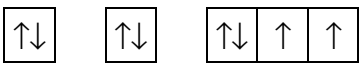
1) *Configuration électronique de l'atome d'oxygène*

a) Deux électrons dans un atome doivent avoir au moins un nombre quantique différent (n, l, m, s).

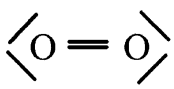
b) 1s 2s 2p 3s 3p 4s.

c) Lorsque les orbitales atomiques sont dégénérées, on remplit le maximum d'OA avec des e^- de spin parallèle avant d'apparier les e^- deux à deux.

d) 0 : $1s^2\ \ 2s^2 2p^4$.

e) 

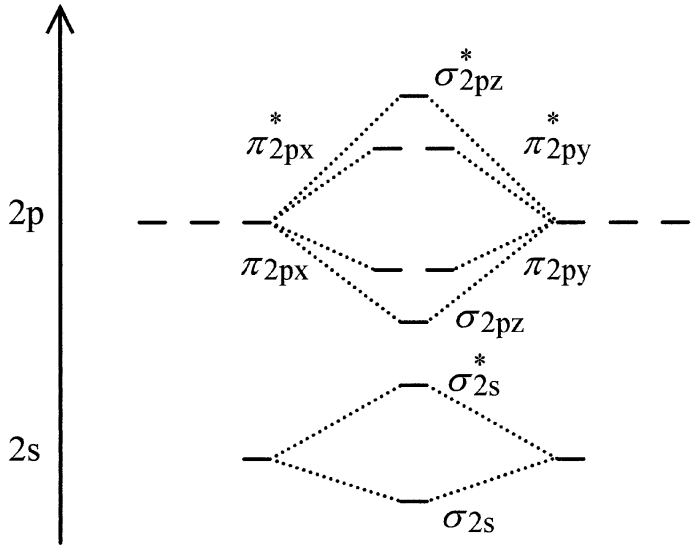
2) *Structure de la molécule de dioxygène dans la théorie de Lewis*

a) 

b) Liaison double, courte, forte ; molécule diamagnétique.

3) *Utilisation des orbitales moléculaires*

a)
et
b)



c) 0_2 : $\sigma_{2s}^2 \quad \sigma_{2s}^{*2} \quad \sigma_{2pz}^2 \quad \Pi_{2px}^2 \quad \Pi_{2py}^2 \quad \Pi_{2px}^{*1} \quad \Pi_{2py}^{*1}$

donc : $i = \frac{1}{2}(8-4) = 2$ double liaison 0 = 0 conforme avec la théorie de Lewis.

4) *Propriétés magnétiques de la molécule de dioxygène*

a)
et $\exists$ 2 e^- célibataires $\Rightarrow$ molécule paramagnétique.
b)

III. Obtention des oxydes d'azote et de l'acide nitrique

1) *Synthèse du gaz ammoniac*

a)

	N_2	+	$3H_2$	$\rightleftarrows$	$2NH_3$	total gaz
i)	y		n – y		0	n
eq)	y – z		n – y – 3z		2z	n – 2z

$\boxed{P_1 = \frac{y-z}{n-2z}P}$ $\boxed{P_2 = \frac{n-y-3z}{n-2z}P}$ $\boxed{P_3 = \frac{2z}{n-2z}P}$

b) $n = 4y \Rightarrow$ $\boxed{P_1 = \frac{1-x}{4-2x}P}$ $\boxed{P_2 = \frac{3(1-x)}{4-2x}P}$ $\boxed{P_3 = \frac{2x}{4-2x}P}$

c) $\boxed{K_T^0 = \frac{P_3^2 P^{02}}{P_1 P_2^3} = \frac{16}{27}\frac{(2-x)^2 x^2}{(1-x)^4}\frac{P^{02}}{P^2}}$ $\boxed{K_T^0 = K_P P^{02}}$ numériquement $K_T^0 \equiv K_P$.

d) $a = \frac{(2-x)x}{(1-x)^2} \Leftrightarrow (a+1)x^2 - 2(a+1)x + a = 0.$

On résout. La solution inférieure à 1 est : $\boxed{x = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+a}}}$

Si $a << 1$ $\boxed{x = \frac{1}{2}a = \frac{P}{2P^0}\sqrt{\frac{27}{16}K_T^0}}$

e) $e_1)$ $\Delta_r G^0 + RT \ln K_T^0 = 0 \Rightarrow \Delta_r G^0 = 91{,}9\ 10^3 + 198\ T$ $(J \times mol^{-1})$

En identifiant à $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T\,\Delta_r S^0$

$\Rightarrow$ $\Delta_r H^0 << 0 \Rightarrow$ réaction exothermique,

$\Delta_r S^0 << 0 \Rightarrow$ le nombre de moles de gaz diminue,

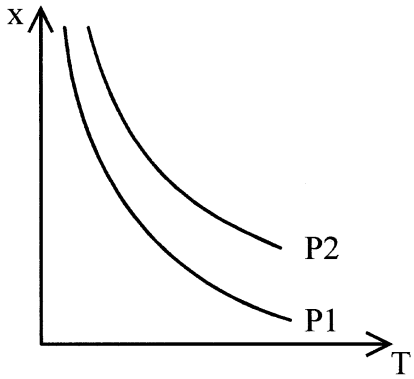
$\Delta_r G^0$ est fonction affine de T donc $\Delta_r H^0$ et $\Delta_r S^0$ sont indépendants de T.

$e_2)$ $x = \frac{P}{2P^0}\sqrt{\frac{27}{16}}\ e^{\frac{5525}{T} - 11{,}9}$.

Deux isobares avec $P_2 > P_1$:

– si T ↗ à $P = Cte \Rightarrow$ x ↘ loi de Van't Hoff,

– si P ↗ à $T = Cte \Rightarrow$ x ↗ loi de Le Châtelier.



2) *Oxydation de l'ammoniac en monoxyde d'azote*

a) $4\ NH_3 + 5\ O_2 \rightleftarrows 4\ NO + 6\ H_2O$

Industrie : $T \approx 800°C$,

$T \approx 4$ bars.

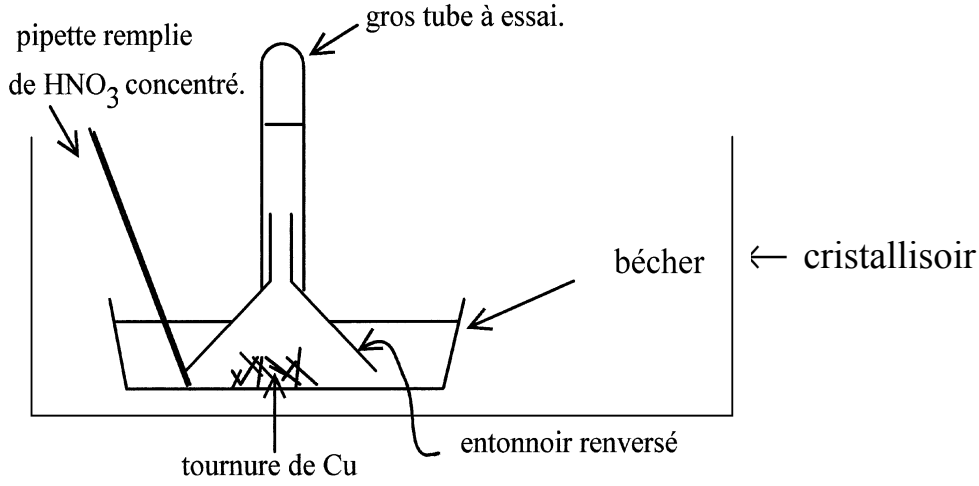
Catalyseur : toile de Pt rhodié. Excès d'air.

b) • $\overline{N} = O\rangle$

c) $\exists$ 1 e^- célibataire $\Rightarrow$ paramagnétisme,

$\Rightarrow$ dimérisation $\langle O = \overline{N} - \overline{N} = O\rangle$

d)



Précautions :

– Se placer sous la hotte,

– Le cristallisoir sert à éviter les débordements de HNO_3 conc,

– NO est recueilli par déplacement d'eau. Pour éviter la formation de NO_2, la pipette doit être remplie jusqu'à son extrémité inférieure.

3) *Cinétique de formation du dioxyde d'azote NO_2*

a) $\boxed{v = v_2 = k_2 [N_2O_2] [O_2]}$

b) $v_1 = v_{-1} \Rightarrow \dfrac{k_1}{k_{-1}} = \dfrac{[N_2O_2]}{[NO]^2} \Rightarrow \boxed{[N_2O_2] = \dfrac{k_1}{k_{-1}} [NO]^2}$

c) $\boxed{v = k_2 \dfrac{k_1}{k_{-1}} [O_2] [NO]^2}$

d) **Ordre global = 3**.

e) Posons $k = k_2 \times \dfrac{k_1}{k_{-1}}$ et $K_1^0 = \dfrac{k_1}{k_{-1}}$

$$\frac{d \ln k}{dT} = \frac{d \ln k_2}{dT} + \frac{d \ln K_1^0}{dT} \Rightarrow \frac{E_a}{RT^2} = \frac{E_2}{RT^2} + \frac{\Delta_r H_1^0}{RT^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_a = E_2 + \Delta_r H_1^0}$$

E_a : énergie d'activation «globale»

E_2 : énergie d'activation de la réaction (2)

$\Delta_r H_1^0$: enthalpie standard de la réaction (1)

donc si $\Delta_r H_1^0 << 0$ alors $E_a < 0$,

donc $v \blacktriangle \Rightarrow T \blacktriangledown$ contrairement à la loi d'Arrhénius.

4) *Dimérisation du dioxyde d'azote NO_2*

a) $\langle O = \dot{N} - \underline{O}|$

b) $\exists$ e – célibataire.

	N_2O_4	$\rightleftarrows$	$2\,NO_2$	Total gaz
i)	n_0		0	n_0
Eq)	$n_0\,(1-\alpha)$		$2n_0\,\alpha$	$n_0\,(1+\alpha)$

Si gaz parfaits $P_f\,V = n_0\,(1+\alpha)\,RT$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{P_f\,V}{n_0\,RT} - 1}$$

Application Numérique : $\boldsymbol{\alpha = 0{,}26}$.

$$\boxed{K_T^0 = \frac{P_{NO_2}^2}{P_{N_2O_4}\,P} = \frac{4\alpha^2}{1-\alpha}\,\frac{n_0\,TR}{P^0\,V}}$$

Application Numérique : $\mathbf{K_T^0 = 0{,}11}$.

$\Delta_r G^0 + RT \ln K_T^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_r G^0 = -RT \ln K_T^0 = \mathbf{5{,}4\ kJ\,mol^{-1}}$.

5) *Réaction de N_2O_4 sur l'eau*

a) $NO_3^- + 2H^+ + 2e^- \rightleftarrows \frac{1}{2} N_2O_4 + H_2O$ ①

$\frac{1}{2} N_2O_4 + H^+ + e^- \rightleftarrows HNO_2$ ②

b) $N_2O_4 + H_2O \rightleftarrows H^+ + NO_3^- + HNO_2$ ② − ①

$\Delta_r G^0 = \Delta_r G_2^{0*} - \Delta_r G_1^{0*} = -RT \ln K^0 = -FE_2^0 + FE_1^0$

$$\boxed{K^0 = 10^{\left(E_2^0 - E_1^0\right)/0{,}06}} \quad = \mathbf{3{,}1\ 10^4}$$

c) A pH = 0, $E_3^0 > E_4^0 \quad \Rightarrow$ HNO_2 instable. Il se dismute en NO_3^- et NO.

d) $4\,NH_3 + 5\,O_2 \rightleftarrows 4\,NO + 6\,H_2O$

$NO + \frac{1}{2}O_2 \rightleftarrows NO_2$

$2\,NO_2 \rightleftarrows N_2O_4$

$N_2O_4 + H_2O \rightleftarrows H^+,\ NO_3^- + HNO_2$

$3\,HNO_2 \rightleftarrows H^+, NO_3^- + \underline{2\,NO} + H_2O$

B Deuxième Problème

I. Les acides aminés

1) a) Molécule possédant une fonction amine et une fonction acide carboxylique.

b) $H_2N - CH_2 - COOH$ ac 2-aminoéthanoïque ou glycine,
$H_2N - CH_2 - CH_2 - COOH$ ac 3-aminopropanoïque.

2) a) Oui car C^* est lié à 4 substituants différents

b) $-NH_2 > -COOH > -CH_2 - COOH > H \Rightarrow$ C est S

c) L-Asp est chiral car non superposable à son image spéculaire. Une solution de L-Asp est donc optiquement active. Elle fait dévier le plan de polarisation de la lumière d'un angle α.

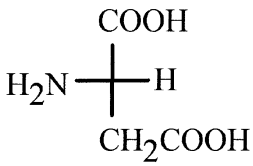
$\alpha = [\alpha]^D_{25}\ l.c$ $[\alpha]^D_{25}$ est le pouvoir rotatoire spécifique,

$[\alpha]^D_{25} > 0 \Rightarrow$ L.Asp est dextrogyre,

25 signifie à 25°C,

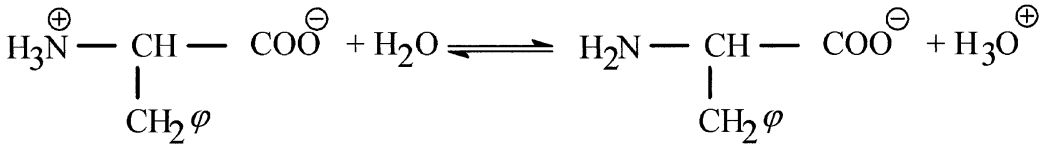
D raie D du sodium.

d)

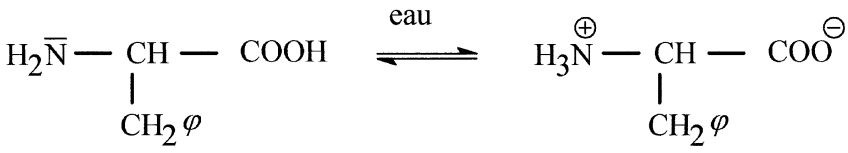


3) a) $pK_1 = 1{,}83,\quad pK_2 = 9{,}13.$

b) $CH_3\,COOH + H_2O \rightleftarrows CH_3\,COO^{\ominus} + H_3O^{\oplus}$



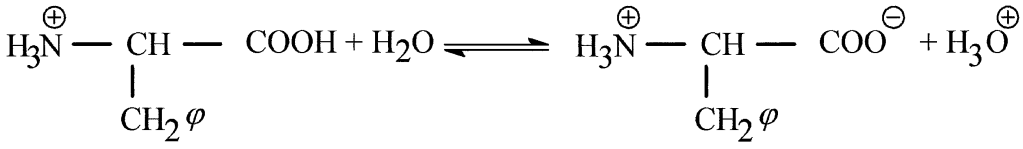
base conjuguée stabilisée par effet inductif attracteur de $-\overset{\oplus}{N}H_3$ donc l'acide est plus fort.

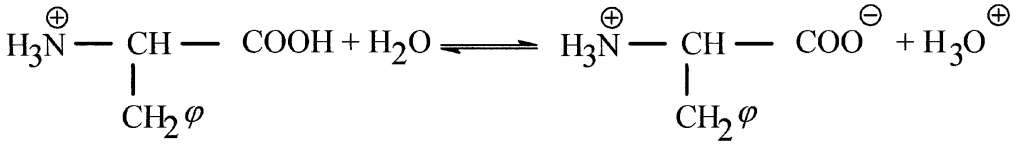


$$K = \frac{K_1}{K_2} = 2\ 10^7.$$

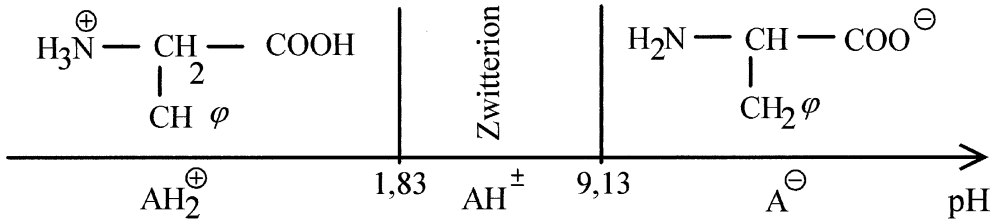
amphion ou zwitterion forme majoritaire dans l'eau.

d)





e)



f) **Hypothèse** : $2\,AH^{\pm} \rightleftarrows A^- + AH_2^+$ est Réaction Prépondérante peu avancée.

$\Rightarrow\ [A^-] = [AH_2^+] << [AH^+] \approx c_0$

$\Rightarrow\ K_1 K_2 = h^2 \quad \Rightarrow\ \boxed{pH = \frac{1}{2}\left(pK_1 + pK_2\right)} = 5{,}48.$

Vérifications :

$$\begin{cases} AH^{\pm} + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + A^- \\ AH^{\pm} + H_2O \rightleftarrows OH^- + AH_2^+ \end{cases}$$

sont elles négligeables ? C'est-à-dire :

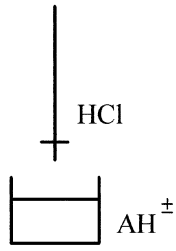
$[H_3O^+] << [A^-]$?

$[HO^-] << [A^-]$?

$$\left.\begin{array}{l} [A^-] = [AH^{\pm}] = c_0\,\alpha = c_0\sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}} = 1{,}1\ 10^{-5}\ mol.L^{-1} \\ [H_3O^+] = 3{,}3\ 10^{-6}\ mol.L^{-1} \\ [OH^-] = 3{,}0\ 10^{-9}\ mol.L^{-1} \end{array}\right\}$$

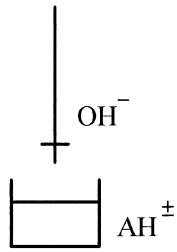
donc $[H_3O^+] << [A^-]$ n'est pas vérifiée. La formule est approchée. On garde **pH = 5,5**.

g)



Réaction du dosage $AH^{\pm} + H_3O^+ \rightleftarrows AH_2^+ + H_2O$, $K = \dfrac{1}{K_1} = 68 \Rightarrow$ dosage peu quantitatif.

$pH_{initial} = 5{,}5$ - pas de saut de pH visible.



Réaction de dosage $AH^{\pm} + OH^- \rightleftarrows A^- + H_3O^+$, $K = \dfrac{K_2}{K_e} = 7{,}4\ 10^4$. A priori le dosage semble quantitatif car $K > 10^4$.

$pH_{initial} = 5{,}5$. La courbe proposée montre que le saut de pH (c'est-à-dire le second) sera faible donc le dosage peu précis.

II. Synthèse des acides aminés constitutifs de l'aspartame

1) ① $Cl-CH_2-COOH$ ② $N \equiv C-CH_2-COOH$

$NaCO_3$ rend le milieu basique donc :

– neutralise ① en ①' $Cl-CH_2-COO^{\ominus}$,

– rend $CN^{\ominus}$ bon nucléophile,

– évite la formation de HCN.

Réaction SN_2 car RX primaire. Mécanisme concerté en une seule étape.

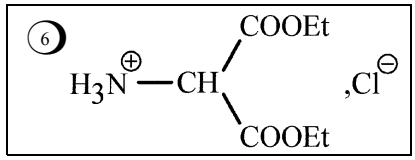
$v = k\,[1']\,[CN^-]$ ordre global = 2 si aucune dégénérescence.

2) ③ $HOOC-CH_2-COOH$ ④ $HOOC-\underset{\underset{Br}{|}}{CH}-COOH$

3) 1 Bromure d'alkylammonium,
2 Carboxylate d'ammonium,

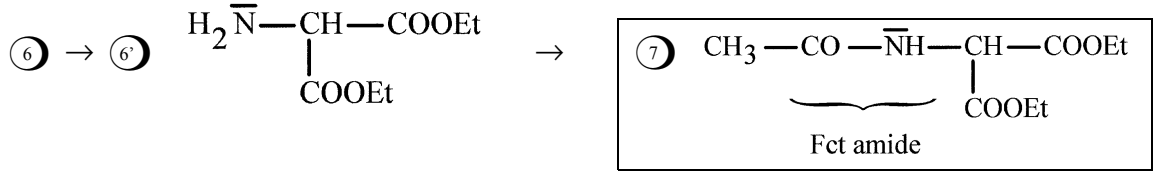
Il faut 3 équivalents de NH_3 - 1 joue le rôle de Nucléophile, 2 jouent le rôle de Base.

4)

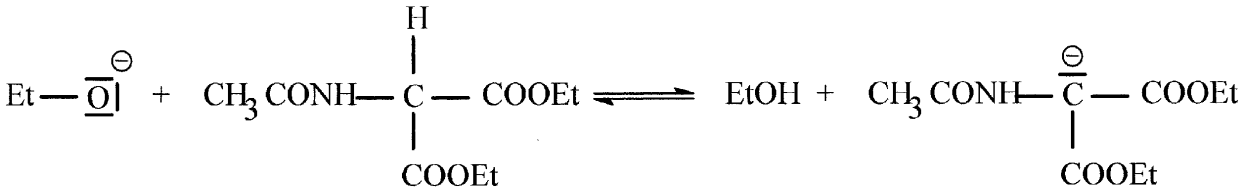


Estérification : non totale, lente, athermique. On chauffe pour accélérer, H_2SO_4 est un catalyseur. On peut partir du chlorure d'acide ou de l'anhydride correspondant.

5)

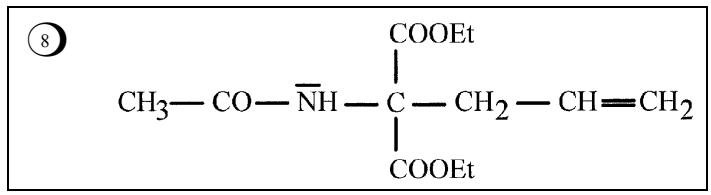


6) Réaction Acide-Base.



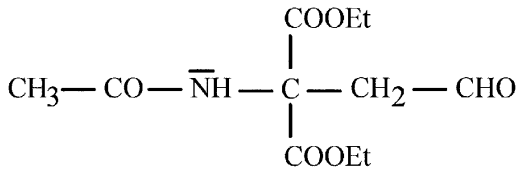
Carbanion nucléophile.

Réaction SN_2 ou SN_2'

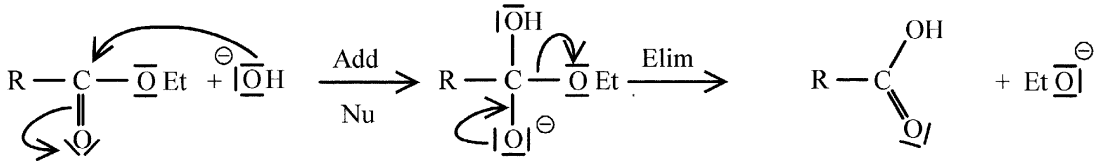


7) On aurait obtenu deux aldéhydes :

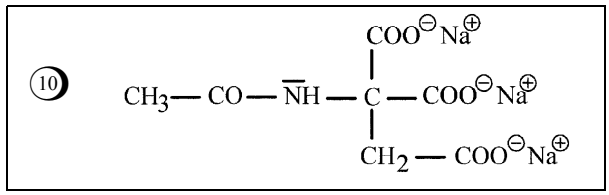
H_2CO et



8) Saponification



$$\frac{\text{Ac – Base}}{\text{totale}} > RCOO^{\ominus} + EtOH$$



9) On obtient le mélange racémique. La décarboxylation n'est pas stéréosélective.

III. Synthèse de l'aspartame (A)

1) *Préliminaires*

a) $RCOOH + R'NH_2 \underset{\text{Ac–Base}}{\rightleftarrows} RCOO^{\ominus}, H_3\overset{\oplus}{N}R' \xrightarrow{\text{deshydratation}} RCO-NH-R'$

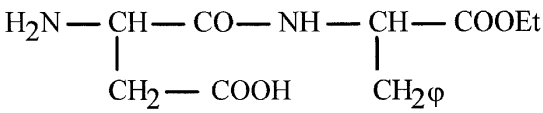
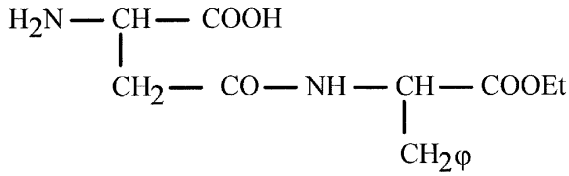
La seconde étape est difficile car $R'\overset{\oplus}{N}H_3$ n'est pas un bon nucléophile.

b) $AA_1 - AA_1$ soit $H_2\overline{N} - CHR^1 - CO - NH - CHR^1 - COOH$

$AA_1 - AA_2$

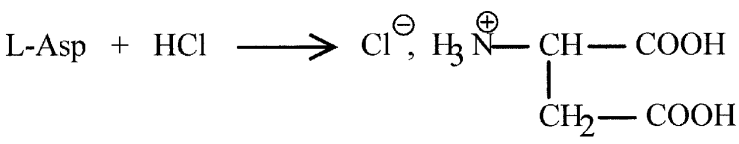
$AA_2 - AA_1$

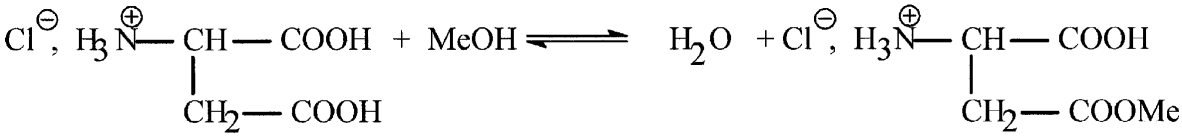
$AA_2 - AA_2$

c)  et 

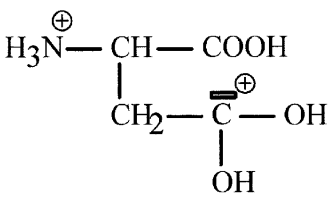
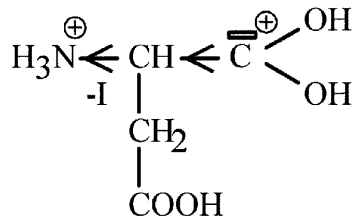
2) *Une synthèse de l'aspartame*

a)

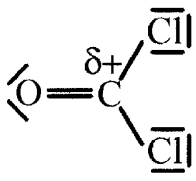




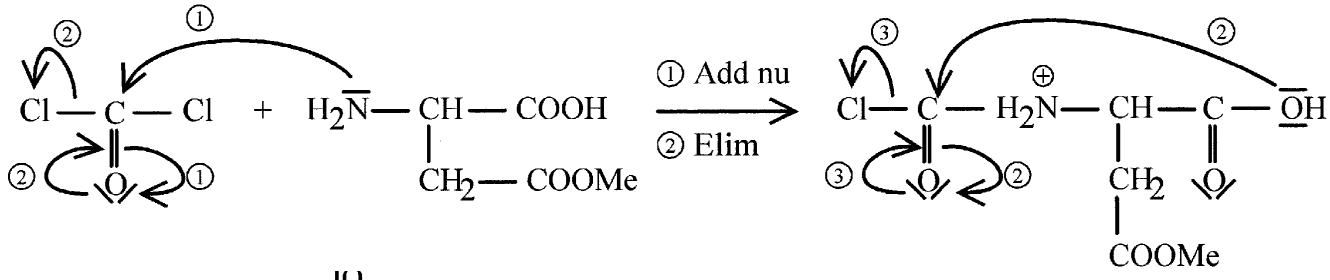
L'intermédiaire réactionnel formée dans l'estérification est dans ce cas :

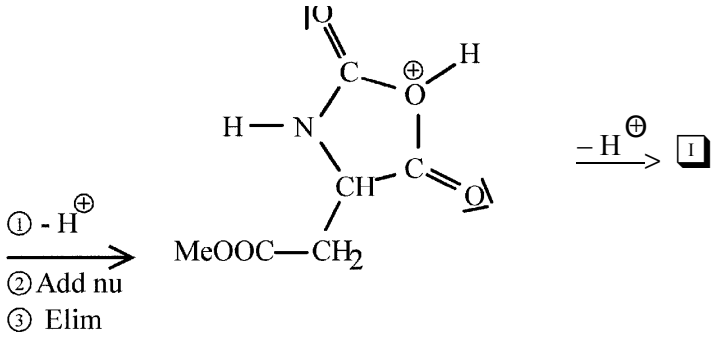
 alors que dans l'autre cas : 

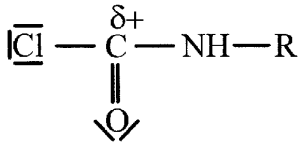
Le second est donc déstabilisé par l'effet inductif attracteur de $H_3N^{\oplus}$– donc se forme mal.

b)  C est électrophile δ+.

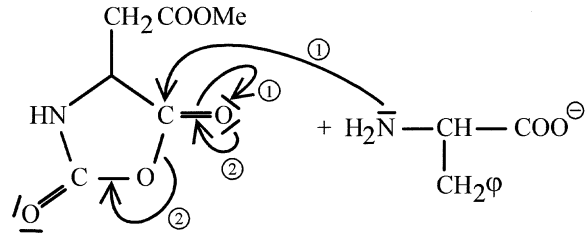
Les nucléophiles possibles sont la fonction amine puis le groupe $\overline{O}H$ (ou l'inverse !).



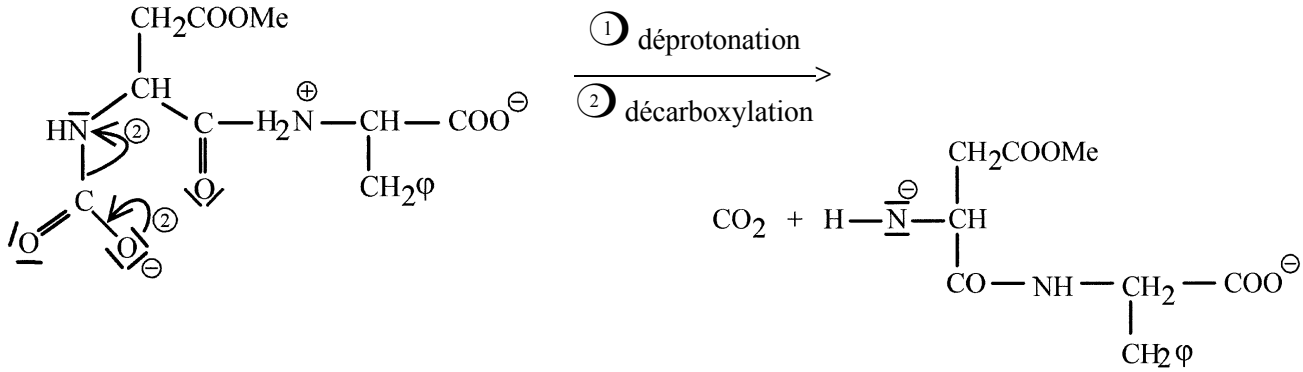


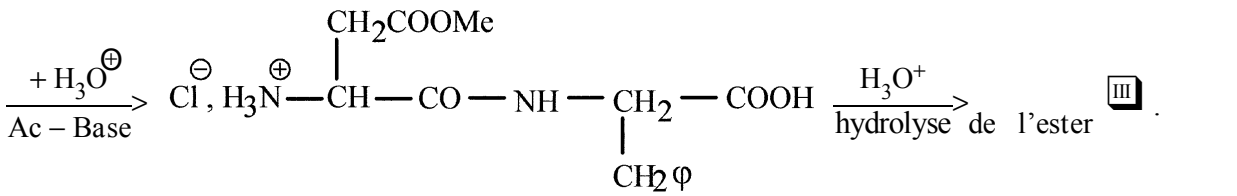
Rq 

est le second centre électrophile.

c) **Proposition :** 

la fonction «ester» est plus réactive donc on forme :





d) Esterification de la fonction acide terminale puis neutralisation.

e) Initial : 0,045 mole de L-Phe.

Final : $M_A = 294\ g.mol^{-1}$ soit 0,023 mole | Rdt = 52 % |

C.A.P.E.S

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de Physique avec applications - Session : 1994

CORRIGÉ DU PROBLÈME

1. PRÉLIMINAIRES

1.1. v = vitesse de propagation.

1.2. Onde sonore : déplacement, suppression.
Onde électromagnétique : champs électrique et magnétique.

1.3. Son : longitudinale, vibration dans le sens de propagation.
Onde elm : transversale, vibration $\perp$ direction de propagation.

1.4. –

1.5. Onde progressive en $\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$, régressive en $\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)$.

1.6. $\lambda = v\,T$.

2. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES SE PROPAGEANT DANS UN CÂBLE COAXIAL

2.1. **Calcul de la capacité linéique du câble coaxial.**

2.1.1. $Q = C\,(V_1 - V_2)$.

2.1.2. $\vec{E}$ radial, $E = \dfrac{Q}{2\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,h\,r}$.

2.1.3. $\displaystyle\int_{R_1}^{R_2} E\,dr = V_1 - V_2 \;\rightarrow\; C = \frac{2\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,h}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}} \;\rightarrow\; \gamma = \frac{2\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$.

2.1.4. *Application Numérique :* $\ln\dfrac{R_2}{R_1} = 1{,}25 \;\rightarrow\; \gamma = 0{,}1\ \text{nF.m}^{-1}$.

2.2. **Calcul du coefficient d'auto-inductance linéique du câble.**

2.2.1. Effet de peau → courants quasi surfaciques.

2.2.2. $\overrightarrow{B}$ orthoradial, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $B = 0$ hors de l'isolant.

2.2.3. $d\phi = BdS = \dfrac{\mu_0 I\, d}{2\pi}\left(\dfrac{dr}{r}\right) \rightarrow \phi = \dfrac{\mu_0 I\, a}{2\pi} \ln \dfrac{R_2}{R_1}$.

$$\frac{\phi}{I} = L = \frac{\mu_0\, a}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \rightarrow l = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} .$$

2.2.4. *Application Numérique :* $l = 0{,}251\ \mu H\ m^{-1}$.

2.3. **Équation d'ondes dans le câble coaxial.**

2.3.1. $V(x + dx, t) + (l\, dx)\dfrac{\partial I}{\partial t} = V(x, t) \rightarrow \dfrac{V(x + dx, t) - V(x, t)}{dx} = -l \dfrac{\partial I(x, t)}{\partial t}$

si $dx \rightarrow 0$: $\qquad \dfrac{\partial V}{\partial x} = -l \dfrac{\partial I}{\partial t}$

– loi de nœud : $\qquad I(x + dx, t) = I(x, t) - (\gamma\, dx)\dfrac{\partial V}{\partial t}$

$dx \rightarrow 0$: $\qquad \dfrac{\partial I}{\partial x} = -\gamma \dfrac{\partial V}{\partial t}$

2.3.2. $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial x} = -l \dfrac{\partial^2 I}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -\gamma \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial t}$

d'où : $\qquad \dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \gamma l \dfrac{\partial^2 I}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \gamma l \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}$

2.3.3. $v = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma l}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$.

2.3.4. $v = 200\,000\ km\ s^{-1}$.

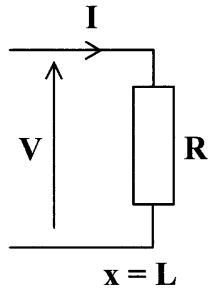
2.4. **Mise en évidence d'une grandeur caractéristique du câble.**

2.4.1. $V = V_0 \cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)\right]$, $I = I_0 \cos\left[\omega\left(t - \dfrac{x}{V}\right) + \varphi\right]$.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\omega}{v} V = -\, l \frac{\partial I}{\partial t} = -l\, \omega\, I \rightarrow \frac{V}{I} = l\, v = \sqrt{\frac{l}{\gamma}} \qquad \forall\ (x, t)$$

soit R_c = résistance caractéristique de la ligne (si on ferme la ligne sur R_c, la ligne est équivalente à R_c , pour la source).

2.4.2. $R_c = 50{,}1\ \Omega$.



2.5. **Étude de la ligne coaxiale, fermée sur une résistance.**

2.5.1. Loi de nœuds : $I = I_0 - I_1$.

2.5.2. $V_0 = R_c\, I_0$, $V_1 = R_c\, I_1$.

2.5.3. A l'abscisse L : $V(L, T) = R\, I(L, T)$

avec : $V(L, T) = V_0(L, T) + V_1(L, T)$ et $I(L, T) = I_0(L, T) - I_1(L, T)$

d'où : $R_c (I_0 + I_1) = R (I_0 - I_1)$ à l'abscisse L.

$-(R_c - R)\, I_0 = (R_c + R)\, I$ d'où : $\rho = \dfrac{I_1}{I_0} = \dfrac{R - R_c}{R + R_c}$.

2.5.4. $R_g = R_c$, le taux de réflexion à l'abscisse 0 sera nul, il ne pourra donc y avoir sur la ligne qu'une onde incidente et une onde réfléchie.

2.5.5. Voir montage C.A.P.E.S.

3. ONDES SONORES DANS UN TUYAU

3.1. **dm = μS dx**, «tranche» isolée :

forces de pression $f(x, t) = \left[p(x, t) + P_0\right] S$, $f(x + dx, t) = -\left[p(x + dx, t) + P_0\right] S$.

En projection horizontale, la RFD donne :

$$[p(x, t) - p(x + dx, t)]\, S = (\mu S\, dx) \frac{\partial v}{\partial t}$$

soit $dx \to 0$: $$-\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial v}{\partial t}$$.

3.2. On écrit que : (le débit massique entrant) - (le débit massique sortant) est égal au débit massique à l'intérieur, en utilisant le fait que les variations de μ sont très faibles (hypothèses).

Soit : $$-\mu(x + dx, t)\, S\, v(x + dx, t) + \mu(x, t)\, S\, v(x, t) = \frac{\partial \mu}{\partial t} S\, dx$$

et : $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = -\mu \dfrac{\partial v}{\partial x}$ (quand $dx \to 0$).

3.3. $\chi = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial p} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial p}$, d'où avec $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = \dfrac{\partial \mu}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial t}$:

$$\chi \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

3.4. Comme au § 2.3.2. : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \mu\chi \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}$.

3.5. $v = \dfrac{1}{\sqrt{\chi\mu}}$.

3.6. 3.6.1. $\chi_T = \dfrac{1}{p}$.

3.6.2. Isentropique d'un gaz parfait : $\dfrac{dp}{p} + \gamma \dfrac{dV}{V} = 0$

soit : $\left(\dfrac{\partial p}{\partial V}\right)_S = \gamma \dfrac{p}{v}$, $\chi_S = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \dfrac{1}{\gamma p} = \dfrac{\chi_T}{\gamma}$

3.6.3. $\mu = \dfrac{PM}{RT} \rightarrow v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\chi}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{PM}{RT}\chi}} = \sqrt{\dfrac{RT}{PM\,\chi}}$

si T = cstte : $v = \sqrt{\dfrac{RT}{M}}$, si S = cstte : $v = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$.

3.6.4. *Application Numérique :* $\sqrt{\dfrac{RT}{M}} = 290\ \text{m.s}^{-1} \Rightarrow$ transformation isentropique

$$\gamma = 1{,}40.$$

4. PROPAGATION D'ONDES SUR UNE CORDE TENDUE

4.1. sin Ox : $T(s + ds)\cos(\theta + d\theta) - T(s)\cos\theta = (\rho\ ds)\dfrac{d^2x}{dt^2}$

sin Oy : $T(s + ds)\sin(\theta + d\theta) - T(s)\sin\theta = (\rho\ ds)\dfrac{d^2y}{dt^2}$.

4.2. θ petit, et $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \rightarrow T(s + ds) \approx T(s) \rightarrow T = \text{cstte}$

$\sin\theta = \dfrac{dy}{ds}$, $\cos\theta = \dfrac{dx}{ds} \approx 1 \Rightarrow dx = ds.$

4.3. $T\,.\,(\theta + d\theta) - T\,.\,(\theta) = \rho\, ds \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ $\quad (\sin(\theta) \sim \theta)$

soit $T\, d\theta = \rho\, dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, soit $T \dfrac{d\theta}{dx} = \rho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$\operatorname{tg}\theta \approx \theta = \dfrac{dy}{dx} \rightarrow \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ et $T \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$,

donc : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{\rho}{T} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$, $v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$.

4.4. *Application Numérique :* $v = 291\ ms^{-1}$.

4.5. Ondes transversales $\left(\begin{matrix} \uparrow \\ y\ (\vec{x},\ t) \\ // \end{matrix} \right)$.

4.6. 4.6.1. $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_1 \cos\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right) + y_2 \cos\omega\left(t + \dfrac{x}{v}\right)$.

4.6.2. $y(0, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow y_1 \cos\omega t + y_2 \cos\omega t = 0 \rightarrow y_1 = -y_2$

$y(L, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow y_1\left[\cos\omega\left(t - \dfrac{L}{v}\right) - \cos\omega\left(t + \dfrac{L}{v}\right)\right] = 0$

soit : $\sin\left(\dfrac{\omega L}{v}\right) = 0 \rightarrow \dfrac{\omega L}{v} = n\pi$ (n est entier > 0)

$\omega = 2\pi f$, les fréquences cherchées sont : $f = n \dfrac{v}{2L} = \dfrac{n}{2L} \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$.

$g = n f_0$ (f_0 est la fréquence du «fondamental», les autres sont les harmoniques).

4.6.3. *Application Numérique :* $f_0 = 441$ Hz.

4.6.4. – Sons graves : corde massive.
– Sons aigus : corde légère.
– L'accord consiste à régler la tension T.

4.6.5. Corde de Melde.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE D'OPTIQUE

Questions 1 à 6 : questions de cours.

7. $v = \dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{f_1'} + \dfrac{1}{f_2'} - \dfrac{e}{f_1' f_2'}$, avec $\Delta = \overline{F_1' F_2} = -f_1' + e - f_2'$.

$v = \dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{f_1'} + \dfrac{1}{f_2'} - \dfrac{\left(f_1' + f_2' + \Delta\right)}{f_1' f_2'} = -\dfrac{\Delta}{f_1' f_2'}$, d'où $f' = -\dfrac{f_1' f_2'}{\Delta}$.

8. $f' = -\dfrac{f_1'^2}{\Delta} = -\dfrac{f_1'^2}{e - 2f_1'} \rightarrow e = \dfrac{16}{5}\text{ cm} = 3{,}2\text{ cm}.$

9. Avec les formules de Newton : $\overline{F_2' F'} = \dfrac{f_1'^2}{D}$ et $\overline{F_1 F} = -\dfrac{f_1'^2}{\Delta} = \pm 5\text{ cm}.$

Soit : $\overline{O_2 F'} = 3\text{ cm}$; $\overline{O_1 F} = -3\text{ cm}.$

10. Le film doit être dans le plan focal image.
Encombrement : $\overline{O_1 F'} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F'} = 6{,}2\text{ cm}.$

11. «Tirage» de l'objectif : (formule de Newton appliquée à l'objectif)

$$\overline{FA} \cdot \overline{F' A'} = -f'^2 \quad \text{avec} \quad \overline{FA} = \overline{F O_1} + \overline{O_1 A} = -47\text{ cm}$$

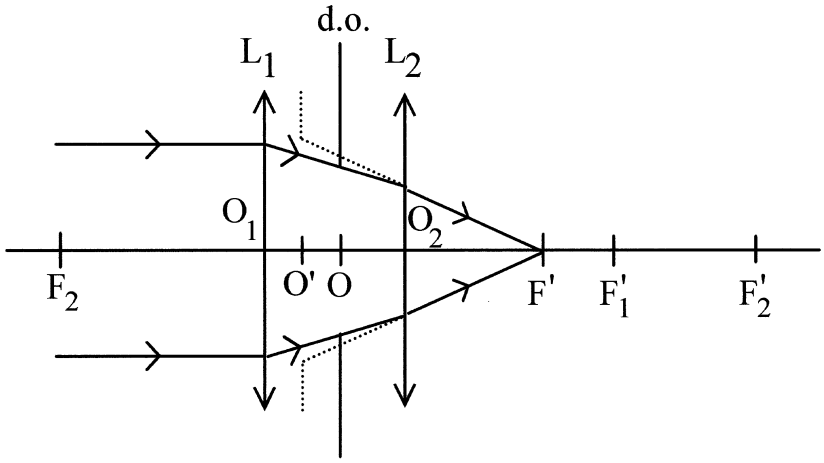
$\overline{F' A'} = +0{,}53$ cm. Il faut pouvoir «reculer» le film de 5,3 mm.

12. La pupille de sortie est l'image du d.0 à travers la lentille L_2.

$$\frac{1}{\overline{O_2 O'}} = \frac{1}{\overline{O_2 O}} + \frac{1}{f_1'} \quad , \quad \frac{1}{\overline{O_2 O'}} = -\frac{2}{e} + \frac{1}{f_1'} \rightarrow \overline{O_2 O'} = -2\text{ cm}$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{\overline{O_2 O'}}{\overline{O_2 O}} = \frac{5}{4} \quad , \quad \overline{O' F'} = \overline{O' O_2} + \overline{O_2 F'} = 5\text{ cm}.$$

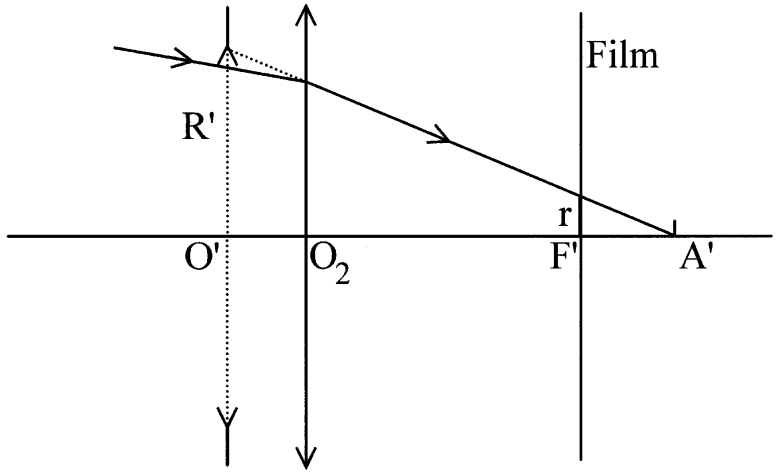
13.



14. On a : $\dfrac{r}{R'} = \dfrac{x'}{\overline{O' F'} + x'}$

$$\frac{r}{R'} = \frac{x'}{5 + x'} \quad \text{(en cm)}$$

et avec $xx' = -f'^2$ $\qquad r = \dfrac{-5R'}{x - 5}$ (en cm).



15. Profondeur de champ : $x_0 = \overline{FA_0} = -5\left(\dfrac{R' - r_0}{r_0}\right)$ (cm)

avec : $R' = \dfrac{f'}{8} = \dfrac{5}{8}$ cm , $\overline{FA_0} \approx \dfrac{-25}{8 \,.\, 50 \,.\, 10^{-6}}$ (cm)

soit profondeur de champ ≈ de 6,4 m à l'∞.

16. 16.1. Si n.o ↘, R' ↗ le flux lumineux (Puissance) augmente.

16.2. La profondeur de champ diminue pour un réglage à l'infini.

16.3. Surexposition, distorsion (non respect des conditions de Gauss).

16.4. Le flux lumineux entrant est proportionnel à la surface, donc à R^2.

16.5. $$W = P.t = \text{cstte}$$

avec : $$P = k\,R^2 = k'\,R'^2 = k'\,\frac{f'^2}{4\,(n.o)^2}$$

donc : $$\frac{t}{(n.o)^2} = \text{cstte}.$$

16.6. Quand on augmente d'un «cran» le n.o, il faut diviser par deux le temps de pose.

C.A.P.E.S

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

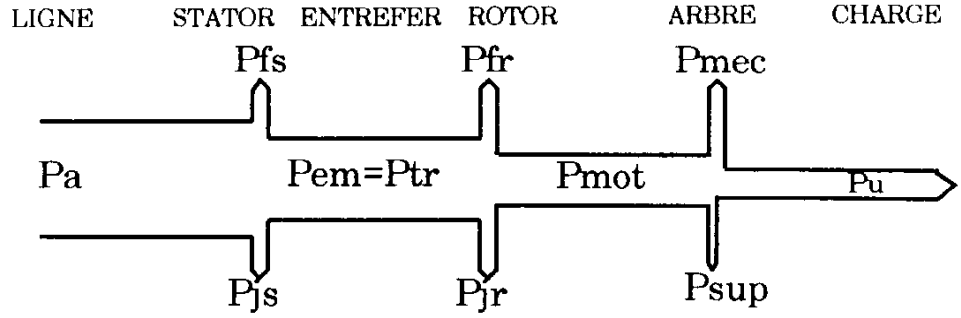
Composition d'Électronique - Électrotechnique
avec applications - Session : 1994

---

1 Moteur asynchrone

1.1 Analyse des essais

1.1.1 Bilan des puissances :



P_a = puissance absorbée au stator = $\sqrt{3}\ U\ I_1 \cos\varphi = 3\ V\ J_1 \cos\varphi$.

P_{js} = pertes par effet Joule au stator = $3\ r_1\ J_1^2$. P_{fs} = pertes dans le fer du stator .
P_{em} = puissance électromagnétique ou transmise au rotor = $P_a - P_{js} - P_{fs}$.
P_{jr} = pertes par effet Joule au rotor = $3\ 3\ r_2\ J_2^2 = g\ P_{em}$.
P_{fr} = pertes dans le fer du rotor ; ces pertes sont généralement négligées.
P_{mot} = puissance motrice = $P_{em} - P_{jr} - P_{fr} \cong (1-g)\ P_{em}$. P_{mec} = pertes mécaniques .
P_{supp} = pertes supplémentaires en charge; ces pertes sont négligées.
P_u = puissance utile = $P_{mot} - P_{mec}$.

1.1.2 Lors de l'essai à vide, la puissance utile est nulle : $P_v = P_{jsv} + P_{fs} + P_{em}$.
$P_{em} = P_{jr} + P_{mec} = g_v P_{em} + P_{mec}$;

1.1.3 Nous en déduisons : $(1-g_v)P_{em} = \dot{P}_{mec} = (1-g_v)\ (P_v - P_{jsv} - P_{fs})$.
Numériquement, $g_v = (n_s - n_v) / n_s = 6\ \%$; $P_{jsv} = 3r_1\ I_v^2 = 2{,}4$ W (couplage étoile) d'où:

$$0{,}94\ P_{fs} + P_{mec} = 280\ \text{W}\ .$$

1.1.4 Lors de l'essai au synchronisme, le glissement g est nul. Le moment du couple électromagnétique est aussi nul. Les pertes mécaniques sont alors fournies par la machine d'entraînement. Le courant rotor est aussi nul. Nous avons : $P_o = P_{jso} + P_{fs}$.

1.1.5 Numériquement $P_{jso} = 3r_1\ I_o^2 = 0{,}7$ W ; nous en déduisons $P_{fs} = 149$ W. De la question 1.1.2, nous déduisons $P_{mec} = 140$ W.

1.1.6 Au point nominal, nous avons $P_u = 10\,000$ W ; $P_{mot} = P_u + P_{mec} = 10\,140$ W.
Le glissement vaut $g = (1\,500 - 1\,320) / 1500 = 12\ \%$. La puissance électromagnétique est $P_{em} = P_{mot} / (1-g) = 11\,523$ W et les pertes rotoriques valent $gP_{em} = 1\,383$ W.
Les pertes par effet Joule au stator valent $P_{js} = 3r_1\ I_n^2 = 60$ W; d'où $P_a = 11\,732$ W.
Le rendement est : $\eta = P_u / P_a = 85{,}2\ \%$.

1.1.7 Nous avons $P_a = \sqrt{3}\ U\ I \cos\varphi$ d'où $\cos\varphi = 11\,732 / (\sqrt{3} \times 380 \times 20) = 0{,}89$ AR.

1.2 Recherche du modèle équivalent

1.2.1 Le flux est dit "forcé" s'il ne dépend que de la tension V; il est en particulier indépendant du courant stator I. Ceci amène à "faire passer en tête" la bobine modélisant le circuit magnétique statorique (hypothèse de Kapp pour le transformateur).

1.2.2 r_1 modélise la résistance statorique donc les pertes par effet Joule au stator. x_1 est la réactance ***cyclique*** de fuites du stator. R_o modélise les pertes dans le fer du stator. X_o modélise les pertes réactives dans le fer; cette réactance est parcourue par le courant magnétisant. r modélise la résistance rotorique ramenée au stator donc les pertes par effet Joule au rotor. x modélise la réactance cyclique de fuites du rotor, ramenée au stator. $(1-g)r/g$ modélise la puissance motrice.

1.2.3 R_o modélisant les pertes dans le fer du stator, nous avons : $P_{fs} = 3V^2 / R_o$ d'où: $R_o = 974\ \Omega$.
Dans l'essai au synchronisme g = 0 donc aucun courant ne circule dans $r + r_1$ et dans X
$P_o = 3\ V\ I_o \cos\varphi_o$ donne $\cos\varphi_o = 0{,}108$ d'où $\varphi_o = 83{,}8°$. Le courant magnétisant est $I_\mu = I_o \sin\varphi_o = 2{,}09$ A donc $X_o = V / I_\mu = 105\ \Omega$.

1.2.4 Dans l'essai à rotor bloqué g = 1; il n'y a aucune puissance motrice.
Une phase est alimentée sous $V_{cc} = U_{cc} / \sqrt{3} = 73{,}3$ V.
Chaque phase absorbe la puissance active $p_{cc} = P_{cc} / 3 = 533$ W, la puissance apparente $s_{cc} = V_{cc} I_{cc} = 1\ 467$ VA et la puissance réactive $q_{cc} = \sqrt{(s_{cc}^2 - p_{cc}^2)}$ soit $q_{cc} = 1\ 366$ vars.
Soit I_{tcc} le courant circulant dans X, p_{tcc} , q_{tcc} et s_{tcc} respectivement les puissances active, réactive et apparente consommées par l'impédance $r + r_1 + jX$, le bilan des puissances donne : $p_{cc} = V_{cc}^2 / R_o + p_{tcc}$ et $q_{cc} = V_{cc}^2 / X_o + q_{tcc}$; nous en déduisons:
$p_{tcc} = 528$ W ; $q_{tcc} = 1315$ VAR ; $s_{tcc} = 1\ 417$ VA.
L'intensité de travail est $I_{tcc} = s_{tcc} / V_{cc} = 19{,}3$ A. D'où :

$$r = p_{tcc} / I_{tcc}^2 - r_1 = 1{,}36\ \Omega \text{ et } X = q_{tcc} / I_{tcc}^2 = 3{,}53\ \Omega.$$

1.2.5 L'impédance " de travail" est : $Z_t = r + r_1 + r(1-g)/g + jX = 11{,}38 + j\ 3{,}53$ soit $Z_t = (11{,}92\ \Omega\ ;\ 17{,}23°)$. Le courant efficace de travail est : $I_t = V / |Z_t| = 18{,}46$ A. Nous en déduisons les puissances : $p_t = [r + r_1 + r(1-g)/g]\ I_t^2 = 3\ 879$ W; $q_t = X I_t^2 = 1\ 203$ VAR
Les puissances active et réactive absorbées par une phase sont :
$p = p_t + V^2 / R_o = 3\ 929$ W ; $q = q_t + V^2 / X_o = 1\ 664$ VAR; la puissance apparente est donc $s = 4\ 267$ VA d'où $I = s / V = 19{,}4$ A; cette valeur est proche de la valeur indiquée sur la plaque signalétique.

1.3 Expression du moment du couple mécanique

1.3.1 Le couple mécanique correspond à la puissance mécanique ou motrice et à la vitesse $\Omega = (1-g)\ \Omega_s$ ou à la puissance électromagnétique et à la vitesse Ω_s.
Prenons la première définition :
La puissance motrice est modélisée par $(1-g)\ r/g$ par phase; elle vaut donc :
$P_{mot} = 3\ (1-g)\ r\ I_t^2 / g$ avec $I_t = V / |Z_t| = V / \sqrt{[(r_1 + r/g)^2 + X^2]}$; il vient :
$P_{mot} = (3\ V^2\ (1-g) r/g\ ) / [(r_1 + r/g)^2 + X^2]$.
Le moment du couple mécanique est $T_M = P_{mot} / (1-g)$ d'où:

$$T_M = (3\ V^2\ r / g\ \Omega_s) / [(r_1 + r/g)^2 + X^2] = (3\ V^2 / \Omega_s)\ g\ r / [(r + g\ r_1)^2 + (g\ X)^2]$$

1.3.2 Au démarrage le glissement est g = 1; nous en déduisons :

$T_{Md} = (3\ V^2 / \Omega_s)\ r / [(r + r_1)^2 + (X)^2]$

Avec V = 220 V et $\Omega_s = 2\pi f / p = 50\ \pi$ rad/s, il vient T_{Md} = 87 Nm.

1.3.3 Dérivons l'expression du moment T_M par rapport à la variable g :

$dT_{Md} / dg = (3\ V^2\ r / \Omega_s)\ [r^2 - g^2 (r_1^2 + X^2)] / [(r + g\ r_1)^2 + (g\ X)^2]^2$. Cette dérivée s'annule pour $\pm g_o = r / \sqrt{(r_1^2 + X^2)}$. L'étude rapide du signe de la dérivée montre que T_M est maximal pour $g = g_o$.

Le calcul de dérivée peut être évité en posant x = g/r; il vient alors :

$T_M = (3V^2 / \Omega_s)\ (1/x) / [(r_1 + 1/x)^2 + X^2] = (3V^2 / \Omega_s) / [x(r_1^2 + X^2) + 1/x + 2r_1]$; la fonction est maximale lorsque le dénominateur est minimal, c'est à dire pour $x(r_1^2 + X^2) + 1/x$ minimal; ce polynôme formé de la somme de deux termes dont le produit est constant est minimal lorsque les deux termes sont égaux soit pour $x_o^2 = 1 / (r_1^2 + X^2)$. On retrouve la valeur de g_o précédente.

1.3.4 En remplaçant r/g par $\sqrt{(r_1^2 + X^2)}$, ou x par x_o, il vient tous calculs faits :

$T_{Mmax} = (3\ V^2 / 2\ \Omega_s) / [r_1 + \sqrt{(r_1^2 + X^2)}]$.

1.3.5 Numériquement : g_o = 38,5 % et T_{Mmax} = 129 Nm.

Remarque: en négligeant r1 : $g_o = r / X$ = 38,5 % et T_{Mmax} = 131 Nm.

1.4 Fonctionnement à fréquence variable

1.4.1 Nous pouvons utiliser la relation de Boucherot : $V = 2{,}22\ K_b N f \Phi_{max}$ avec N nombres de conducteurs par phase et K_b facteur de bobinage du stator.

Nous avons donc $V = k f \Phi$. Numériquement $k\Phi = V / f$ = 4,4 Vs.

1.4.2 a = X/f = 3,53/50 = 70,6 mH.

Dans l'expression du 1.3.4 remplaçons V par $k\Phi\ f$ = 4,4 f, Ω_s par $2\pi f / p = \pi f$ et X par af, il vient :

$$T_{Mmax} = 3(k\Phi)^2 f / 2\pi[r_1 + \sqrt{(r_1^2 + a^2 f^2)}]$$

1.4.3 Si V / f = Cste, $k\Phi$ = Cste = 4,4; il vient :

$T_{Mmax} = 9{,}24\ f / [0{,}05 + \sqrt{(2{,}5 10^{-3} + 4{,}98.10^{-3} f^2)}]$ d'où le tableau :

f (Hz)	1	10	20	30	40	50
T_{Mmax} (Nm)	67,7	122	126	128	129	129

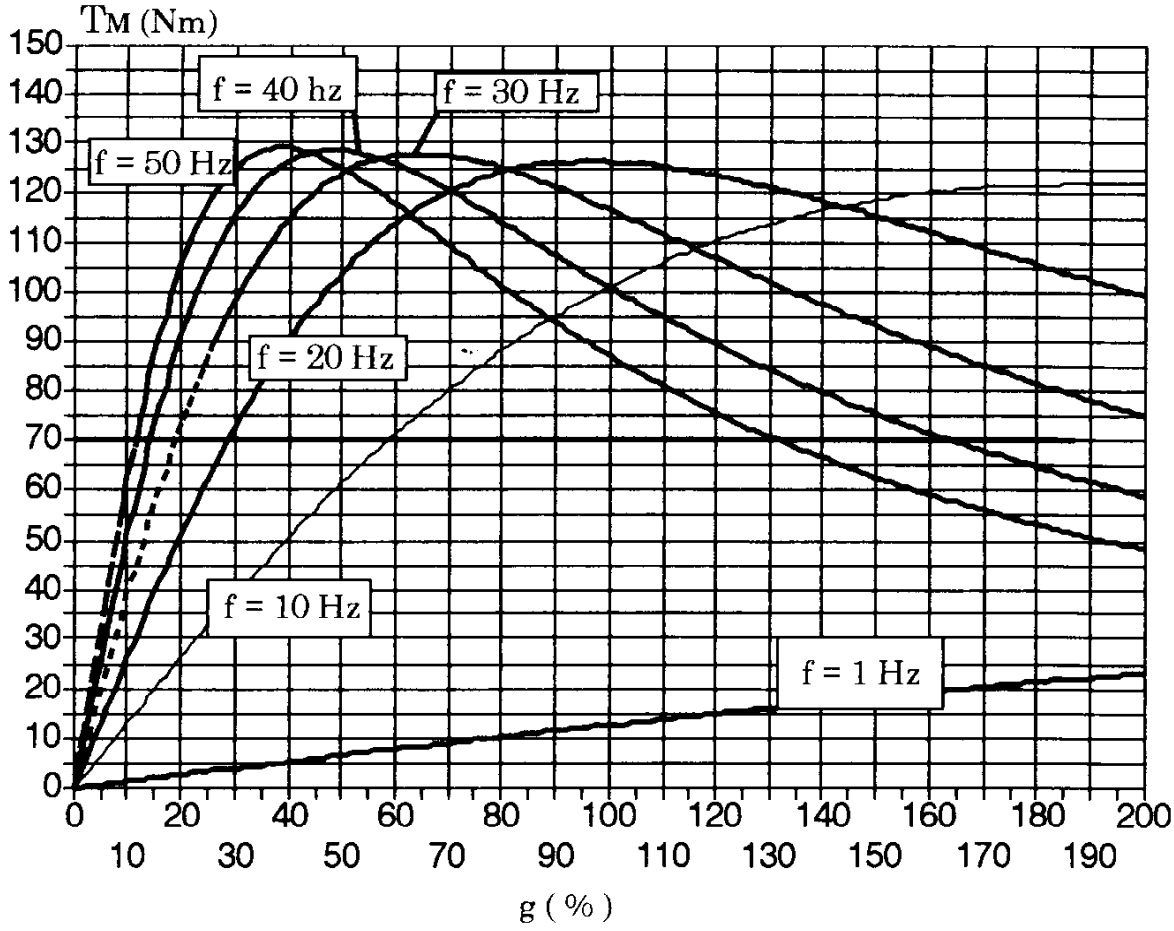
1.4.4 L'expression du couple au démarrage en fonction de la fréquence est :

$T_{Md} = 18{,}5\ f\ r / [(r + r_1)^2 + (a\ f)^2]$ d'où le tableau :

f (Hz)	1	10	20	30	40	50
T_{Md} (Nm)	12,6	101	126	117	101	87

1.4.5 Pour esquisser les graphes demandés, nous utilisons les valeurs des tableaux précédents et le tableau des valeurs de g_o :

f (Hz)	1	10	20	30	40	50
g_o(%)	1 572	192	96,3	64,2	48,2	38,5



1.4.6 La diminution de la fréquence provoque la diminution de la pente de TM au voisinage de g = 0. Pour f = 1 Hz, le moteur ne peut fournir le couple nominal de moment voisin de 70 Nm.
Pour un même couple le glissement sera d'autant plus élevé que la fréquence sera faible ; le rendement étant inférieur à 1-g, diminuera donc avec la fréquence. Par exemple pour f = 10 Hz, g = 60 % donc le rendement est inférieur à 40 %.

2 Etude d'un onduleur de tension

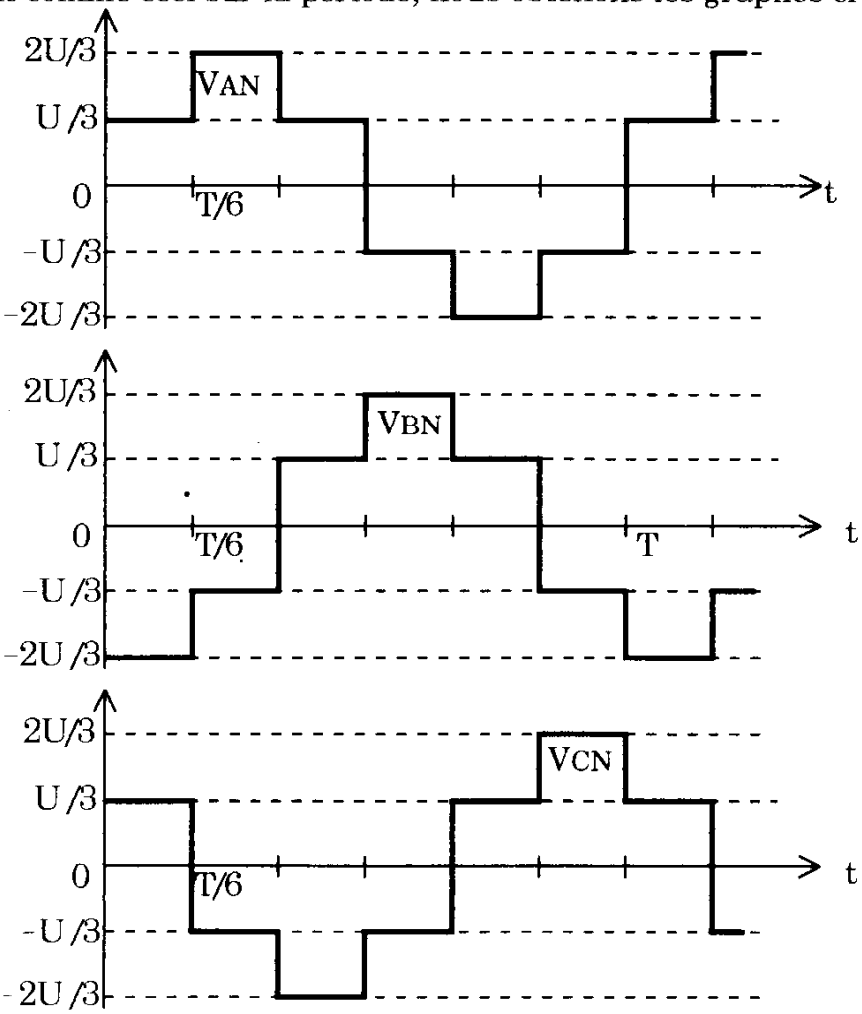
2.1 Etude des formes d'ondes

2.1.1 Donnons le principe du calcul des tensions par phase. Appelons V_{A-} la tension du point A par rapport au pôle - de la source continue.
Pour H1 fermé, nous avons $V_{A-} = U$ et pour H6 fermé, $V_{A-} = 0$.
De même pour H2 fermé, nous avons $V_{B-} = U$ et pour H5 fermé, $V_{B-} = 0$. Pour H3 fermé, nous avons $V_{C-} = U$ et pour H4 fermé, $V_{C-} = 0$.
Connaissant ces tensions, nous calculons les tensions composées :

$U_{AB} = V_{A-} - V_{B-}$; $U_{BC} = V_{B-} - V_{C-}$; $U_{CA} = V_{C-} - V_{A-}$.

Pour calculer les tensions simples, nous utilisons :
(1) $V_{AN} - V_{BN} = U_{AB}$; (2) $V_{BN} - V_{CN} = U_{BC}$ et (3) $V_{AN} + V_{BN} + V_{CN} = 0$; en utilisant (2) et (3), nous obtenons : (4) $V_{AN} + 2V_{BN} = U_{BC}$; avec (1) et (4), nous calculons :
$V_{BN} = (U_{BC} - U_{AB})/3$; $V_{AN} = U_{AB} + V_{BN}$; $V_{CN} = -V_{AN} - V_{BN}$.
Par exemple :
pour $0 < t < T/6$: $V_{A-} = U$; $V_{B-} = 0$; $V_{C-} = U$ donc $U_{AB} = U$; $U_{BC} = -U$; $U_{CA} = 0$;
$V_{BN} = -2U/3$; $V_{AN} = U/3$; $V_{CN} = U/3$.

pour $T/6 < t < T/3$: $V_{A-} = U$; $V_{B-} = 0$; $V_{C-} = 0$ donc $U_{AB} = U$; $U_{BC} = 0$; $U_{CA} = -U$; $V_{BN} = -U/3$; $V_{AN} = 2U/3$; $V_{CN} = -U/3$.
En opérant comme ceci sur la période, nous obtenons les graphes ci-dessous:



2.1.2 Calculons la valeur efficace d'une tension simple. La tension étant une fonction constante par intervalles, nous n'avons pas besoin de calcul intégral. V_{AN} est égale à $\pm U/3$ pendant $2T/3$ et à $\pm 2U/3$ pendant $T/3$ d'où :
$V = \sqrt{\{[(U^2/9)(2T/3) + (4U^2/9)(T/3)]/T\}} = \sqrt{2}\,U/3$.

2.1.3 La tension $V_{AN}(t)$ étant impaire [$V_{AN}(-t) = -V_{AN}(t)$] et alternative [$V_{AN}(t + T/2) = -V_{AN}(t)$] , son développement en série de Fourier ne comporte que des termes en sinus de rang impair :
$V_{AN} = \Sigma A_{2p+1} \sin[(2p+1)\theta]$ somme étendue de p = 0 à l'infini.
$V_{BN} = \Sigma A_{2p+1} \sin[(2p+1)(\theta - 2\pi/3)]$; $V_{CN} = \Sigma A_{2p+1} \sin[(2p+1)(\theta + 2\pi/3)]$;
Pour $2p+1 = 3k$, les harmoniques des trois tensions sont en phase;
comme $V_{AN} + V_{BN} + V_{CN} = 0$, nous en déduisons que $A_{3k} = 0$.
Vérifions par le calcul, nous avons :

$$A_{2p+1} = (1/\pi)\int_0^{2\pi} V_{AN}(\theta) \sin[(2p+1)\theta]\, d\theta = (2/\pi)\int_0^{\pi} V_{AN}(\theta) \sin[(2p+1)\theta]\, d\theta$$

$$A_{2p+1} = (2/\pi) \int_0^{\pi/3} (U/3) \sin[(2p+1)\theta]\, d\theta + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (2U/3) \sin[(2p+1)\theta]\, d\theta + \int_{2\pi/3}^{\pi} (U/3) \sin[(2p+1)\theta]\, d\theta$$ soit :

$A_{2p+1} = [2U/3\pi(2p+1)] [1 - \cos(2p+1)\pi + \cos(2p+1)\pi/3 - \cos(2+p+1)2\pi/3]$.
Avec $\cos(2p+1)\pi = \cos\pi = -1$; $\cos p - \cos q = 2\sin(p+q)/2 \sin(p-q)/2$, il vient:
$A_{2p+1} = [4U/3\pi(2p+1)] [1 + \sin(2p+1)\pi/2 \sin(2p+1)\pi/6]$
$\sin(2p+1)\pi/2 = \sin(p\pi + \pi/2) = (-1)^p$.
$A_{2p+1} = [4U/3\pi(2p+1)] [1 + (-1)^p \sin(2p+1)\pi/6]$.
Pour $2p+1 = 3k$ avec k impair, en reprenant la première forme:
$A_{2p+1} = [2U/3\pi(2p+1)] [2 + \cos k\pi - \cos 2k\pi]$. Pour k impair $\cos k\pi = -1$ donc tous le termes de rang multiple de 3 sont nuls. Nous n'avons donc que les harmoniques de rang 1, 5, 7, 11, 13, 17... Pour tous ces harmoniques, nous vérifions numériquement que : $1 + (-1)^p \sin(2p+1)\pi/6 = 3/2$.
Nous obtenons : $V_{AN} = (2U/\pi) [\sin\theta + (\sin 5\theta)/5 + (\sin 7\theta)/7 + (\sin 11\theta)/11 + \ldots]$

2.1.4 L'amplitude du fondamental est $2U/\pi$, nous en déduisons $V_1 = \sqrt{2}\, U/\pi$.

2.1.5 $\tau_h = \sqrt{(V^2 - V_1^2)}/V_1 = \sqrt{[(V/V_1)^2 - 1]}$; $V/V_1 = \pi/3$ d'où $\tau_h = 31{,}1\ \%$.

2.1.6 $U = \pi V_1/\sqrt{2} = 489$ volts.

2.2 Courant dans un interrupteur

2.2.1 H1 est fermé de 0 à T/2 et ouvert de T/2 à T. i_{H1} est donc égal à i_A 0 à T/2 et à 0 de T/2 à T (voir figure).

2.2.2 Pour H1 fermé, la tension à ses bornes est nulle; pour H1 ouvert, H6 est fermé donc la tension aux bornes de H1 est égale à U.

2.2.3 A $T^-/2$, $i_{H1} = i_A = I\sqrt{2} \sin(\pi - \varphi) = I\sqrt{2} \sin\varphi$.

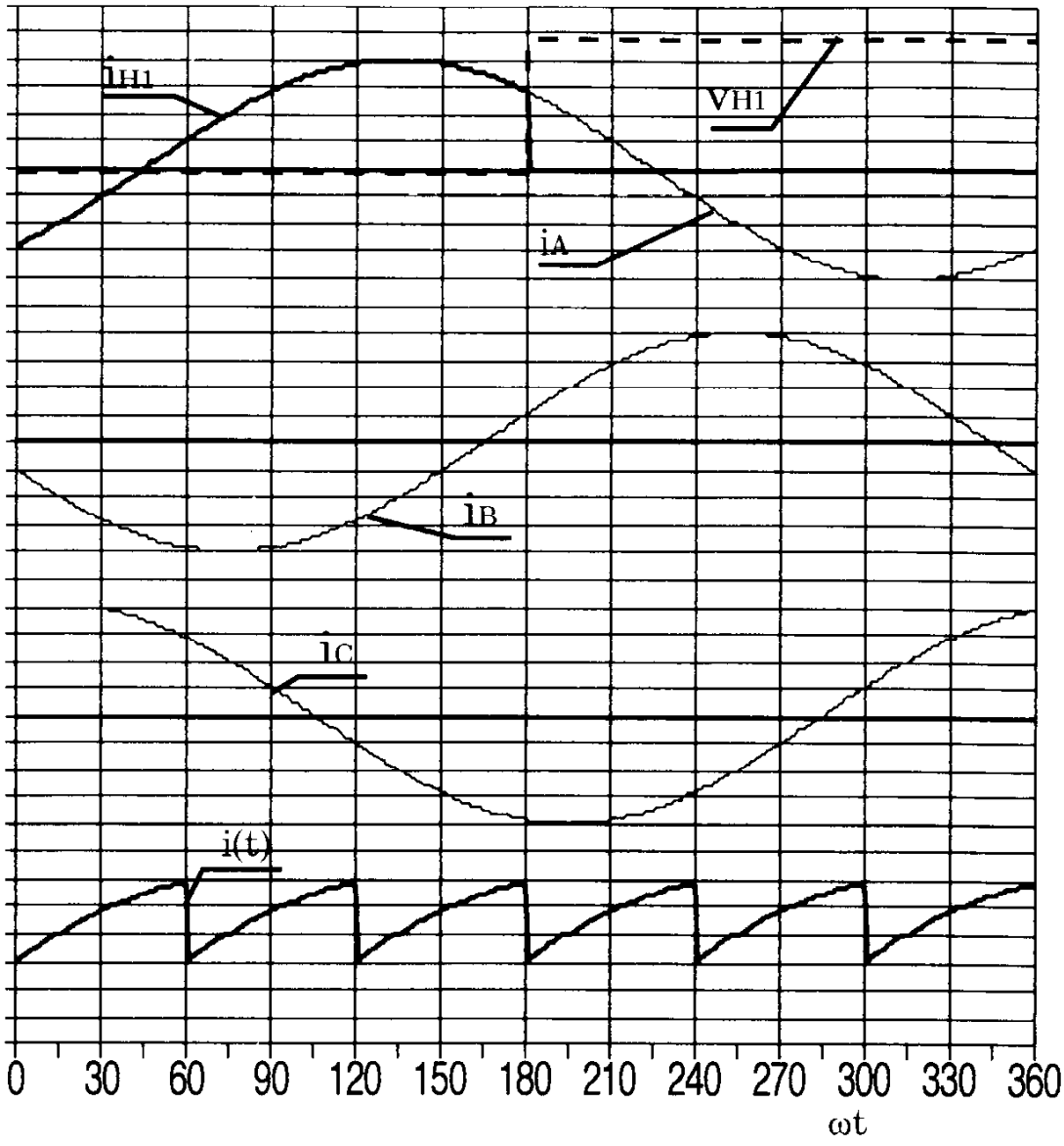
2.2.4

+ 2.2.4.1 L'ouverture de H1 se fait avec un courant non nul; c'est donc une commutation forcée. L'utilisation d'un thyristor exigerait un dispositif de blocage forcé. De plus, la tension aux bornes de H1 ne devient jamais négative donc une thyristor ne pourrait rester bloqué.

+ 2.2.4.2 pour $0 < \omega t < \varphi$, $i_{H1} < 0$ donc la diode conduit. Pour $\varphi < \omega t < \pi$, $i_{H1} > 0$ donc le transistor conduit.

2.3 Courant débité par la source

2.3.1 $0 < t < T/6$, $i = i_{H1} + i_{H3} = i_A + i_C = -i_B$ (couplage étoile).



2.3.2 $T/6 < t < T/3$, $i = i_{H1} = i_A$

$T/3 < t < T/2$, $i = i_{H1} + i_{H2} = i_A + i_B = - i_C$

$T/2 < t < 2T/3$, $i = i_{H2} = i_B$

$2T/3 < t < 5T/6$, $i = i_{H2} + i_{H3} = i_B + i_C = - i_A$

$5T/6 < t < T$, $i = i_{H3} = i_C$

Nous en déduisons le graphe ci-dessus.

2.3.3 sur $[0 ; T/6]$ $i(t) = -iB = -I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi - 2\pi/3)$.

2.3.4 $i(t) = I\sqrt{2} \sin (2\pi/3 + \varphi - \theta)$ avec $0 < \theta < \pi/3$. Nous avons :
$\varphi + \pi/3 < 2\pi/3 + \varphi - \theta < \varphi + 2\pi/3$; sin θ' est positif pour $0 < \theta' < \pi$. Le courant i(t) sera donc toujours positif si $\varphi < \pi/3$. Or à vide la moteur asynchrone a un facteur de puissance $\cos \varphi_v = 0{,}114$ et $\varphi_v = 83{,}5$ °. Le courant i(t) sera donc négatif sur une partie de la période. Il faut donc prévoir une source de tension U réversible en courant.

2.3.5 En intégrant l'expression de i(t) sur l'intervalle [0 ; $\pi/3$], nous obtenons:
$I_{moy} = (3I\sqrt{2}/\pi)\cos\varphi$.
Nous pouvons éviter l'intégrale en écrivant l'égalité des puissances fournies par la source et absorbées par le moteur. En considérant le courant par phase purement sinusoïdal, nous avons : $U\ I_{moy} = 3\ V_1 I \cos\varphi$. Avec $V_1 = U\sqrt{2}/\pi$, nous retrouvons l'expression ci-dessus.

2.3.6 Au point nominal I = 20 A et $\cos\varphi = 0{,}89$ donne $I_{moy} = 24{,}0$ A.

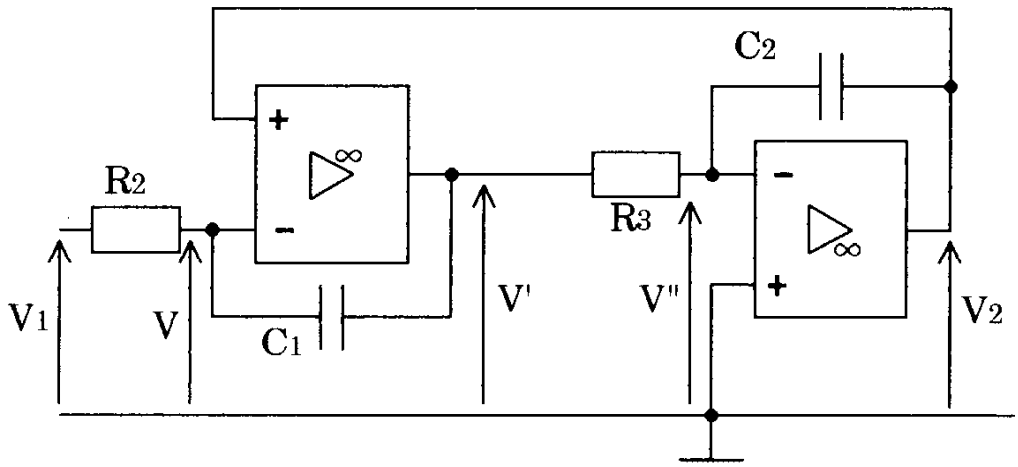
3 Etude de la commande de l'onduleur

3.1 Etude de la consigne

3.1.1 Lorsqu'aucun courant ne parcourt C1, le courant dans R2 est nul. Pour le premier amplificateur $V_- = V_1 = V_+ = V_2$.

3.1.2 En se plaçant en régime permanent (courant nul dans R2), nous avons :
$V_1 = 15\ \alpha P/(P + R_1) = 6\ \alpha$.

3.1.3



Appliquons le théorème de Millmann aux entrées - des deux amplificateurs:
$V(1/R_2 + C_1 p) = V_1/R_2 + C_1 p\ V'$; $V''(1/R_3 + C_2 p) = V'/R_3 + C_2 p\ V_2$;
Les amplificateurs fonctionnant en régime linéaire, V = V2 et V" = 0 ; d'où:
$V' = -R_3 C_2 p\ V_2$ et $V_2(1 + R_2 C_1 p) = V_1 + R_2 C_1 p\ (-R_3 C_2 p)\ V_2$. La fonction de transfert est donc : $H = 1/(1 + R_2 C_1 p + R_2 R_3 C_1 C_2 p^2)$

En posant $H_o = \omega_o^2 = 1/R_2 R_3 C_1 C_2$ et $\zeta = 1/2 R_3 C_2$, nous obtenons :
$H = H_o/(p^2 + 2\zeta p + \omega_o^2)$

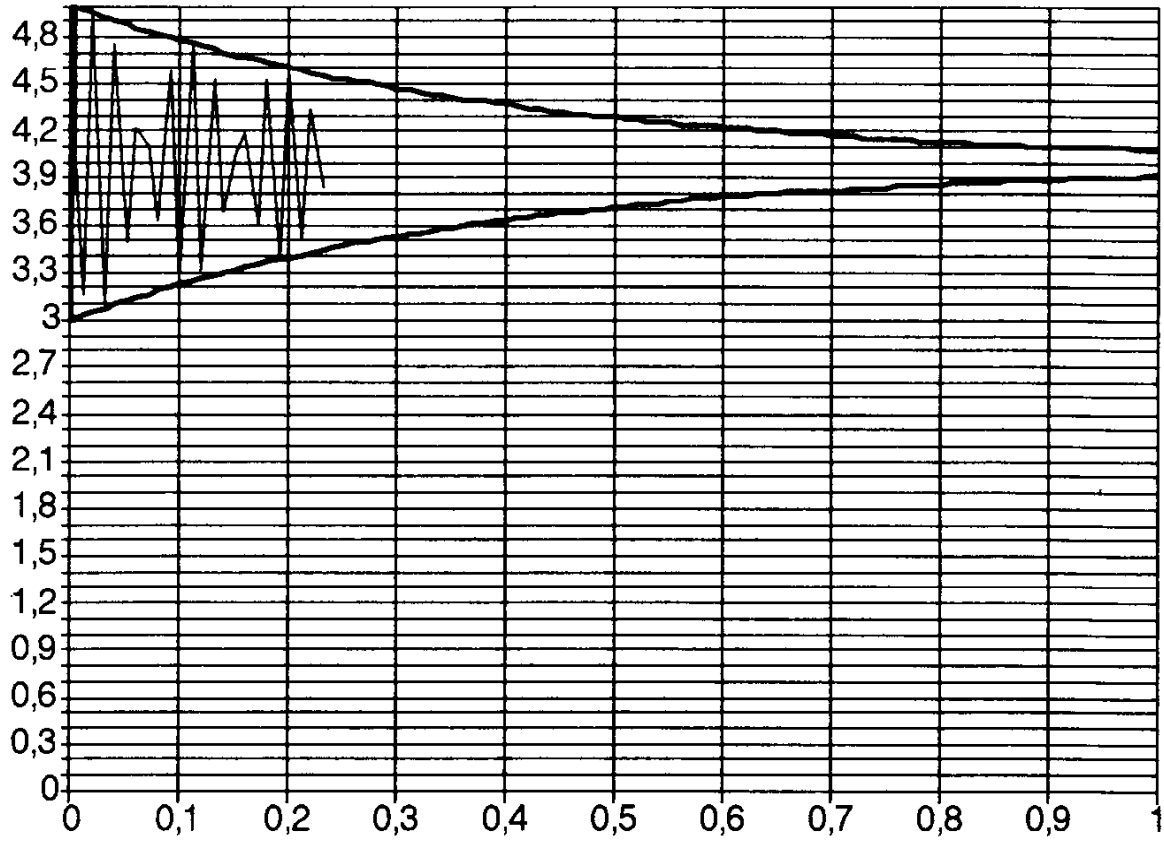
3.1.4 Nous obtenons : $\zeta = 2{,}5\ s^{-1}$; $\omega_o = 2\,236$ rad.s^{-1} ; $H_o = 5.10^6\ s^{-2}$.

3.1.5 $m = \zeta/\omega_o = 1{,}12.10^{-3}$.

3.1.6 $U_o(p) = 1/p$ donne $V_2(p) = \omega_o^2/p\,(p + 2m\omega_o p + \omega_o^2)$.
Cherchons les pôles de cette fonction; ces pôles sont p = 0 et les racines de :
$p + 2m\omega_o p + \omega_o^2$ soit $-2{,}5 \pm j\ 2236 = -\zeta \pm j\ \omega_o$.
La décomposition en élément simple de la fonction est :
$V_2 = A/p + [B(p + \zeta) + C\omega_o]/[(p + \zeta)^2 + \omega'^2_o]$.

A = lim p V2 en p = 0 soit A = 1.
Pour calculer B et C, nous procédons par identification :
$\omega_o^2 = A\,[(p+\zeta)^2 + \omega'_o\,] + p\,[B(p+\zeta) + C\omega_o)\,] = (A+B)\,p^2 + (2\zeta A + \zeta B + \omega_o C)p + A(\zeta^2 + \omega_o^2)$.
Nous en déduisons $B = -A = -1$; $C = -(2\zeta A + \zeta B)/\omega_o = -\zeta/\omega_o = -m$.
La solution est $v2(t) = 1 - \exp(-\zeta t)\,(\cos \omega_o t + m \sin \omega_o t)$.
Comme $m << 1$, nous en déduisons la solution approchée :
$v2(t) = 1 - \exp(-\zeta t)\ \cos \omega_o t$.

3.1.7 Nous procédons par superposition. Pour $\alpha = 0{,}5$ la question 3.1.2 donne $V_2 = 3$ V; nous en déduisons : $v2 = 4 - \exp(-\zeta t)\ \cos \omega_o t$.



3.1.8 $dv_2/dt = \exp(-2{,}5t)\,(\zeta \cos \omega_o t + \omega_o \sin \omega_o t)$. Cette dérivée s'annule pour $\operatorname{tg} \omega_o t = -\zeta/\omega_o$ soit $\tau = 1{,}406$ ms ; $V_{2max} = 4{,}996$ V.

La réponse à l'échelon unitaire est $v2h(t) = 1 - \exp(-\zeta t)\ \cos \omega_o t$. la valeur finale étant 1, le temps de réponse sera atteint lorsque v2h atteindra la valeur de régime permanent à 5 % près. Nous aurons donc $\exp(-\zeta t_r)\ \cos \omega_o t_r = 0{,}05$. comme l'amortissement est faible, nou pouvons en déduire $\exp(-\zeta t_r) = 0{,}05$ soit $\zeta t_r = 3$ et $t_r = 1{,}2$ s.

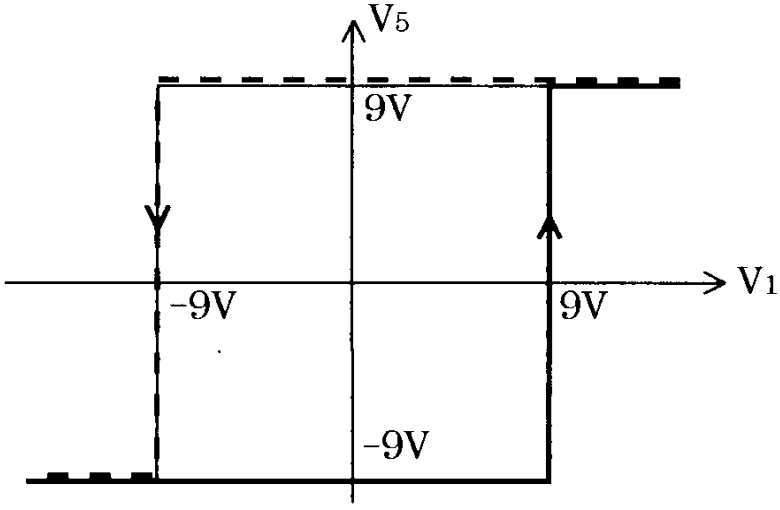
3.2 Etude de l'oscillateur commandé en tension

3.2.1 étude préliminaire

+ 3.2.1.1 Le circuit de la figure 8 est un comparateur à hystérésis.

+ 3.2.1.2 Le montage fonctionne en réaction positive donc en saturation; nous avons donc $V_5 = \pm 9$ V, tension de Zéner des diodes.

+ 3.2.1.3 Sur l'entrée +, nous avons $V+(1/R8 + 1/R9) = V_1/R8 + V_5/R9$ soit $V+ = (R9\ V_1 + R8\ V_5)/(R8 + R9)$. Comme R8 = R9, $V+ = (V_1 + V_5)/2$.
Le comparateur bascule pour $V+ = 0$ soit $V_1 = -V_5$ soit ± 9 V.
Pour $V_1 = -15$ V, $V+ < 0$ donc $V_5 = -9$ V; lorsque V_1 augmente, le comparateur bascule pour $V_1 = -V_5 = 9$ V. Pour $V_1 = 15$ V, $V+ > 0$ donc $V_5 = 9$ V; lorsque V_1 diminue, le comparateur bascule pour $V_1 = -V_5 = -9$ V. d'où le graphe de transfert:



3.2.2 Circuit d'entrée

+ 3.2.2.1 Le condensateur C3 réalise une réaction négative faisant fonctionner l'amplificateur opérationnel en régime linéaire; son entrée - est au potentiel 0 avec un courant d'entrée nul; l'impédance d'entrée de l'intégrateur est donc égale à R6. La résistance R7 est reliée à la sortie du comparateur soit au potentiel V_5.

+ 3.2.2.2 La loi des mailles donne $\varepsilon_1 = V_2 - V_3$. Le théorème de Millmann appliqué au point commun entre R4 et R5 donne $(-\varepsilon_2)(1/R4 + 1/R5) = V_2/R4 + V_3/R5$. Comme R4 = R5, nous obtenons $\varepsilon_2 = -(V_2 + V_3)/2$.

+ 3.2.2.3 En négligeant le courant dans R5 et en supposant les diodes bloquées, le diviseur de tension fonctionne à vide : $V_3 = R6\ V_5/(R6 + R7) = 0{,}719\ V_5$. D'où :
$\varepsilon_1 = V_2 - 0{,}719\ V_5$ et $\varepsilon_2 = -(V_2 + 0{,}719\ V_5)/2$.

+ 3.2.2.4 Pour $V_5 = 9$ V, $V_3 = 6{,}5$ V et $\varepsilon_1 = V_2 - 6{,}5 < 0$. Si D3 est bloquée, l'AOP fonctionne sans contre-réaction avec $\varepsilon < 0$; sa tension de sortie est -15 V;
$v_{d3} = V_3 - (-15) = 21{,}5$ V. D3 ne peut donc être bloquée . D3 étant passante , l'AOP fonctionne en suiveur et $V_3 = V_2$.
$\varepsilon_3 = -(V_2 + 6{,}5)/2 < 0$. Si D4 est bloquée, l'AOP fonctionne sans contre-réaction avec $\varepsilon < 0$; sa tension de sortie est -15 V; $v_{d4} = -15 - V_3 = -21{,}5$ V. Donc D4 est bloquée.

+ 3.2.2.5 Pour $V_5 = -9$ V, $V_3 = -6{,}5$ V et $\varepsilon_1 = V_2 + 6{,}5 > 0$. Si D3 est bloquée, l'AOP fonctionne sans contre-réaction avec $\varepsilon > 0$; sa tension de sortie est +15 V;
$v_{d3} = V_3 - 15) = -21{,}5$ V. D3 est bloquée.

$\varepsilon_3 = -(V_2 - 6{,}5)/2 > 0$. Si D4 est bloquée, l'AOP fonctionne sans contre-réaction avec $\varepsilon > 0$; sa tension de sortie est +15 V; $v_{d4} = 15 - V_3 = 21{,}5$ V. Donc D4 ne peut être bloquée. Elle est donc passante; l'AOP fonctionne alors en amplificateur inverseur et $V_3 = -V_2$.

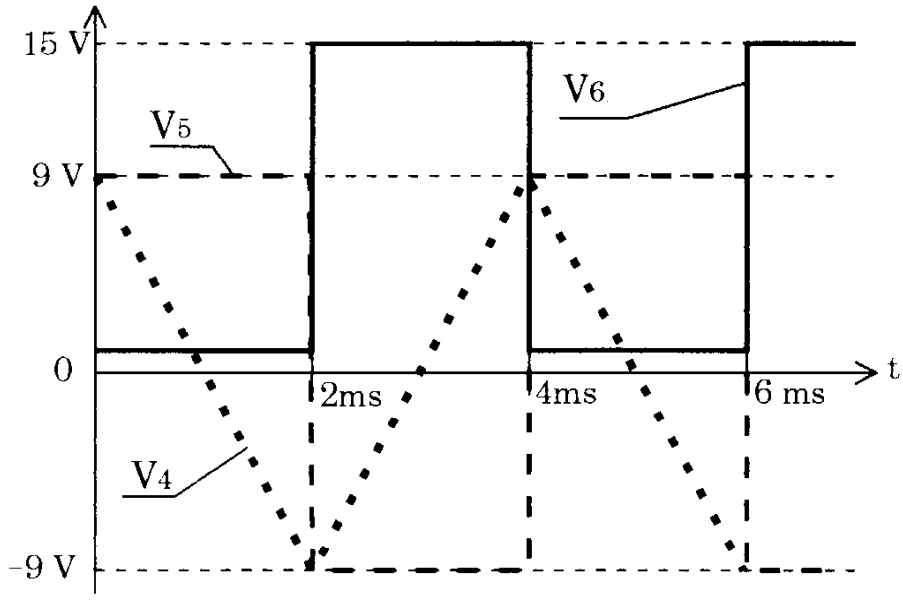
3.2.3 Etude de l'oscillateur

+ 3.2.3.1 Soit j l'intensité du courant dans R6 et C3; il vient $j = V_3 / R_6$ et $j = -C_3 \, dV_4/dt$ soit $dV_4/dt = -V_3/R_6 C_3 = -V_3/\tau$. Comme $V_3 = \pm V_2 = Cste$, il vient : $V_4 = A - V_3 \, t/\tau$ avec A = Cste d'intégration.

+ 3.2.3.2 A la mise sous tension C3 est déchargé donc $V_4 = V_3 = \pm V_2$; cette tension étant comprise entre -6 et 6V, $V_5 = -9$V et $V_3 = -V_2$. Nous en déduisons : $V_4 = A + V_2 \, t/\tau$; cette tension tend vers l'infinie; lorsque $V_4 = 9$ V; le comparateur bascule et $V_5 = 9$ V imposant $V_3 = V_2$ et $V_4 = A' - V_2 \, t/\tau$; cette tension tend vers moins l'infini. Lorsque $V_4 = -9$ V, le comparateur bascule et nous retrouvons le fonctionnement initial; le montage est donc de type astable.
Prenons comme instant origine, l'instant de basculement de V_5 de -9 à +9 V. Le condensateur C3 impose la continuité de la tension V_4 : $V_4(0) = 9$ V
Pour $t = 0+$, $V_5 = 9$ V donc $V_3 = V_3$; $V_4 = A - V_2 \, t/\tau$ avec $V_4(0) = 9$ V, il vient :
$V_4 = 9 - V_2 \, t/\tau$; le comparateur bascule en t_1 pour $V_4 = -9$ V soit $t_1 = 18\,\tau / V_2$.
A t_1+, $V_4 = -9$ V , $V_5 = -9$ V ; $V_3 = -V_2$. En posant $t' = t - t_1$, il vient :
$V_4 = A' + V_2 \, t'/\tau$; avec $V_4(t'=0) = -9$ V, nous obtenons $V_4 = -9 + V_2 \, t'/\tau$; le comparateur bascule pour $V_4 = 9$ V en $t'_2 = 18\,\tau / V_2$. Nous sommes alors revenus à l'état initial. La période de l'oscillateur est $T = 2 t_1 = 36\,\tau / V_2$ et sa fréquence est :
$f = V_2 / 36\,\tau$; comme $\tau = 0{,}33$ ms, il vient $f = 84{,}2\,V_2$.

+ 3.2.3.3 Comme V_2 varie de 0 à 6 V, la fréquence f varie de 0 à 505 Hz.

+ 3.2.3.4 Pour $\alpha = 0{,}5$, $V_2 = 3$ V et f = 253 Hz soit T = 3,96 ms.
De 0 à 1,98 ms : $V_5 = 9$ V ; $V_4 = 9 - 3 \, t/\tau$; le transistor est passant avec un courant de base de l'ordre de $(9 - 1{,}4)/47 = 0{,}16$ mA; supposons le transistor saturé, le courant collecteur est de l'ordre de $8/100 = 0{,}08$ mA; ceci donne un gain forcé de 0,5 justifiant l'hypothèse de saturation. $V_6 = 1$ V environ
De 1,98 à 3,96 ms : $V_5 = -9$ V ; $V_4 = 9 + 3 \, t/\tau$; le transistor est bloqué donc $V_6 = 15$ V.



C.A.P.E.S

(Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de Chimie - Session : 1994

PARTIE A

DOSAGE DES IONS NITRATE D'UN ENGRAIS PAR LA MÉTHODE DE LEITHE

1. **N, P, K.**

1.1. HNO_3 ou NO_3^- , NH_4^+ ; K^+, $H_iPO_4^{(3-i)-}$ (avec i = 0, 1, 2, 3).

1.2. N = 17 % ;

P_2O_5 : $M = 142\ g\ mol^{-1}$ d'où le % en $P = 17 * 2 * 31/142 = 7{,}4$ % ;

K_2O : $M = 94{,}2\ g\ mol^{-1}$ d'où le % en $K = 17 * 2 * 39{,}1/94{,}2 = 14{,}1$ %.

1.3. $NO_3^- + 2e^- + 2H^+ = NO_2^- + H_2O$.

1.4. $4\ P + 5\ O_2 = P_4O_{10}$.

$P_4O_{10} + 6\ H_2O = 4\ H_3\ PO_4$.

1.5. $3\ H_2SO_4 + Ca_3\ (PO_4)_2 = 2\ H_3PO_4 + 3\ CaSO_4$.

2. **Dosage des ions nitrates.**

2.1. *a.* $E_3^o > E_1^o$ diffèrent de près de 0.3 V, la réaction est donc quasi totale.

$Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+} + e^-$ x3

$NO_3^- + 3e^- + 4H^+ \rightarrow NO(g) + 2\ H_2O$

bilan : $3\ Fe^{2+} + NO_3^- + 4H^+ \rightarrow 3\ Fe^{3+} + NO(g) + 2\ H_2O$.

b. $E_2^o > E_1^o$, réaction quasi totale.

$Cr_2O_7^{2-} + 6e^- + 14H^+ \rightarrow 2Cr^{3+} + 7\ H_2O$

$Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+} + e^-$ x6

bilan : $6\ Fe^{2+} + Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ \rightarrow 6\ Fe^{3+} + 2Cr^{3+} + 7\ H_2O$.

2.2. La réaction est lente même en milieu acide à température ambiante ; elle est plus rapide à chaud.

2.3. On prendra comme valeur du volume à l'équivalence, la moyenne de V_1 et de V_2 :

$$10 * [Fe^{2+}]_{(S2)} = 6 * (1{,}667\ 10^{-2}) * (V_1 + V_2)/2, \text{ d'où } [Fe^{2+}]_{(S2)} = 0.196 \text{ mol.L}^{-1}$$

2.4. La quantité, n, d'ions nitrate dans l'échantillon de 2,15 g n'est pas utilisée en totalité. On en prélève la fraction 20 n / 250.

Cette partie oxyde une quantité trois fois supérieure d'ions Fe^{2+}. Le reste des ions Fe^{2+} est oxydé par le dichromate : (en exprimant les quantités de matière en millimoles) :

$$6 * 1{,}667\ 10^{-2} * 15{,}65 = 20{,}00 * 0{,}196 - 3 * n * 20 / 250$$

d'où : $n_{(NO_3^-)} = 9{,}81\ 10^{-3}$ mol dans l'échantillon.

2.5. Le pourcentage massique d'azote «nitrique» est alors : $9{,}81\ 10^{-3} * 14 / 2{,}15 = 6{,}4\ \%$.

2.6. Il faut un millivoltmètre de haute impédance, une électrode de Pt, une électrode de référence au calomel (schéma).

La chaîne électrolytique est la suivante : $Pt \left| Hg_{(l)} \right| Hg_2Cl_{2(s)} \left| \right| KCl_{(sat)}$: solution $\left| Pt \right.$.

2.7. 2.7.1. $U_{(mesurée)} = E(Pt) - E(ECS)$

$$E_{(Pt)} = E_1^{o'} + (RT/F) \ln [Fe^{3+}]/[Fe^{2+}]$$

$$= E_2^o + (RT/6F) \ln [Cr_2O_7^{2-}]\, h^{14}/[Cr^{3+}]^2$$

remarque : on utilisera plutôt $E_1^{o'}$ que E_1^o dans l'expression de E puisque le milieu contient des ions sulfate qui complexent les ions du fer et modifient le potentiel standard.

2.7.2. *a.* Avant l'équivalence, les ions Fe^{2+} sont en excès :

$n_{Fe}^{2+} = 10 * 0{,}196 - 6 * 1{,}667\ 10^{-2} * v$ (n_{Fe}^{2+} en mmol et v en mL).

$n_{Fe}^{3+} = 6 * 1{,}667\ 10^{-2} * v$

$$U_{(mesurée)} = E_1^{o'} - E_{ECS} + RT/F \ln [Fe^{3+}]/[Fe^{2+}]$$

$$= 0{,}425 + 0{,}06 \log (v/(19.6 - v))$$

v (mL)	1	10	18
U (mV)	350	426	490

b. A l'équivalence, $[Fe^{2+}] = 6\ [Cr_2O_7^{2-}]$ et de plus

$[Fe^{3+}] = 3\ [Cr^{3+}] \cong 10 * 0{,}196 / 89{,}6 \text{ mol L}^{-1}$.

Le calcul classique consiste à additionner les expressions du potentiel de Nernst du couple du fer et celle du chrome multipliée par 6 afin d'avoir un facteur identique devant les deux logarithmes ; on obtient ainsi 7 fois la valeur du potentiel :

$$7\ E = E_1^{o'} + 6\ E_{2+}^o\ (RT/F) \ln [Fe^{3+}]\ [Cr_2O_7^{2-}]\ h^{14}/[Fe^{2+}]\ [Cr^{3+}]^2$$

$$\cong 8{,}65 + 0{,}06 \log 3/6\ [Cr^{3+}]$$

$E \cong 1{,}25$ V et $U \cong 1{,}01$ V.

c. Au delà de l'équivalence, le dichromate est en excès :

$n\left(Cr_2O_7^{2-}\right) = (v - 19{,}6) * 1{,}667\,10^{-2}$ et $n\,(Cr^{3+}) = 2 * 19{,}6 * * 1{,}667\,10^{-2}$ (en mmol).

$E = 1{,}33 + 0{,}01 \log\left[(v - 19{,}6) * (70 + v) * 1{,}667\,10^{-2} / (2 * 19{,}6)^2\right]$

$U = 1{,}085 + 0.01 \log\left[3{,}9\ 10^{-2} * (v - 19{,}6) * (70 + v)\right]$

v (mL)	21	25	30
U (V)	1,09	1,10	1,10

2.8. Voir courbe.

2.9. Existence d'un potentiel mixte dû à l'intervention du couple O_2/H_2O ; ce phénomène est du au fait que le couple $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$ est lent.

3. **Justification du choix de l'indicateur.**

3.1. L'indicateur vire à $U = 1{,}06 - 0{,}245 \cong 0{,}8$ V, dans le saut de potentiel du dosage.

3.2. 3.2.1. *a.* $Fe^{2+} + x\ \text{ophen} = Fe(\text{ophen})_x^{2+}$.

b. On considère que toute l'orthophénanthroline est complexée : $\left[Fe(\text{ophen})_x^{2+}\right] = 0{,}0100/x$ et les ions Fe^{2+} sont en excès : $[Fe^{2+}] = 0{,}0100\,(1 - 1/x)$.

La constante de l'équilibre de complexation donne :

$$K_D = [Fe^{2+}]\,[\text{ophen}]^x / \left[Fe(\text{ophen})_x^{2+}\right]$$

d'où : $[\text{ophen}]^x = K_D/(x - 1)$.

3.2.2. $0 < v < v_1$: dosage des ions Fe^{2+} en excès : $Fe^{2+} + Ce^{4+} = Fe^{3+} + Ce^{3+}$ les ions Fe^{3+} ne réagissent pas avec $Fe^{II}(\text{ophen})_x^{2+}$ qui est plus stable que $Fe^{III}(\text{ophen})_x^{3+}$.

$v_1 < v < v_2$ $\qquad Fe(\text{ophen})_x^{2+} + Ce^{4+} = Fe(\text{ophen})_x^{3+} + Ce^{3+}$.

3.2.3. Le premier point d'équivalence donne : $13{,}65 * 0{,}025 = 0{,}010 * (1 - 1/x) * 50$;
d'où : $x = 3{,}15$.

Le deuxième point d'équivalence conduit à : $(20{,}1 - 13{,}65) * 0{,}025 = 0{,}010 * 50/x$;
d'où : $x = 31$; nous adopterons donc la valeur entière $x = 3$.

3.2.4. $E_{(Pt)} = E_1^{o\prime} + (RT/F) \ln [Fe^{3+}]/[Fe^{2+}]$

$K_D = [Fe^{2+}]\,[\text{ophen}]^3 / \left[Fe(\text{ophen})_3^{2+}\right]$

et $K_{D'} = [Fe^{3+}]\,[\text{ophen}]^3 / \left[Fe(\text{ophen})_3^{3+}\right]$

$E_{(Pt)} = 0{,}67 + 0{,}06 \ln \left\{K_{D'}\left[Fe(\text{ophen})_3^{3+}\right] / K_D\left[Fe(\text{ophen})_3^{2+}\right]\right\}$

A la deuxième demi-équivalence $\left[Fe(ophen)_3^{3+}\right] = \left[Fe(ophen)_3^{2+}\right]$

d'où : $E_{(Pt)} = 0{,}67 + 0{,}06 \ln \{K_{D'}/K_D\} \cong 1{,}06$ V

et : $pK'_D \cong 11{,}2$.

3.2.5. Ce^{4+} oxydent d'abord les ions Fe^{2+} libres puis le complexe $Fe(ophen)_3^{2+}$, ce qui se traduit par un changement de couleur ; le dosage peut être faussé par une trop grande quantité d'indicateur.

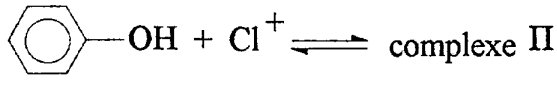
PARTIE B
LA LUTTE CONTRE LA MAUVAISE HERBE

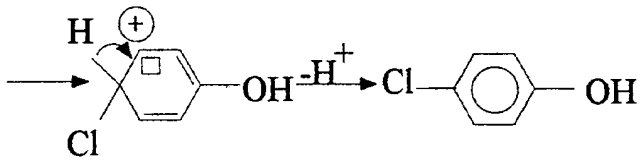
1. **Synthèse du 2,4-D.**

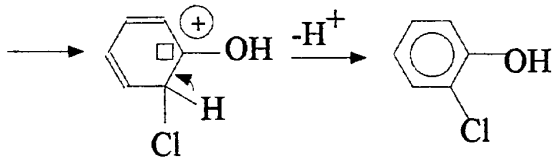
1.1. *Étude de la première étape : la chloration du phénol.*

1.1.1. $AlCl_3$ qui est un acide de Lewis : $Cl_2 + AlCl_3 = Cl^+, AlCl_4^-$.

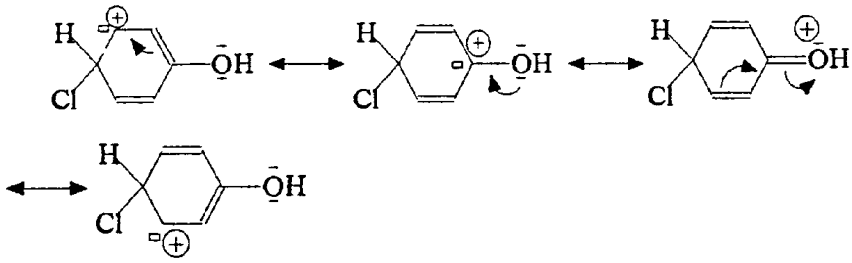
1.1.2. Mécanisme :



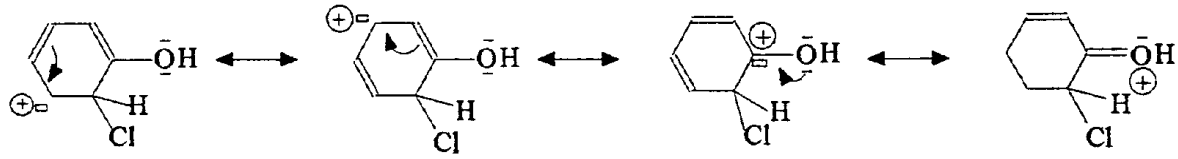




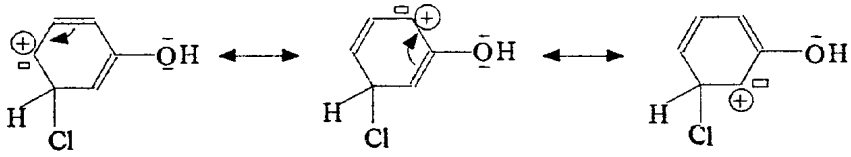
On obtient majoritairement les dérivés 1-2 et 1-4 car les intermédiaires correspondants sont plus stables que celui qui conduirait au dérivé 1,3 :



la troisième formule est stabilisée par l'effet donneur +M du groupe OH :



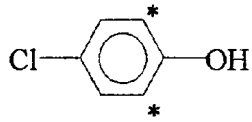
même remarque pour la dernière formule :



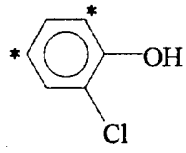
pas de possibilité ici de stabilisation par effet +M de l'oxygène.

1.1.3. OH effet +M, ortho et para orienteur et activant
Cl effets –I et +M ; ortho et para orienteur mais désactivant.

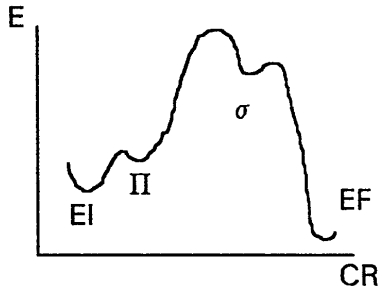
Le groupe activant l'emporte sur le groupe désactivant. Si la première substitution s'est faite en para, la deuxième s'effectue sur les sites ortho du groupe OH :



Si la première substitution a eu lieu en ortho de OH, la deuxième peut se faire sur l'autre site ortho ou, mieux, sur le site para qui est moins encombré :



1.1.4.



État initial (EI) : phénol en ion Cl^+.

Intermédiaires : complexe Π puis complexe σ.

État final : Chlorophénol et H^+

Les sommets correspondent aux états de transition ou complexes activés.

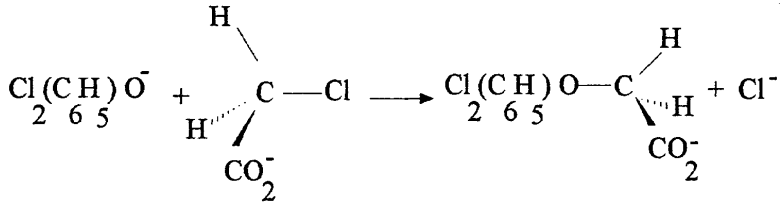
1.2. *Étude de la deuxième étape : le 2,4-dichlorophénol et l'acide monochloroéthanoïque sont chauffés à 105°C en solution aqueuse de soude (pH = 10-12).*

1.2.1. Ion dichlorophénate et ion chloroacétate.

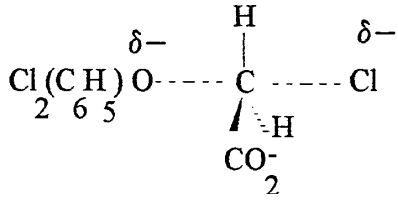
1.2.2. $Cl_2C_6H_3 - O^- + Cl - CH_2 - CO_2^- \rightarrow Cl_2C_6H_3 - O - CH_2 - CO_2^- + Cl^-$.

C'est une substitution nucléophile bimoléculaire (S_N2).

1.2.3. Mécanisme montrant l'inversion de Walden :



état de transition :



1.2.4. Acidifier.

2. **Dosages d'acides phénoxyalcanoïques dans un produit commercial.**

2.1. 2.1.1. Acide 4-chloro-2-méthylphénoxyéthanoïque.

2.1.2. Le saut de pH à l'équivalence serait trop faible.

2.1.3. Le conductimètre génère une **tension sinusoïdale de quelques kHz** ; on mesure la **conductance** de la cellule constituée par **deux plaques de Pt platiné** qui plongent dans la solution.

2.1.4. 2.1.4.1. Ramener la conductance à la valeur qu'elle aurait si l'addition de réactif se faisait sans dilution.

2.1.4.2. Première partie : on remplace quantitativement A^- par Cl^- de conductivités voisines ; donc G varie peu.

Deuxième partie : ajout de H^+ et Cl^- très conducteurs : G augmente fortement.

2.1.4.3. Le volume à l'équivalence est $V_E = 13,5mL$, donc :

$$c = V_E * 13,5 / 20,0 = 0,135 \text{ mol } L^{-1}$$

La solution commerciale est deux fois plus concentrée, soit à **0,27 mol.L^{-1}** ou **60,1 g L^{-1}**.

2.2. 2.2.1. C'est la saponification de l'ester : $RCOOR' + OH^- = RCOO^- + R'OH$.

Chauffer une heure parce que la réaction est lente.

2.2.2. Enlever du milieu le butoyxéthanol et les autres corps organiques contenus dans le produit commercial.

Le 2,4-D est sous forme de carboxylate dans la phase aqueuse.

2.2.3. Récupérer le 2,4-D éventuellement dissous dans l'éther.

2.2.4. L'acide 2,4-D précipite car il a perdu son extrémité ionique hydrophile ; c'est une **molécule trop peu polaire** pour se dissoudre dans l'eau.

2.2.5. Par filtration on ne récupérerait pas la partie du 2,4-D dissoute dans l'eau ($s = 0{,}9\ g\ L^{-1}$).

On procède à une extraction par un solvant dans lequel le 2,4-D est beaucoup plus soluble que dans l'eau

2.2.6. La présence des électrons Π du noyau aromatique est responsable de l'absorption en UV.

Loi de Beer-Lambert : $A = \varepsilon\, l\, c$.

A est l'absorbance, ε le coefficient d'absorption molaire, l l'épaisseur de solution traversée par le faisceau et c la concentration de la substance absorbante.

PARTIE C
LA CHASSE AUX PUCERONS ET AUX ARAIGNÉES ROUGES

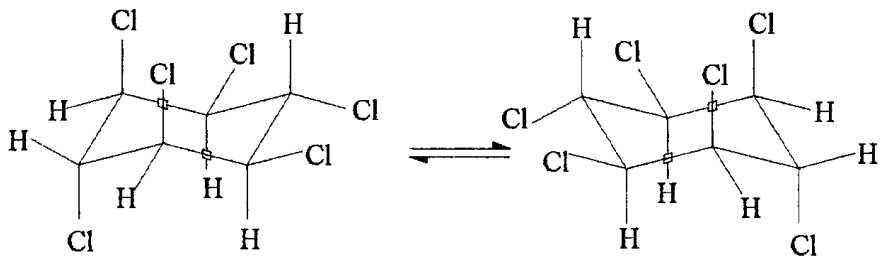
1. **L'hexachlorocyclohexane.**

1.1. L'autre réactif est le dichlore. La réaction est photochimique (UV proche-bleu) :

$$C_6H_6 + 3\ Cl_2 \xrightarrow{h\nu} C_6H_6Cl_6$$

1.2. Toxicité du benzène : cancérigène.

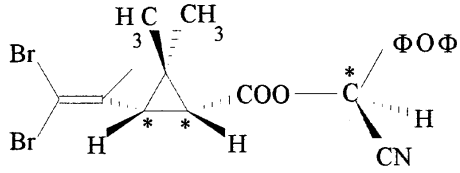
1.3.



L'agitation thermique suffit à provoquer le basculement de la molécule d'une conformation chaise à l'autre.

2. **La deltaméthrine.**

2.1. 3 C*.



2.2. $2^3 = 8$ stéréoisomères.

2.3. Le carbone asymétrique est S.

C.A.P.E.S

(Concours Interne)

SECTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE
PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de Physique - Session : 1994

par C. GROSSETÊTE

---

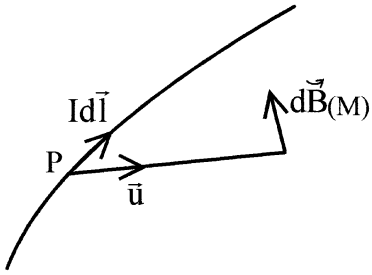
1. LES COURANTS COMME SOURCES DE CHAMP MAGNÉTIQUE

1.1. Préliminaire : questions de cours.

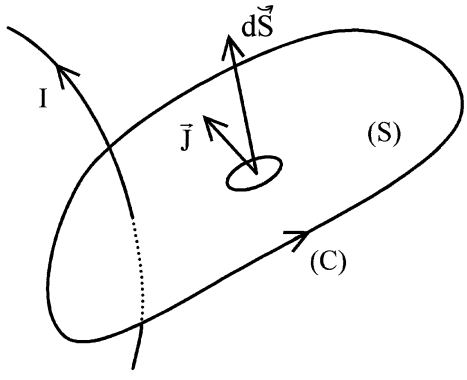
1.1.1. *Loi de Biot et Savart*

Soit P le point où se situe l'élément de courant $I\,\vec{dl}$ source de champ, M le point où l'on calcule le champ créé par $I\,\vec{dl}$, $\vec{u}$ le vecteur unitaire de P vers M $\left(\vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}\right)$, r la distance PM.

L'expression du champ magnétique $\vec{dB}$ au point M est : $\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$.



1.1.2. (*) Théorème d'Ampère



Soit (S) une surface s'appuyant sur le contour fermé (C), et orientée par (C) suivant la convention d'orientation classique (bonhomme d'Ampère, etc.) :

La circulation du vecteur champ magnétique le long de (C) est égale au produit par μ_0 du flux du vecteur densité de courant à travers (S).

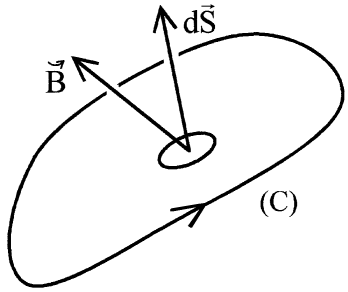
$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{J} \cdot \vec{dS} .$$

Dans le cas de conducteurs filiformes, ce théorème devient : $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum I$, les intensités étant comptées positivement lorsque le sens (C) du courant est le même que celui du vecteur surface $\vec{dS}$ correspondant. Le théorème d'Ampère n'est pas valable en régime quelconque, car en régime variable, le théorème d'Ampère généralisé, dans le vide, s'écrit :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_{(S)} \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}.$$

1.1.3. (*) *Flux magnétique*

Soit (S) une surface orientée s'appuyant sur le circuit fermé (C) orienté.



On a : $$\phi = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot \vec{dl},$$

en effet $\vec{A}$ étant le potentiel vecteur : $\vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A}$.

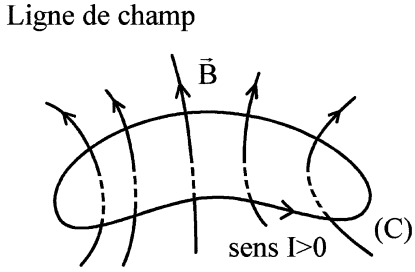
Le flux ϕ est donc indépendant du choix de la surface (S) s'appuyant sur (C) et orientée par ce contour.

Si l'on considère une surface (S) fermée, on a : $\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$, car div $\vec{B} = 0$: on dit que le champ magnétique est à flux conservatif. Cette propriété reste valable en régime non stationnaire.

1.1.4. (*) *Inductance propre*

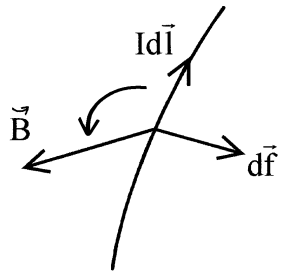
On a : $L = \dfrac{\phi_{propre}}{I}$, avec $\phi_{propre} = \iint_{(S)_{\text{orientée par (C)}}} \vec{B}_{\text{créé par I}} \cdot \vec{dS}$

ϕ_{propre} est du signe de I, par convention d'orientation, donc L > 0.



Remarque : on peut aussi écrire l'énergie magnétique W_m : $W_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dv$ avec $W_m = \frac{1}{2} L I^2$, ce qui entraîne bien L > 0.

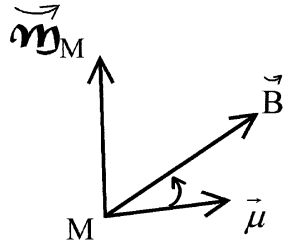
1.1.5. (*) *Loi de Laplace*



La force $d\vec{f}$ qui s'exerce sur un élément de courant $I\,d\vec{l}$ placé dans le champ magnétique $\vec{B}$ a pour expression :

$$d\vec{f} = I\,d\vec{l} \wedge \vec{B} \ .$$

1.1.6. (*) *Dipôle magnétique*



Le moment $\vec{\mathfrak{M}}_M$ des forces magnétiques s'exerçant sur un petit dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mu}$ placé dans le champ magnétique $\vec{B}$ au point M a pour expression :

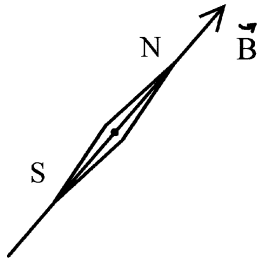
$$\vec{\mathfrak{M}}_M = \vec{\mu} \wedge \vec{B}.$$

L'action d'un champ magnétique non uniforme sur ce dipôle comporte, en plus du moment $\vec{\mathfrak{M}}_M$, une force résultante $\vec{F}$ telle que :

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad} \left(\vec{\mu} \,.\, \vec{B} \right).$$

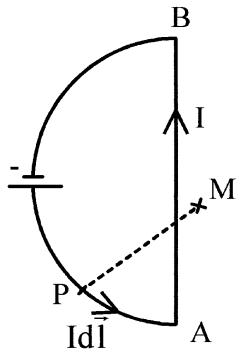
Cette force est nulle si $\vec{B}$ est uniforme.

L'aiguille aimantée étant maintenue par son support, le seul effet d'un champ magnétique est dû au moment $\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ qui tend à aligner l'aiguille le long des lignes de champ, $\vec{\mu}$ étant colinéaire et de même sens que $\vec{B}$.



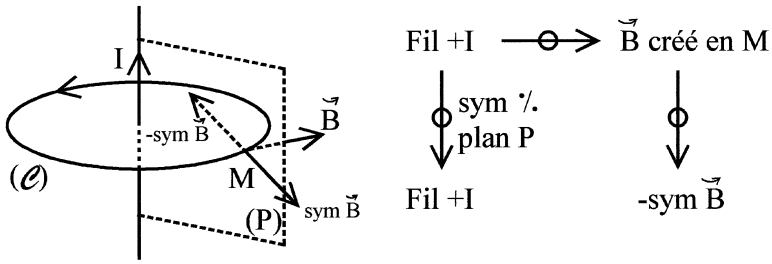
1.2. **Champ magnétique créé par un fil.**

1.2.1. (*) *Fil de longueur infinie*



On peut admettre que le champ $\vec{B}$ au point M correspond bien au champ créé par le fil de longueur infinie si la contribution des autres éléments amenant le courant au champ magnétique est bien négligeable.

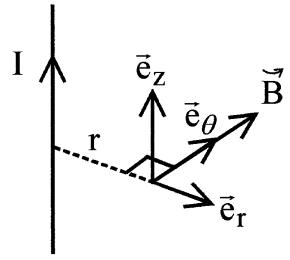
Utilisons les propriétés de symétrie du système. Soit (P) le plan concernant M et le fil.



On doit avoir : $\vec{B} = -\,\mathrm{sym}\,\vec{B} \Rightarrow \vec{B} \perp (P)$.

$\vec{B}$ **est donc orthoradial**. Appliquons le théorème d'Ampère. Calculons la circulation de $\vec{B}$ le long d'un cercle ($\mathscr{C}$) d'axe le fil : $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$. Soit : $B \times 2\pi r = \mu_0 I$.

D'où : $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}}$ en coordonnées cylindriques.

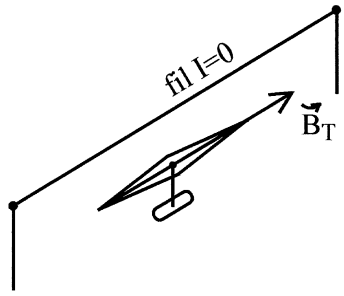


Application Numérique : $\begin{matrix} I = 1{,}70\ A \\ r = 310^{-2}\ m \end{matrix}$ $B = \dfrac{2.10^{-7} \times 1{,}70}{3.10^{-2}}\ T,$

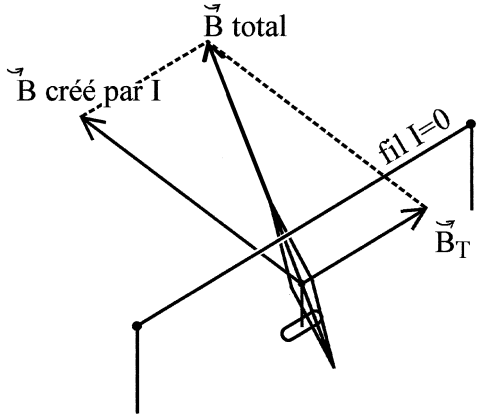
$B = 1{,}13.10^{-5}$ T. Ce champ est donc du même ordre de grandeur que $B_T = 2.10^{-5}$ T : il est faible.

1.2.2. *Expérience d'Œrsted*

1 - Lorsqu'aucun courant ne circule on oriente le fil dans le sens de la composante de $\vec{B}_T$.

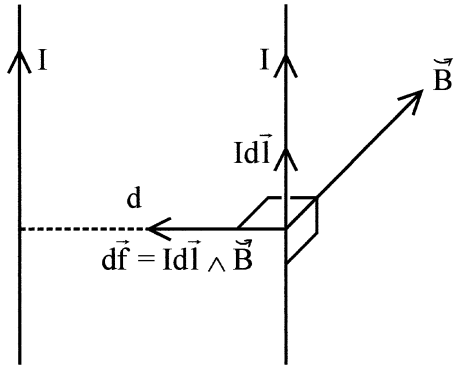


2 - On fait circuler un courant I dans le fil l'aiguille s'oriente selon $\vec{B}_{total}$. On inverse le sens de I, l'aiguille s'oriente symétriquement.



Pour voir une orientation importante il faudra utiliser un courant de **grande intensité** (10 A) et placer l'aiguille **très près du fil**, le **fil étant préalablement orienté suivant la composante de $\vec{B}_T$.**

1.2.3. *Définition de l'Ampère*



$$\vec{B} = \frac{\mu_e I}{2\pi d}\vec{e_\theta} \qquad d\vec{f} = I\,d\vec{l} \wedge \vec{B}\ .$$

Il existe donc une force **attractive** entre les deux fils.

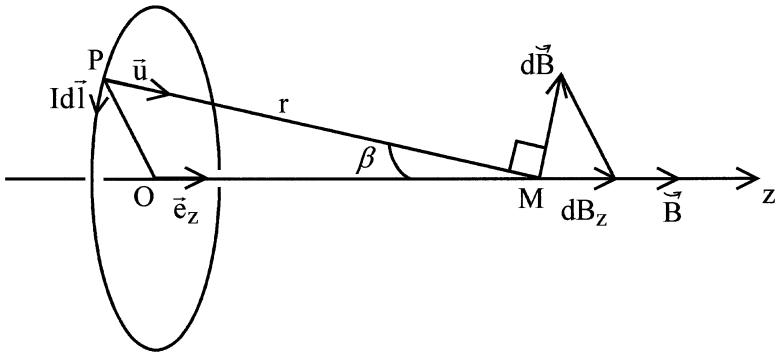
$$\boxed{\frac{df}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}}$$

force par unité de longueur.

Application Numérique : $2.10^{-7} = \dfrac{4\pi\, 10^{-7} I^2}{2\pi \times 1}$ **→ I = 1 A Cette relation correspond à la définition théorique de l'Ampère dans le système international.**

1.3. **Champ magnétique créé par une bobine plate, bobines de Helmholtz.**

1.3.1. (*) *Spire circulaire, champ magnétique créé sur l'axe, bobine plate*



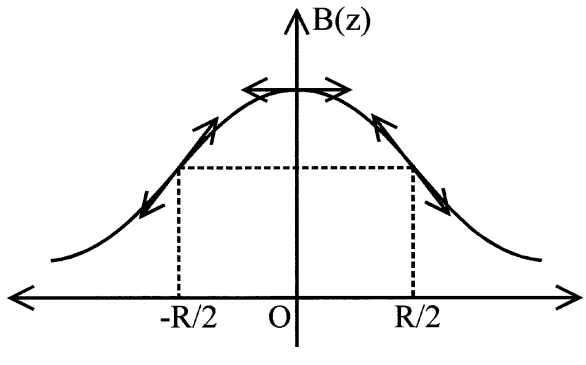
$\vec{B}$ est sur l'axe ($\vec{B} = B\ \vec{e_z}$) par raison de symétrie.

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}\ , \qquad dB_z = \vec{dB} \cdot \vec{e_z}\ ,$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I\, dl}{4\pi r^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right), \quad B_z = \frac{\mu_0 I \cdot 2\pi R}{4\pi r^2} \sin\beta\ , \quad r = \frac{R}{\sin\beta}\ ,$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\beta\ \vec{e_z}} \qquad Bz = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Pour : $z = \dfrac{R}{2}$ $\sin\beta = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}894$



$$\sin^3 \beta = 0{,}715 \qquad \boxed{\frac{B\,(z = R/2)}{B\,(z = 0)} = 0{,}715}$$

$$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2\,(-3/2)\,2z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} = K\,z\,(R^2 + z^2)^{-5/2}$$

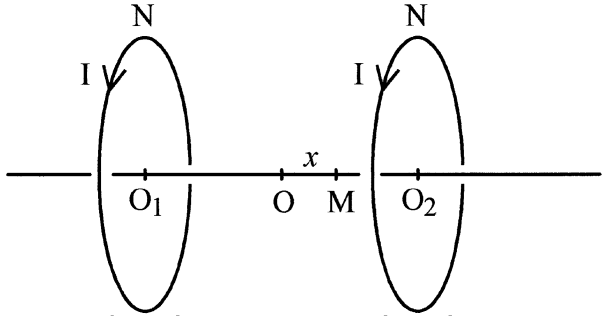
$$\frac{d^2B}{dz^2} = 0 \text{ pour } \quad (R^2 + z^2)^{-5/2} - z\,(R^2 + z^2)^{-7/2}\,\frac{5}{2}\,2z = 0 \quad \Rightarrow \quad R^2 + z^2 - 5\,z^2 = 0$$

point d'inflexion $\qquad z^2 = \frac{R^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{z = \pm \frac{R}{2}}$

Application Numérique : $B = \dfrac{\mu_0 N I}{2 R}$ au centre $\begin{cases} N = 130 \\ R = 0{,}15 \text{ m} \\ I = 1{,}70 \text{ A} \end{cases}$ **B (au centre) = 0,926 mT.**

Ce champ est quarante-six fois plus important que B_T.

1.3.2. *Bobines de Helmholtz*



$$B = \frac{\mu_0 N I}{2}\left(\frac{R^2}{\left[R^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{R^2}{\left[R^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2\right]^{3/2}}\right),$$

$$B = f\left(z = \frac{d}{2} + x\right) + f\left(z = \frac{d}{2} - x\right),$$

avec : $\qquad \boxed{f(z) = \dfrac{\mu_0 N I}{2}\,\dfrac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}}$

$$f\left(z = \frac{d}{2} + x\right) = f\left(\frac{d}{2}\right) + x\,f'\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\,f''\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{x^3}{6}\,f'''\left(\frac{d}{2}\right) + o\,(x^3)\,,$$

$$f\left(z = \frac{d}{2} - x\right) = f\left(\frac{d}{2}\right) - x\,f'\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\,f''\left(\frac{d}{2}\right) - \frac{x^3}{6}\,f'''\left(\frac{d}{2}\right) + o\,(x^3)\,,$$

$$\boxed{B\,(x) = 2\,f\left(\frac{d}{2}\right) + x^2\,f''\left(\frac{d}{2}\right) + o\,(x^3)}$$

On a donc $B(x) = 2\,f\left(\frac{d}{2}\right) + o(x^3)$ si $f''\left(\frac{d}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{R}{2}$,

soit : $\boxed{d = R}$ (bobines de Helmholtz)

Application Numérique : $B(O) = 2 \times 0{,}715 \times 9{,}26.10^{-4} = 1{,}32.10^{-3}$ T **B (O) = 1,32 mT**

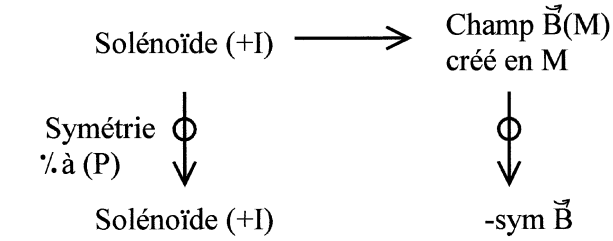
$B(O_1) = 9{,}26.10^{-4} + 9{,}26.10^{-4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}25.10^{-3}$ T **B (O_1) = 1,25 mT**

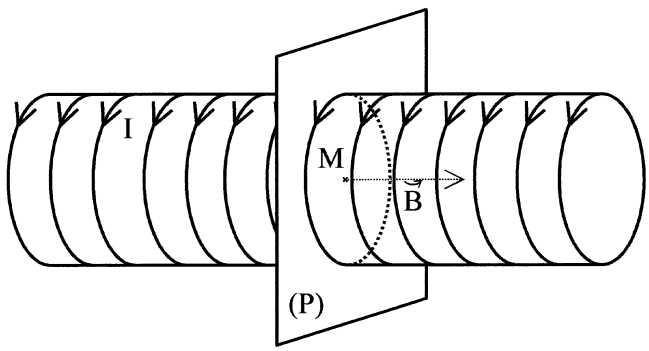
$B(O_1)$ vaut environ 95 % de B (O) : **le champ est donc très uniforme à 5 % près**. Ce dispositif permet de créer un champ uniforme dans une grande région d'espace.

1.4. Champ magnétique créé par une bobine longue.

1.4.1. (*) *Solénoïde infiniment long*

Utilisons les propriétés de symétrie :





Soit (P) le plan orthogonal à l'axe du solénoïde et passant par M. On a :

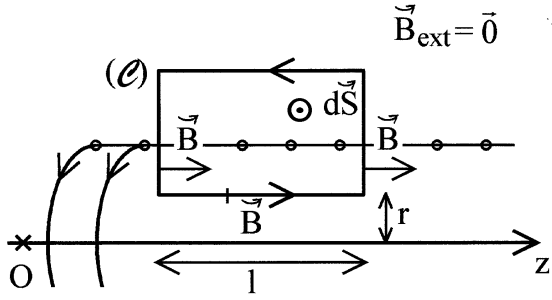
D'où : $-\text{sym}\,\vec{B} = \vec{B} \Rightarrow \vec{B}$ est orthogonal à (P).

Par raison de symétrie on en déduit donc que le champ magnétique $\vec{B}$ **est porté par l'axe du solénoïde et ne dépend que de la distance à l'axe**.

On a $\vec{B}_{ext} = O$ car les lignes de champ ne «sortent» pas du solénoïde infiniment long. Appliquons le théorème d'Ampère le long du contour ($\mathscr{C}$) indiqué sur le schéma.

On a pour r < R : $Bz(r) \times l = \mu_0 \times nl$. I.

D'où : $\boxed{\vec{B}(int) = \mu_0\, n\, I\, \vec{e}_z}$



le champ est donc uniforme à l'intérieur et colinéaire à l'axe.

Application Numérique : $n = \frac{200}{0{,}4} = 500$ spires/m $\quad I = 7{,}0$ A $\quad \mathbf{B_O = 4{,}4\ mT}$.

Ce champ est deux cent vingt fois plus important que B_T .

1.4.2. *Inductance propre de la bobine*

$\phi_{propre} = N\,\phi_{\text{à travers une spire}} = N \times \mu_0 \frac{N}{l} I \times \pi R^2 = LI$ (avec $S = \pi R^2$ section du solénoïde).

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{l} = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}}$$

Application Numérique : **L = 0,247 mH.**

1.4.3. (*) *Pont de Maxwell*

On a : $Z_L = R + j\,L\,\omega$ pour la bobine, et $\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{R_e} + j\,C_e\,\omega$ pour l'association R_e et C_e en parallèle.

L'équilibre est donné par : $PQ = Z_L\,Z_e \Rightarrow Z_L = \frac{PQ}{Z_e} = PQ\left[\frac{1}{R_e} + j\,C_e\,\omega\right]$.

D'où :
$$\boxed{\begin{cases} R = \dfrac{PQ}{R_e} \\ L = PQC_e \end{cases}}$$

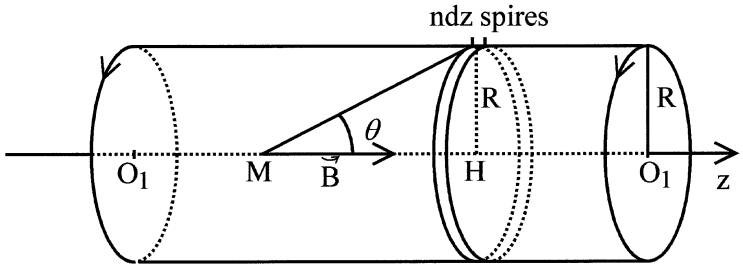
Le rôle du filtre passe-bande est de **filtrer toutes les fréquences parasites autres que la fréquence d'étude** f_0 : la fréquence centrale de sa bande passante doit donc être **égale à f_0**.

On obtient l'équilibre lorsque la **tension** aux bornes du détecteur est **nulle** : on l'encadre par approximations successives.

Application Numérique : $R = 1{,}25\ \Omega$ $\quad$ **L = 0,241 mH** valeur proche de la valeur obtenue théoriquement.

Pour un tel solénoïde, où $\frac{l}{R} = 16$, l'approximation du solénoïde infiniment long pour le calcul de B et celui de L est valable ($\frac{l}{R} \geq 10$).

1.4.4. *Solénoïde de longueur finie, champ sur l'axe*



Pour ndz spires on a : $dB_z = \dfrac{\mu_0 \, ndz \, I}{2R} \sin^3 \theta.$

En prenant M pour origine : $\overline{MH} = z,$

$$\tan \theta = \frac{R}{z} \Rightarrow z = R \cot \theta,$$

$$dz = -\frac{R \, d\theta}{\sin^2 \theta} \qquad dB_z = -\frac{\mu_0 \, n \, I}{2} \sin \theta \, d\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_z = \frac{\mu_0 \, n \, I}{2} \left[\cos \theta_+ - \cos \theta_- \right]}$$

On retrouve bien : $\mathbf{B = \mu_0 \, n \, I}$ **pour** $\theta_+ \to 0$ **et** $\theta_- \to \pi$ **.**

$$\boxed{\frac{B_0}{B_\infty} = \frac{l/2}{\sqrt{R^2 + l^{2/4}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2R/l)^2}}}$$

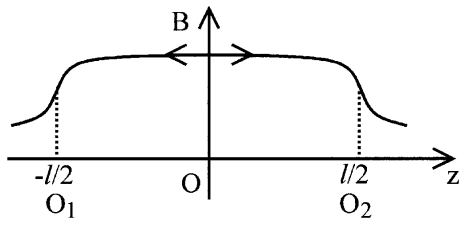
Approximation du solénoïde infiniment long :

$$\frac{B_0}{B_\infty} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{l} \right)^2 \qquad \boxed{\frac{B_\infty - B_0}{B_\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{l} \right)^2 < 2.10^{-2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2R}{l} \right)^2 < 4.10^{-2}$$

soit : $\boxed{\dfrac{l}{R} \geq 10}$

$$B(O_1) = \frac{\mu_0 \, n \, I}{2} \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} \qquad \frac{B(O_1)}{B(O)} = \frac{\sqrt{R^2 + l^{2/4}}}{\sqrt{R^2 + l^2}} = 0{,}503 \qquad \left(\frac{l}{R} = 16 \text{ dans ce cas} \right).$$

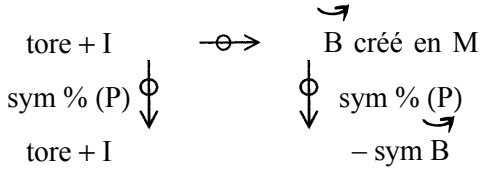
D'où l'allure de la courbe B = B (z) :

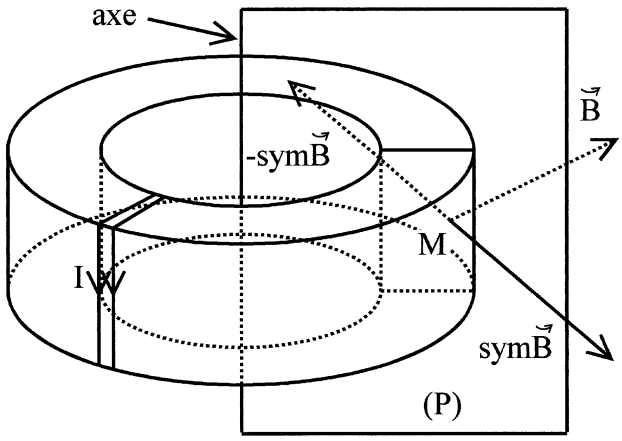


1.5. **Champ magnétique créé par un bobinage torique à section carrée.**

1.5.1. (*) *Champ magnétique créé*

Soit (P) le plan contenant l'axe et le point M. Utilisons les propriétés de symétrie :





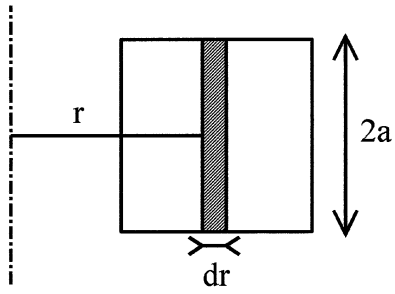
$-\,\mathrm{sym}\,\vec{B} = \vec{B} \Rightarrow \vec{B} \perp \text{plan (P)} \Rightarrow$ **B est orthoradial**

$\oint_{(\mathscr{C})} \vec{B}\,\vec{dl} = \mu_0 \sum I$: cercle de rayon r d'axe l'axe du tore

$$B_{int}(r) \times 2\pi r = \mu_0 N I \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\vec{e_\theta}}$$

$B_{ext}(r) \times 2\pi r = O$ car on ne coupe aucun courant ou la somme des courants coupés $= 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}_{ext} = \vec{O}}$

1.5.2. *Inductance propre*



$$\phi_{total} = N\,\phi_{spire} = N \int_{r=d-a}^{d+a} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} 2a\,dr \ ,$$

$$\phi = \frac{\mu_0 N^2 I a}{\pi} \ln \frac{d+a}{d-a} = L I \ ,$$

D'où l'inductance propre du bobinage à section carrée :

$$\boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln \frac{d+a}{d-a}}$$

Si $a << d$ $\quad L \approx \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi}\left[1 + \frac{a}{d} - 1 + \frac{a}{d} + ..\right]$ $\quad \boxed{L \approx \frac{2\,\mu_0 N^2 a^2}{\pi d}}$

On retrouve la même expression que celle trouvée pour le solénoïde : $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$ avec $S = 4a^2$ et $l = 2\pi d$

Application Numérique : **L = 0,355 mH** .

2. ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE

2.1. Préliminaire : questions de cours.

2.1.1. $$\boxed{\vec{f} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

2.1.2. $$dE_C = \vec{f} \,.\, \vec{dl} = \vec{f} \,.\, \vec{v}\, dt = q\,\vec{E} \,.\, \vec{v}\, dt \quad \text{car} \quad q\,(\vec{v} \wedge \vec{B}) \,.\, \vec{v}\, dt = \vec{O}.$$

Un champ magnétique ne peut communiquer d'énergie.

2.1.3. $$dE_C = q\,\vec{E} \,.\, \vec{dl} = -\,q\,\overrightarrow{\text{grad}}\ V \,.\, \vec{dl} = -\,q\,dV,$$

$$E_C(B) - E_C(A) = -\,q \int_A^B dV \qquad \boxed{E_C(B) - E_C(A) = q\,(V_A - V_B)}$$

Pour accélérer des électrons on doit avoir $E_C(B) > E_C(A) \Rightarrow$ **$q\,(V_A - V_B) > 0$**

si $V_A = 0$ on doit avoir $-\,q\,V_B > 0$ avec $q = -\,e < 0$ soit **$V_B > 0$**,

$1\ eV = 1{,}602.10^{-19}\ C \times 1\ V$, **$1\ e\,V = 1{,}602.10^{-19}\ J$** .

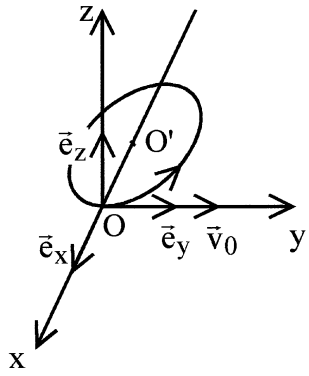
2.2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique.

2.2.1. (*) Appliquons la relation fondamentale :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\,e\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{e}{m} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} .$$

Projetons :



$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{eB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = \dfrac{eB}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{z} = cte = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{z = \text{constante} = 0}$$

Posons :

$$Z = x + i\,y \qquad \ddot{x} + i\,\ddot{y} = -\frac{eB}{m}\dot{y} + i\,\frac{eB}{m}\dot{x} = i\,\frac{eB}{m}(\dot{x} + i\,\dot{y}) \qquad \boxed{\omega_C = \frac{eB}{m}}$$

$$\ddot{Z} = i\,\omega_C\,\dot{Z} \;\Rightarrow\; \dot{Z} = \dot{Z}_0\,e^{i\omega_C t} = i\,v_0\,e^{i\omega_C t} \;\Rightarrow\; \dot{x} + i\,\dot{y} = i\,v_0\,(\cos\omega_C t + i\sin\omega_C t)$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\,v_0 \sin\omega_C t \\ \dot{y} = v_0 \cos\omega_C t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{v_0}{\omega_C}(\cos\omega_C t - 1) \\ y = \dfrac{v_0}{\omega_C}\sin\omega_C t \end{cases}}$$

D'où l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$\boxed{\left(x + \frac{v_0}{\omega_C}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_C}\right)^2}$$

C'est bien un cercle de rayon :

$$\boxed{r = \frac{m\,v_0}{eB}}$$

La trajectoire de l'électron est donc **un cercle de centre O'** $(-\dfrac{m\,v_0}{eB}, O, O)$ **situé dans le plan xOy et parcouru dans le sens trigonométrique à la pulsation «cyclotron»** $\omega_C = eB/m$.

2.2.2. En supposant que la vitesse des électrons émis par la cathode est négligeable on a donc :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = eU \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0^2 = \frac{2 e U}{m}}$$

$$r^2 = \frac{m^2 v_0^2}{e^2 B^2} = \frac{2 m U}{e B^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{e}{m} = \frac{2 U}{r^2 B^2}} \qquad \frac{\Delta (e/m)}{e/m} = 2 \frac{\Delta r}{r}$$

Application Numérique :

$U = 200$ V $\qquad \frac{e}{m} = 1{,}74.10^{11}$ C/kg

$B = 1{,}17$ mT

$r = (4{,}1 \pm 0{,}2)\ 10^{-2}$ m $\qquad \frac{\Delta (e/m)}{e/m} = 2 \frac{0{,}2}{4{,}1} = \mathbf{9{,}75.10^{-2}}$ voisin de 10 %.

D'où : $\mathbf{\frac{e}{m} = (1{,}74 \pm 0{,}17)\ 10^{11}\ C/kg}$ $\qquad \mathbf{m \approx (9{,}20 \pm 0{,}90)\ 10^{-31}\ kg}$.

La valeur connue est $m_e = 0{,}911.10^{-30}$ kg. Le résultat expérimental est en accord avec cette valeur.

2.2.3. On a toujours $\ddot{z} = 0$ et donc $\dot{z} = cte = v_0 \cos \alpha$

$\Rightarrow$ $\qquad \boxed{z = (v_0 \cos \alpha)\ t}$

avec $Z = x + i\,y$ on a : $\dot{Z} = \dot{Z}_0\, e^{i \omega_C t} = i\, v_0 \sin \alpha\, e^{i \omega_C t}$ avec $\omega_C = \frac{eB}{m}$

$$\begin{cases} \dot{x} = - v_0 \sin \alpha \,.\, \sin \omega_C t \\ \dot{y} = v_0 \sin \alpha \,.\, \cos \omega_C t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_C} (\cos \omega_C t - 1) \\ y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega_C} \sin \omega_C t \end{cases}}$$

En projection sur xOy on a un cercle de centre $(-\frac{m v_0 \sin \alpha}{eB}$, O, O) et de rayon :

$$\boxed{r = \frac{m v_0 \sin \alpha}{eB}}$$

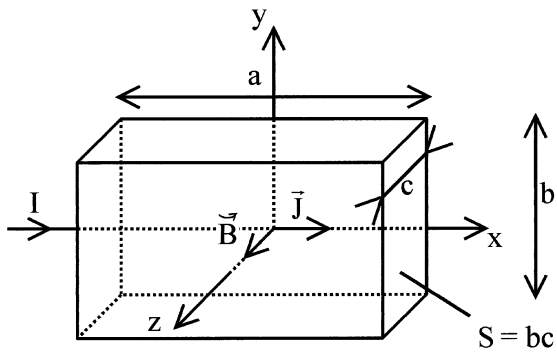
Puisque $z = (v_0 \cos \alpha)\ t$ on obtient donc une **hélice de base circulaire dont la direction est selon l'axe Oz ($\vec{B}$)**.

2.3. Mesure de champs magnétiques : sonde à effet Hall.

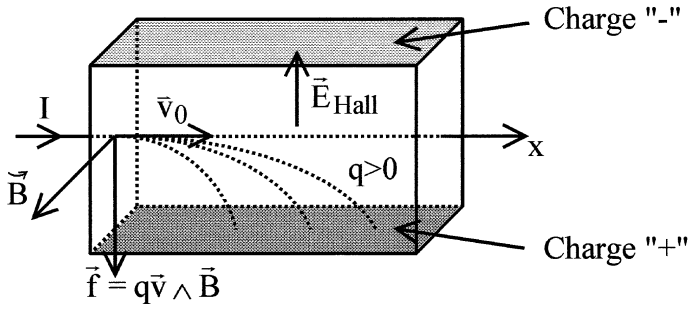
2.3.1. (*)

$$\vec{J} = \rho\,\vec{v} = nq\,\vec{v},$$

$$J = \frac{I}{S} = nqv \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = \frac{I}{nq\,S}}$$



2.3.2. (*)



Les porteurs de charge positive sont soumis à une force magnétique $\vec{f} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ dirigée vers les $y < 0$: il apparaît donc un excès de charges positives dans le plan $y = -\frac{b}{2}$ et un défaut dans le plan $y = b/2$.

En régime permanent on aura $q\,(\vec{v} \wedge \vec{B}) + q\,\vec{E}_{Hall} = \vec{O}$ puisque les porteurs vont traverser sans être déviés. On a donc :

$$\vec{E}_{Hall} = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\begin{bmatrix} I/nqS \\ O \\ O \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} O \\ O \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ BI/nqS \\ O \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{E}_{Hall} = \frac{BI}{nqS}\,\vec{e}_y}$$

$$V_{Hall} = V_M - V_N = \int_M^N \vec{E}_{Hall} \cdot dy\,\vec{e}_y = \frac{BI}{nqS}\,b \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_{Hall} = \frac{BI}{nqc}}$$

$\mathbf{V_{Hall} = K\,BI}$ K : constante dépendante de la nature et de la géométrie de la sonde. On applique un courant I d'intensité donnée (on peut jouer sur cette valeur pour définir différents calibres de mesure) : la mesure de V_{Hall} permet de déterminer B, la sonde ayant été étalonnée (pour déterminer K = 1/nqc), lorsque cette sonde est placée orthogonalement au champ magnétique $\vec{B}$.

2.3.3. • Si $\vec{B} = B\,\vec{e_x}$ on a $\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{O}$: il n'y a plus d'effet Hall $\Rightarrow$ $\mathbf{V_{Hall} = 0}$.

• Si $\vec{B} = B\,\vec{e_y}$ on aurait un léger effet Hall, et une différence de potentiel entre les plaques $z = -c/2$ et $z = c/2$; on aura donc encore $V_M - V_N = \mathbf{V_{Hall} = 0}$.

La sonde à effet Hall ne permet donc de **mesurer que la composante du champ magnétique perpendiculaire à la sonde soit $\mathbf{B_z}\,\vec{e_z}$**. Pour mesurer un champ magnétique il faut donc **placer la sonde perpendiculairement à la direction de $\vec{B}$**.

2.3.4. $$V = V_M - V_P = (V_M - V_N) + (V_N - V_P) = V_{Hall} + \int_N^P \vec{E} \,.\, dx\,\vec{e_x} = V_{Hall} + E_x \,.\, d.$$

Dans le conducteur $E_x = \dfrac{J}{\gamma} = \dfrac{I}{\gamma S}$.

D'où :

$$\boxed{V = V_{Hall} + \frac{Id}{\gamma S}}$$

Pour s'affranchir de l'erreur commise en confondant V et V_{Hall} on peut utiliser un décaleur de zéro : on ajuste ce **décaleur pour obtenir $\mathbf{V_{Hall} = 0}$ en l'absence de champ**.

C.A.P.E.S

(Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'Électricité appliquée - Session : 1994

ETUDE D' UN GENERATEUR DE SIGNAUX

1- Etude de l'Oscillateur

1.1 R_3 protége l'entrée de l'inverseur I_1.

1.2 $v_1(0-) = 0$ $\quad u_D(0-) = +\frac{E}{2}$ $\quad v_2(0-) = E$

$u_D(0+) = -\frac{E}{2}$ $\quad v_2(0+) = 0$

$$u_D(t) = E\left[1 - \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{t}{R_1C_1}\right)\right]$$

1.3 θ_1 est obtenu pour $u_D = \frac{E}{2}$ soit $\theta_1 = R_1C_1 \, Ln(3)$ (D1 conduit)

$\theta_1 = 243\ \mu s$

1.4 $u_D(t') = \frac{3E}{2}\exp\left(-\frac{t'}{R_2C_1}\right)$ $\quad \theta_2 = R_2C_1 \, Ln(3)$ (D2 conduit)

A chaque passage de u_D par $\frac{E}{2}$ ou $-\frac{E}{2}$, l'inverseur I_1 bascule ce qui entraîne la variation de u_D en sens inverse de la précédente.

$T = \theta_1 + \theta_2 = (R_1+R_2)\, C_1 \, Ln(3) = 250\ \mu s$

1.5 Voir document . $\alpha_4 = 0{,}031 = 3{,}1\%$

2 Etude du générateur de courant

2.1 $R_6\, i_c + R_5\,(i + i') = 0$ $\quad$ (Maille E- S P Q E+)

2.2 $R_4\,(i + i') = e$ $\quad$ (Maille N E- E+ Q M)

2.3 $i_c = -\frac{e\ R_5}{R4\ R6} = cste$ $\quad i_{co} = 1{,}02$ mA

2.4 En négligeant i' devant i_{co}, on obtient :

$v_{chmax} = E - R_6 i_{co} = 12{,}8$ V.

3 Etude du générateur de rampe

3.1 $e_{(t)} = -v_{3(t)}$ (Amplificateur inverseur A = -1)

3.2 $e = -E = -15$ V $\quad i_c = i_{co} = 1{,}02$ mA

$e = 0$ V. $\quad i_c = 0$

3.3 $V_3 = E = 15$ V $\quad V_4 = 0$ $\quad$ T1 bloqué

$e = -15$ V $\quad V_{5(t)} = \frac{i_{co} t}{C_2}$

3.4 $C_2 = 24{,}8$ nF

3.5 (t1,T) : $V_4 = E$ $\quad$ T1 passant $\quad i(T1) = 0{,}545$ A à t = t1 ($i_B = 4{,}54$ mA)
Décharge presqu'instantanée du condensateur dans T1 et $V_5 = 0$

3.6 voir document réponse

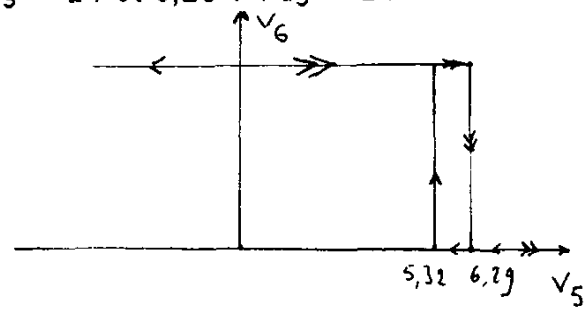
4 Etude du comparateur

4.1 C'est un comparateur à hystérésis qui bascule si $V_5 = V_r$.

$V_5 < V_r \quad V_6 = E$
$V_5 > V_r \quad V_6 = 0$ (rôle de D3)

4.2 On a alors $V_r = \frac{90 + 0{,}5 u_s}{15{,}5}$ (Théorème de Millmann)

Les deux seuils de basculement sont 5,32 V ($u_s = -E$) et 6,29 V ($u_s = +E$)
D'où le graphe $V_6 = f(V_5)$



4.3 Voir document réponse $\quad \alpha_6 = 0{,}615$

4.4 $\alpha_6 = \frac{243\ V_r + 70}{2500}$

5 Génération de V_r par un convertisseur

5.1 E- = E+ = 0 donc les potentiels des points A_i sont toujours nuls quelles que soient les valeurs des variables binaires a_i. L'état du système est donc indépendant de ces valeurs ainsi que les potentiels u_i.

5.2 $u_3 = \frac{u_2}{2}$; $u_2 = \frac{u_1}{2}$; $u_1 = \frac{U_0}{2}$

$u_3 = \frac{U_0}{8}$; $u_2 = \frac{U_0}{4}$

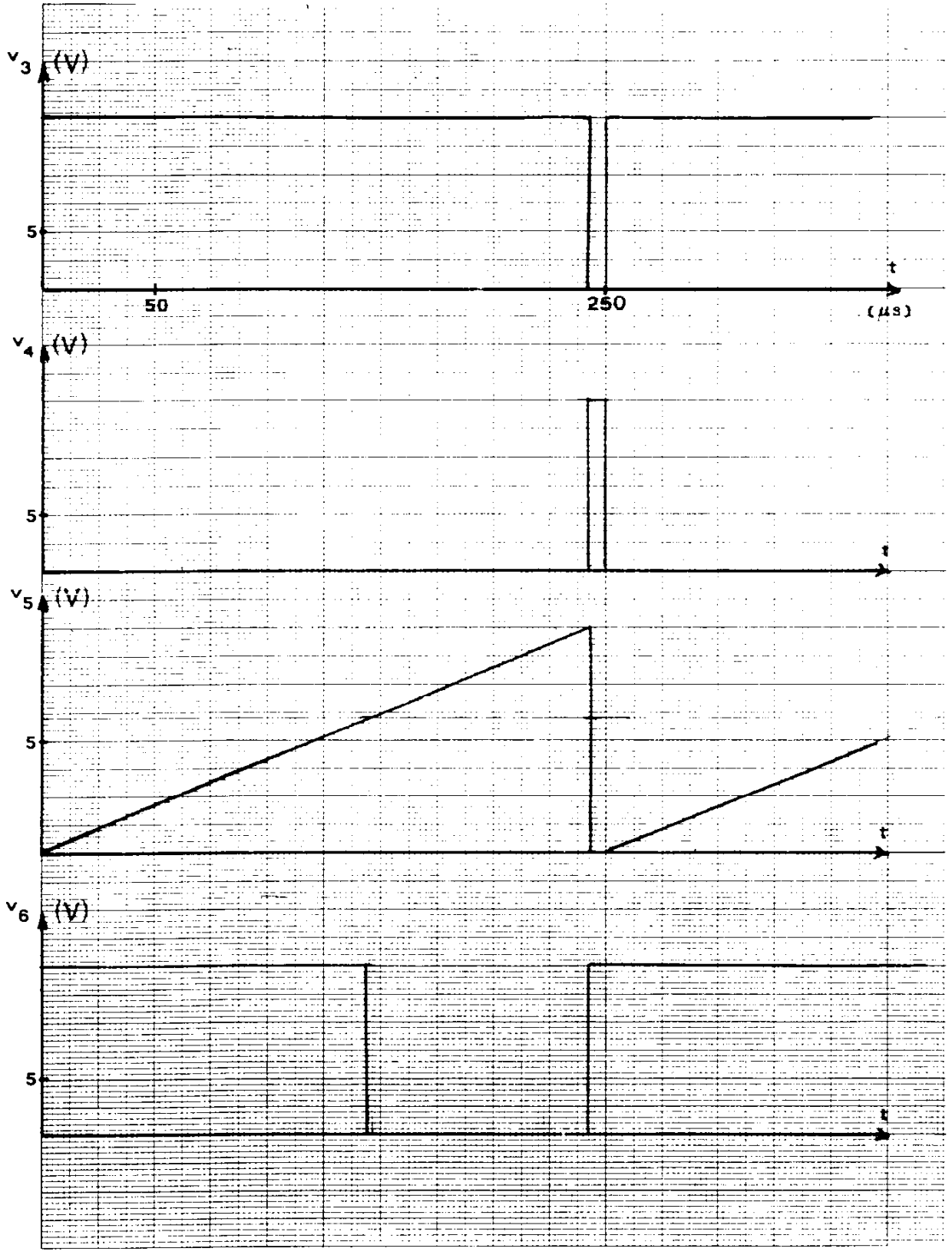
5.3 $I_0 = \frac{U_0}{16\ R}\ N$

5.4 $v_r = -\frac{U_0}{16}\ N \qquad U_0 = -10{,}24$ V.

5.5 $\alpha_6 = 0{,}0622\ N + 0{,}028$

$\alpha_{6max} = 96{,}1\ \%$

Document réponse n° 1



ETUDE D'UN ALTERNATEUR D'AUTOMOBILE

1 Etude de l'alternateur seul au laboratoire

1.1 à 1000 tr/min

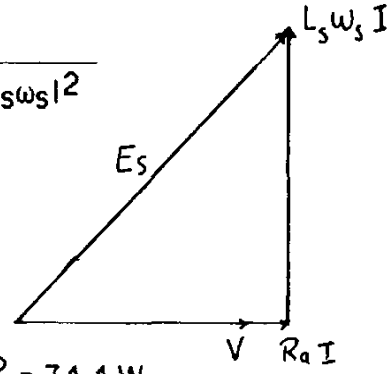
1.1.1 $f_s = pn = 6 \times \frac{1000}{60} = 100$ Hz

1.1.2 Z_s est obtenu à partir de l'essai en court-circuit. Pour $i_e = 1,8$ A. $U_V = 17$ V et $E_s = V = \frac{17}{\sqrt{3}} = 9,81$ V. Pour $i_e = 1,0$ A. $E_s = 9,81 \times \frac{1,0}{1,8} = 5,45$ V et $Z_s = \frac{E_s}{I_{cc}} = \frac{5,45}{16} = 0,341\ \Omega$.

1.1.3 $X_s = \sqrt{Z_s^2 - R_a^2} = \sqrt{0,341^2 - 0,062^2} = 0,335\ \Omega$

et $L_s = \frac{X_s}{\omega_s} = \frac{0,341}{2\pi f_s} = 0,533$ mH .

1.1.4 $\underline{E_s} = \underline{Z_s}\,\underline{I} + \underline{V} = \underline{V} + R_a\,\underline{I} + j\,L_s\omega_s\,\underline{I}$ ($\underline{I}$ en phase avec $\underline{V}$. , débit sur résistances) d'où le diagramme par phase avec $V = \frac{11}{\sqrt{3}} = 6,35$ V.



On mesure : $E_s = 10,1$ V ou on calcule $E_s = \sqrt{[\ V + R_a I\ ]^2 + L_s\omega_s I^2}$

et $i_{e1} = 1,8 \times \frac{10,1}{9,81} = 1,86$ A.

1.1.5 $P_u = \sqrt{3}\,U\,I = 381$ W. $p_f + p_m = 30$ W. $p_{Js} = 3 \times R_a I^2 = 74,4$ W. $p_{Jr} = r_e \times i_{e1}^2 = 6,92$ W.

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + p_f + p_m + p_{Jr} + p_{Js}} = 77,4\ \%$$

1.2 à 7500 tr/min

1.2.1 $f_s = 750$ Hz

1.2.2 $X_s = L\omega_s = 2,51\ \Omega$.

1.2.3 Les calculs sont semblables ceux de 1.1.4. On trouve $E_s = 50,8$ V et donc $E_{s2} = 6,77$ V ramené à 1000 tr/min

$$\text{soit : } i_{e2} = \left(1{,}8 \ \frac{6{,}77}{9{,}81}\right) \text{ A} = 1{,}24 \text{ A}.$$

1.2.4. • p_m : à l'aide d'un moteur taré, mesurer la puissance mécanique p_m nécessaire pour entraîner à vide, sans excitation, l'alternateur à la vitesse désirée.

p_f : toujours à l'aide du moteur taré, mesurer la puissance totale p_t consommée pour entraîner à la même vitesse l'alternateur à vide mais excité : $p_f = p_t - p_m$.

• En notant f la fréquence des tensions rotoriques et B la valeur maximale du champ magnétique dans les tôles du stator, les pertes dans le fer, essentiellement localisées au stator, comportent les pertes par hystérésis, données par la formule empirique $p_{fh} = k_1 \, f \, B^2$, et les pertes par courants de Foucault données par l'expression $p_{fcF} = k_2 \, f^2 \, B^2$. Pour obtenir, à vide (et à fréquence constante), les mêmes pertes dans le fer que dans la marche en charge, il faut que le champ magnétique B ait, dans la marche à vide, la même valeur qu'en charge.

Le flux $\underline{\Phi}_e$ embrassé par un enroulement du stator est dû pour l'essentiel à des lignes de champ magnétique régnant dans le fer du stator et y induisant un flux $\underline{\Phi}_c$; à $\underline{\Phi}_c$ s'ajoute toutefois un flux de fuites $\underline{\Phi}_f = \lambda \, \underline{I}$ (λ étant l'inductance de fuites d'un enroulement du stator).

Soit $\underline{E}_e$ la f.é.m. correspondant à $\underline{\Phi}_e$:

$$\underline{E}_e = - \, j\omega \, \underline{\Phi}_e = - \, j\omega \, \underline{\Phi}_c - j \, \lambda \, \omega \, \underline{I} = \underline{V} + R \, \underline{I}$$

C'est le flux $\underline{\Phi}_c$ (ou la f.é.m. $\underline{E}_c = - \, j \, \omega \, \underline{\Phi}_c$) qui, pour que les pertes soient inchangées, doit rester constant(e) . Or :

$\underline{E}_c = - \, j \, \omega \, \underline{\Phi}_c = \underline{V} + R \, \underline{I} + j \, \lambda \, \omega \, \underline{I}$ tandis que $\underline{E}_s = \underline{V} + R \, \underline{I} + j \, L_s \, \omega \, \underline{I}$.

Comme, en général l'inductance de fuites λ est très inférieure à l'inductance synchrone L_s, on voit que la f.é.m. E_c qui doit rester constante est très inférieure à la force électromotrice synchrone E_s et très proche de la quantité $| \underline{V} + R \underline{I} | = V + RI = 7{,}6$ volts.

Pour obtenir, à vide et à 1000 tr / min, une f.é.m. de 7,6 V , il faut régler l'intensité i_e du courant d'excitation à la valeur $i_{e1} = 1{,}4$ A, tandis que pour obtenir la même f.é.m. à vide à 7500 tours par minute, il suffit d'une intensité $i_{e2} = 0{,}19 \text{ A} = i_{e1} \ / \ 7{,}5$.

• On voit donc que pour le même courant débité et la même tension en charge, le flux dans le fer est beaucoup plus faible à 7500 tr / min qu'à 1000 tr / min et, avec nos hypothèses simplificatrices, l'on peut considérer que le produit B f est inchangé : les pertes par courants de Foucault sont donc à peu près constantes tandis que les pertes par hystérésis sont divisées par 7,5 ce qui explique que la puissance p'_f soit inférieure à p_f.

Les pertes mécaniques, elles, ne dépendent que de la vitesse de la machine, autrement dit de la fréquence f des tensions et courants mis en jeu. Les frottements secs correspondent à une puisance perdue proportionnelle à f tandis que les frottements visqueux (ventilation) varient comme f^2. La puissance correspondant aux pertes mécaniques croît donc avec la fréquence f plus "vite" que f, on a donc $p'_m > 7{,}5\ p_m$.

• Par des calculs semblables à ceux de la question 1.1.5, on trouve que le rendement de l'alternateur vaut alors $\eta = 65\ \%$.

2 Etude du redressement

2.1. Notons v_1, v_2 et v_3 les potentiels par rapport au point neutre des phases (1), (2) et (3). Entre D_1, D_2 et D_3, celle qui conduit est celle dont l'anode est au potentiel le plus élevé. Entre D_4, D_5 et D_6, celle qui conduit a sa cathode au potentiel le plus bas. D'où la tension $u_c(t) = v_i - v_j$, composée de six arcs de sinusoïde par période.

2.2. La tension $u_c(t)$ est toujours supérieure à E_B. Le courant dans la batterie est donc ininterrompu.

$$2.3.\ i_c = \frac{u_c - E_B}{R_B} \Rightarrow i_{c\,min} = 8{,}3\ A \text{ et } i_{c\,max} = 25{,}5\ A\ ;\ f_{i_c} = 1800\ Hz\ .$$

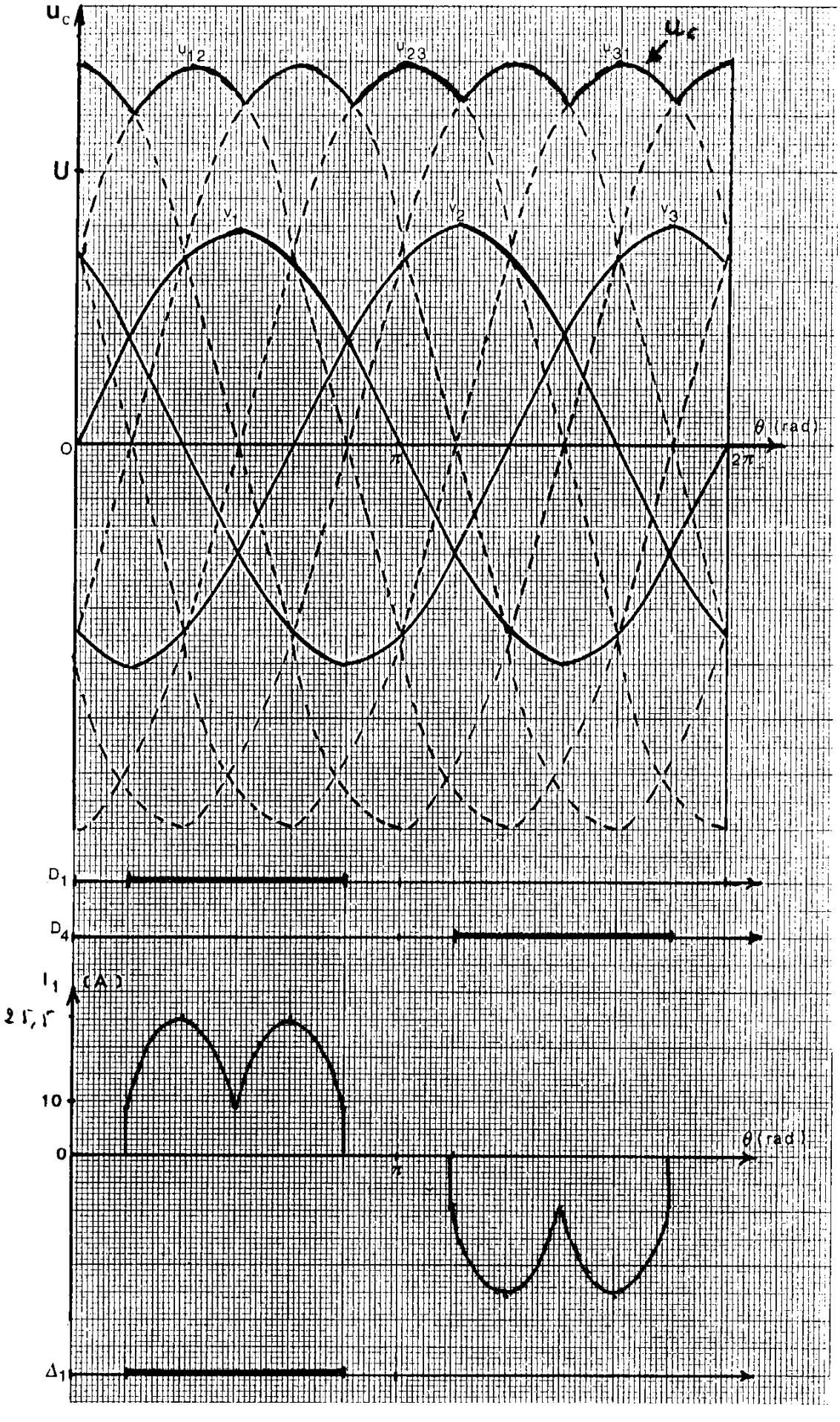
2.4. Voir le document réponse n° 2.

2.5 L'intensité $i_1(t)$ a même fréquence que celle des tensions délivrées par l'alternateur, soit f = p n' / 60 = 300 Hz. L'harmonique 3 de $i_1(t)$, que nous notons i_{13} (t) a donc pour fréquence 900 Hz, fréquence assez élevée.

Les harmoniques 3 respectifs des intensités $i_2(t)$ et $i_3(t)$ sont en phase avec $i_{13}(t)$. On a même i_{13} (t) = i_{23} (t) = i_{33} (t). De ce fait, l'inductance équivalente par phase L' qui rend compte de la réaction d'induit de ces harmoniques diffère de l'inductance synchrone L_s (inductance cyclique, de la forme $L_s = L - M$ à ne pas confondre avec l'inductance L d'un enroulement, en effet, avec les mêmes notations évidentes, L' = L + 2 M) . Mais L' et L ont le même ordre de grandeur et la réactance L'ω est de l'ordre de 3 ohms, elle est donc élevée et la tension aux bornes de L' n'est donc pas négligeable. Même en supposant que la f.é.m. e_s due au seul flux du rotor est sinusoïdale, la réaction d'induit introduit donc d'importants harmoniques dans les tensions délivrées par l'alternateur et celles-ci ne peuvent donc être sinusoïdales. Cependant, dans la suite du problème, nous admettrons que les tensions, v_1, v_2 et v_3, sinusoïdales, forment un système triphsé équilibré.

$$2.6.\ u_{c\,moy} = \frac{12\ U_M}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\theta\ d\theta = \frac{3\ U_M}{\pi} = 1{,}35\ U = 14{,}9\ V.$$

Document réponse n° 2



2.7 $i_{cmoy} = \dfrac{u_{cmoy} - E_B}{R_B} = 19{,}6$ A.

3 Etude de la régulation

3.1 La résistance r assure la commutation des diodes lors de l'ouverture du hacheur et évite les surtensions sur les diodes.

3.2 voir document ($\Delta 1$ conduit si $V_1 > V_2$ ou V_3)

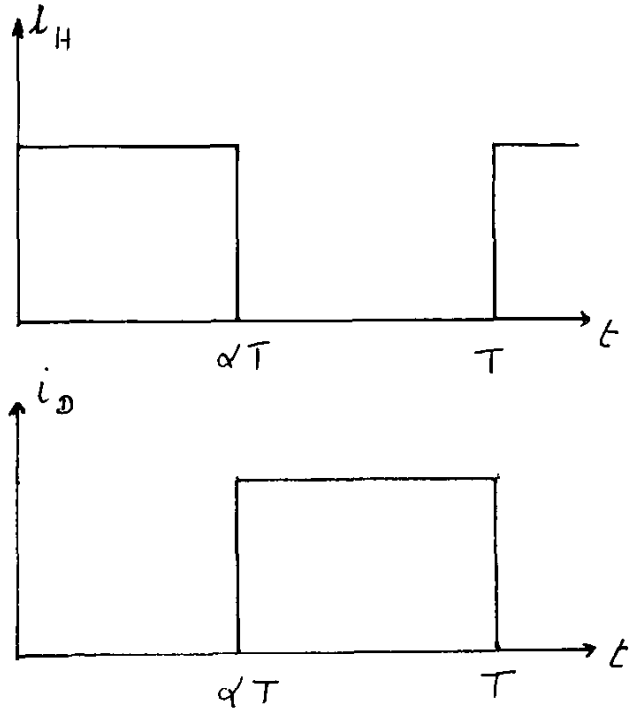
3.3 C'est un redressement par 3 diodes des tensions triphasées v(t), chaque diode conduisant pendant un tiers de période.

$$v_{emoy} = \frac{Vm}{\frac{2\pi}{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\theta \, d\theta = -\frac{3U\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{3}} \left[\cos\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} \right] = \frac{3U\sqrt{2}}{2\pi} = 7{,}43 \text{ V.}$$

$$3.4\ P = \frac{v_{eff}^2}{r} \text{ ; avec } v_{eff}^2 = \frac{Vm^2}{\frac{2\pi}{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin^2\theta \, d\theta = (1{,}017\, v_{emoy})^2 .$$

D'où : P = 0,57 W.

3.5 $u_{emoy} = r_e\, i_{emoy} = 2 \times 1{,}8 = 3{,}6$ V. $= \alpha\, v_{emoy} = \alpha \times 7{,}43$.

D'où $\alpha = 0{,}484 = 48{,}4\ \%$

3.6 voir courbe ci-contre.