

# Agrégation

## OPTION : PHYSIQUE

Épreuve C : Problème de physique - Session de 1990

par J.P. FAROUX, H. GIÉ

### I

I.1. a. Les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent : pour l'atome considéré avec  $E = \hbar\omega$  et  $k = \frac{\omega}{c}$  :

a) 
$$\hbar \vec{k} + M\vec{v} = M\vec{v}' \quad (1)$$

b) 
$$E_{a1} + \frac{1}{2} Mv^2 + E = E_{a2} + \frac{1}{2} Mv'^2$$

d'où l'on déduit :

$$E = \Delta E_a + \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + \hbar \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (2)$$

Cette relation traduit l'accord entre l'énergie  $E$  du photon et  $\Delta E_a = E_{a2} - E_{a1}$ , de sorte que la probabilité d'absorption est maximale (condition de «résonance»).

b. • Le terme  $\frac{\hbar^2 k^2}{2M}$  représente l'énergie cinétique de recul  $E_r$  de l'atome dans le référentiel initial de cet atome au repos.

•  $\omega'$  telle que :  $E - \hbar \vec{k} \cdot \vec{v} = \hbar (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) = \hbar \omega'$

est la pulsation du photon dans ce même référentiel.

La relation :

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (3)$$

traduit l'effet Doppler.

c.  $\tau = \frac{1}{\Gamma}$  représente la durée de vie moyenne de l'état excité.  $\hbar\Gamma$  représente l'incertitude sur  $E_{a2}$  ( $\hbar\Gamma \cdot \tau = \hbar$ ).

On compare l'énergie de recul  $E_r$  à  $\hbar\Gamma$  :

$$\frac{E_r}{\hbar\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{\hbar \omega_0^2}{Mc^2 \Gamma} = \frac{2\pi^2 \hbar}{\lambda_0^2 M \Gamma} \approx \frac{1}{400}$$

On peut donc négliger l'énergie de recul de l'atome laquelle est beaucoup plus faible que l'incertitude  $\Delta E_{a2}$ .

d. D'après (I.1.a.) :

$$\Delta v_x = \frac{\hbar k}{M} = \frac{\hbar \omega}{Mc}$$

et

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} = \frac{\hbar \omega}{Mc v_x}$$

Si on prend pour  $v_x$  sa valeur d'agitation thermique  $\left(\frac{1}{2} M v_x^2 = \frac{1}{2} k_B T\right)$ :

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} = \frac{\hbar \omega}{c \sqrt{M k_B T}} = \left( \frac{\hbar \omega}{M c^2} \cdot \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^{1/2}$$

Application numérique :  $T = 900\text{K}$ ,  $\lambda = \lambda_0 = 0,589 \mu\text{m} \Rightarrow \frac{\hbar \omega}{M c^2} = 10^{-10}$ ,  $\frac{\hbar \omega}{k_B T} = 28$   $\frac{\Delta v_x}{v_x} = 5,310^{-5}$

I.2. Un calcul analogue à celui effectué en I.1.a. donne :  $E' = \Delta E_a - \frac{\hbar^2 k'^2}{2M} + \hbar \vec{k}' \cdot \vec{v}'$ ,

équation dans laquelle on peut négliger l'énergie de recul,  $\frac{\hbar^2 k'^2}{2M}$ , soit : compte tenu de ce que

$$\hbar \vec{k}' = \frac{E'}{c} \vec{u}' :$$

$$E' = \Delta E_a + \frac{E'}{c} \vec{u}' \cdot \vec{v}'$$

d'où :

$$E' = \frac{\Delta E_a}{1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}'}{c}} \quad (4)$$

et

$$\Delta \vec{v}' = - \frac{\hbar \vec{k}' \cdot \vec{u}'}{M} = - \frac{E'}{M c} \vec{u}'$$

soit :

$$\Delta \vec{v}' = - \frac{\Delta E_a / M c}{1 - \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v}'}{c}}$$

I.3. a. La probabilité par unité de temps d'excitation de l'atome dans son état fondamental est  $\beta I$  à laquelle correspond une durée de vie moyenne dans cet état :  $\tau_1 = 1/\beta I$ .

De même, la probabilité par unité de temps d'émission, ramenant l'atome dans son état fondamental est  $\Gamma + \beta I$  d'où la durée de vie moyenne dans l'état excité :  $\tau_2 = 1/(\Gamma + \beta I)$ .

On en déduit la durée moyenne d'un cycle absorption émission c'est-à-dire le temps moyen que l'atome passe dans l'état excité :

$$\tau_m = \tau_1 + \tau_2 = \frac{1}{\beta I} + \frac{1}{\Gamma + \beta I} \quad (5)$$

d'où la fraction de temps que l'atome passe dans l'état excité :

$$\frac{\tau_2}{\tau_m} = \frac{1}{\Gamma + \beta I} \cdot \frac{\beta I (\Gamma + \beta I)}{\Gamma + 2 \beta I} = \frac{\beta I}{\Gamma + 2 \beta I}$$

Lorsque  $I \rightarrow \infty$  ce rapport tend vers 1/2. L'émission spontanée est négligeable et les probabilités d'absorption et d'émission sont alors égales.

b. Pour un cycle, l'absorption transfère à l'atome la quantité de mouvement  $\hbar \vec{k}$ ; l'émission stimulée lui transfère  $-\hbar \vec{k}$  mais elle se produit avec la probabilité  $\frac{\beta I}{\Gamma + \beta I}$  d'où le transfert par cycle :

$$\hbar \vec{k} \left( 1 - \frac{\beta I}{\Gamma + \beta I} \right) = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{\Gamma + \beta I}$$

Le nombre moyen de cycles par unité de temps est :

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{\Gamma + \beta I}{\Gamma + 2\beta I} \cdot \beta I$$

d'où la quantité de mouvement acquise par l'atome par unité de temps :

$$\Delta \vec{p} \approx \hbar \vec{k} \Gamma \frac{\beta I}{\Gamma + 2\beta I} \quad \text{pour 1 seconde.}$$

Ce qui correspond à une force moyenne  $\vec{F}_1 = f \Gamma \hbar \vec{k}$  avec :

$$f = \frac{\beta I}{\Gamma + 2\beta I} \tag{6}$$

Soit, en introduisant le facteur de saturation  $s = 2 \beta I / \Gamma$  :

$$f = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \Rightarrow \vec{F} = \frac{\Gamma}{2} \hbar \vec{k} \frac{s}{1+s} \tag{7}$$

La valeur maximale de  $\vec{F}_1$  est obtenue lorsque  $s \rightarrow \infty$ , soit :

$$\vec{F}_{1m} = \frac{1}{2} \Gamma \hbar \vec{k} \quad \left( f = \frac{1}{2} \right) \tag{8}$$

Dans ce cas limite, l'atome passe en moyenne la moitié de son temps dans l'état excité. Le nombre d'émissions spontanées par unité de temps est donc  $\frac{1}{2} \Gamma$  ; or un cycle absorption-émission stimulée ne modifie pas la quantité de mouvement de l'atome : seul un cycle absorption-émission spontanée lui communique  $\hbar \vec{k}$  d'où la force moyenne  $\frac{1}{2} \Gamma \hbar \vec{k}$ .

c. L'accélération maximale vaut :  $a_m = \frac{F_{1m}}{M} = \frac{\hbar \omega}{Mc} \frac{\Gamma}{2}$

soit pour des atomes de sodium :

$$a_m = \frac{\hbar \omega}{Mc^2} \frac{\Gamma c}{2} = 10^{-10} \times \pi 10^7 \times 3.10^8 = 10^6 \text{ m.s}^{-2} \approx 10^5 \text{ g} !$$

I.4. a. L'accélération  $\vec{a}$  est constante :

$$v_x = v_0 - at \quad \text{et} \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} at^2 \quad \text{avec} \quad a = a_m > 0$$

$$t_0 = \frac{v_0}{a_m} \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_m^2}$$

Application numérique :  $v_0 = 10^3 \text{ m.s.}^{-1} \Rightarrow t_0 = 10^{-3} \text{ s}$  et  $L = 0,5 \text{ m}$ .

Remarque : Le nombre de photons nécessaires pour immobiliser un seul atome de sodium de vitesse  $10^3 \text{ m.s.}^{-1}$  est égal à  $\Gamma t_0 / 2$  soit 30 000 environ.

b. Au cours du ralentissement, la pulsation  $\omega'$  «vue» par l'atome change et la condition I.l.a. de résonance pour l'absorption ne sera plus satisfaite. La force  $F_1$  tend ainsi à décroître.

I.5. a. D'après la relation (3) traduisant l'effet Döppler :

$$\omega = \omega_0 + \vec{k} \cdot \vec{v} = \omega_0 - kv \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \Delta E_a / \hbar$$

b. On en déduit la vitesse de balayage :  $\frac{d\omega}{dt} = \vec{k} \cdot \vec{a} + \frac{d\omega}{dt} \frac{\vec{k} \cdot \vec{v}}{c}$

$$\text{soit : } \frac{d\omega}{dt} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{a}}{1 + \frac{v}{c}} \approx \vec{k} \cdot \vec{a} \quad (v \ll c); \quad \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_{\text{max}} = \vec{k} \cdot \vec{a}_m = k a_m.$$

$$\text{Soit : } \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_{\text{max}} = \frac{k}{M} \hbar k \frac{\Gamma}{2} = E_r \frac{\Gamma}{\hbar}.$$

Si  $\frac{d\omega}{dt} > \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_{\text{max}}$ ,  $\omega$  croît trop vite et le ralentissement prend fin.

Si  $\frac{d\omega}{dt} < \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_{\text{max}}$ ,  $\omega$  croît trop lentement, l'accélération  $a$  va diminuer et la vitesse  $v$  décroît moins vite ;

il y a ajustement et freinage progressif (moins efficace que si  $\frac{d\omega}{dt} = \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_{\text{max}}$ ). Cette dernière condition est

d'ailleurs impossible à satisfaire strictement et il suffit que  $\frac{d\omega}{dt}$  ait une valeur proche de  $\left( \frac{d\omega}{dt} \right)_{\text{max}}$  par défaut.

c. Il y a interaction avec les atomes de vitesse  $v$  si :  $\omega_1 < \omega_0 - kv < \omega_2$

$$\text{soit : } \frac{\omega_0 - \omega_2}{k} < v < \frac{\omega_0 - \omega_1}{k}$$

Lorsque  $\omega$  croît, le laser interagira successivement avec les atomes de vitesse de plus en plus faible et les ralentira. On va donc obtenir ainsi un regroupement en vitesse des atomes de cette bande.

d.  $\Delta v = a_m (t_2 - t_1) = 10^3 \text{ m.s.}^{-1}$  d'où l'excursion en fréquence :

$$\Delta \nu = \frac{1}{2\pi} k \Delta v = \frac{\Delta v}{\lambda_0} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Hz.}$$

I.6. a. La condition de résonance s'écrit :  $\omega = \omega'_0 - kv(z)$

$$\text{soit : } \omega = \omega_0 + bB(z) - kv(z) \quad (8).$$

Le théorème de l'énergie cinétique donne :  $\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} Mv_0^2 - Ma_m z$

soit :  $v = (v_0^2 - 2a_m z)^{1/2}$

d'où, si la condition de résonance est en permanence satisfaite :

$$B(z) = \frac{\omega - \omega_0}{b} + \frac{kv_0}{b} \left( 1 - \frac{2a_m z}{v_0^2} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{\omega - \omega_0}{b} + \frac{kv_0}{b} f(z)$$

avec :

$$f(z) = \left( 1 - \frac{2a_m z}{v_0^2} \right)^{1/2}$$

La fonction B(z) est monotone décroissante variant de  $B(0) = \frac{\omega - \omega_0 + kv_0}{b}$  à B(L).

b. On a :  $v_0 - v(L) = \frac{b}{k} [B(0) - B(L)]$

c. Pour  $v_0 = 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $v(L) = 0$ ,  $b = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ SI}$  :

$B(0) - B(L) = 0,76 \text{ T}$ ,  $L = 0,5 \text{ m}$ ,  $t_0 = 10^{-3} \text{ s}$ .

d. Les seuls atomes qui interagissent avec l'onde laser sont tels que  $v(L) < v_i < v_0$ . Un tel atome commence à être freiné lorsqu'il arrive en  $z_1$  tel que B( $z_1$ ) permette de satisfaire à la condition de résonance (8). Il y a regroupement en vitesse des atomes à la sortie sur la vitesse v(L).

1.7. a. On a :  $(\beta I)_1 = A \frac{\Gamma}{(\omega' - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$

avec :  $\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}$  (3)

Soit :  $(\beta I)_1 = A \frac{\Gamma}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v} - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \frac{A\Gamma}{(\delta - \Delta)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$  (9)

b. D'après (7) :

$\vec{F}_1(1) \approx \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s_1}{1 + s_1}$  soit en effectuant un développement limité au 1<sup>er</sup> ordre en  $\Delta$  :

$$\vec{F}_1(1) \approx \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \left[ \frac{s_0}{1 + s_0} + \Delta \frac{s_0}{(1 + s_0)^2} \frac{2\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right] \quad (10)$$

Le terme supplémentaire traduit l'effet Döppler.

Remarque : L'expression (10) permet de retrouver les résultats I.4., I.5. concernant le ralentissement des

atomes. Dans ce cas  $\Delta = \vec{k} \cdot \vec{v} < 0$ , ce qui implique pour un freinage efficace  $\delta < 0$  ( $\Delta \cdot \delta > 0$ ).

Ceci est conforme à la condition de résonance  $\delta = \omega - \omega_0 = -k v < 0$ .

c. Pour calculer  $\vec{F}_1(2)$ , il suffit de charger  $\vec{k}$  en  $-\vec{k}$  (donc aussi  $\Delta$  en  $-\Delta$ ), d'où :

$$\vec{F}_1(2) \approx -\hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \left[ \frac{s_0}{1+s_0} - \Delta \frac{s_0}{(s+s_0)^2} \frac{2\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right]$$

La force totale a pour expression :

$$\vec{F} = \vec{F}_1(1) + \vec{F}_1(2) \approx \hbar \vec{k} \Gamma \frac{s_0}{(1+s_0)^2} \frac{2\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (11)$$

Soit : 
$$\vec{F} = \hbar k^2 \Gamma \frac{s_0}{(1+s_0)^2} \frac{2\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} v_k$$

où  $v_k$  est la composante de  $\vec{v}$  sur  $\vec{k}$ .

d. Pour que  $\vec{F}$  joue le rôle d'une force de freinage vis à vis de  $\vec{v}_k$ , il faut  $\delta = \omega - \omega_0 < 0$ . Le double faisceau laser agit alors sur l'atome comme un frottement visqueux et  $\vec{v}_k \rightarrow \vec{0}$  au cours du temps.

e. Le facteur  $\frac{s_0}{(1+s_0)^2}$  est maximal pour  $s_0 = 1$  et le facteur  $\frac{|\delta|}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$  est maximal pour  $|\delta| = \frac{\Gamma}{2}$ .

## II

II.1. a. On a :  $\vec{F}_{el} = q \vec{E}(\vec{r}) - q \vec{E}(\vec{R})$

Soit au 1<sup>er</sup> ordre en  $\vec{r} - \vec{R}$  : 
$$\vec{F}_{el} = q (\vec{r} - \vec{R})_z \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right)_{\vec{r}=\vec{R}} \rightarrow \vec{p} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right)_{\vec{r}=\vec{R}}$$

et en moyenne séculaire : 
$$\overline{\vec{F}_{el}(\vec{R}, t)} = \left\langle \vec{p} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}(\vec{r}, t) \right\rangle_{\vec{r}=\vec{R}}$$

b. La force magnétique totale a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{mag} &= q \vec{r} \wedge \vec{B}(\vec{r}) - q \vec{R} \wedge \vec{B}(\vec{R}) \\ &\approx \vec{p} \wedge \vec{B}(\vec{R}) \quad \text{à l'ordre le plus bas.} \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\vec{F}_{mag} = \frac{d}{dt} [\vec{p} \wedge \vec{B}(\vec{R})] - \vec{p} \wedge \dot{\vec{B}}(\vec{R})$$

avec :

$$\dot{\vec{B}} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{R} \cdot \nabla_{\vec{R}}) \vec{B}$$

On peut négliger

$$(\dot{\vec{R}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}}) \vec{B} \approx \frac{|\dot{\vec{R}}|}{\lambda} \vec{B} \approx \frac{\dot{R}}{c} \omega \vec{B}$$

devant

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \omega \vec{B} \left( \frac{\dot{R}}{c} \ll 1 \right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{mag}} &\approx \frac{d}{dt} [\vec{p} \wedge \vec{B}] - \vec{p} \wedge \Lambda \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} [\vec{p} \wedge \vec{B}] + \vec{p} \wedge \Lambda \text{rot} \vec{E} \quad \left( \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

En moyenne temporelle  $\frac{d}{dt} [\vec{p} \wedge \vec{B}] = 0$  d'où

$$\vec{F}_{\text{mag}}(\vec{R}, t) = \overline{[\vec{p} \wedge \text{rot} \vec{E}(\vec{r}, t)]}_{\vec{r}=\vec{R}}$$

Soit encore :  $\vec{F}_{\text{mag}}(\vec{R}, t) = \overline{\left( \vec{p} \vec{\nabla} E - p \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right)}_{\vec{r}=\vec{R}}$

d'où la force moyenne totale exercée par l'onde sur le dipôle :

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{mag}} = \overline{(\vec{p} \vec{\nabla} E)}_{\vec{r}=\vec{R}} \quad (12)$$

II.2. a. On a :

$$p = \text{Re} [(\alpha' - i\alpha'') E_0 e^{i(\omega t + \Phi)}]$$

$$p = E_0(\vec{R}) [\alpha' \cos(\omega t + \Phi) + \alpha'' \sin(\omega t + \Phi)]$$

$$\text{et } \vec{\nabla} E = \vec{\nabla} E_0 \cos(\omega t + \Phi) - E_0 \sin(\omega t + \Phi) \vec{\nabla} \Phi$$

$$\text{d'où : } \vec{F} = E_0 \left( \frac{\alpha'}{2} \vec{\nabla} E_0 - \frac{\alpha''}{2} E_0 \vec{\nabla} \Phi \right) \quad (13)$$

en moyenne séculaire.

Soit  $\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$

avec :

a) 
$$\vec{F}_1 = -\frac{\alpha''}{2} E_0^2 \vec{\nabla} \Phi$$

(14)

b) 
$$\vec{F}_2 = \frac{\alpha'}{2} E_0 \vec{\nabla} E_0$$

b. La puissance fournie à l'atome par la force électrique a pour valeur instantanée :

$$q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) - q \dot{\vec{R}} \cdot \vec{E}(\vec{R})$$

Soit à l'ordre le plus bas :  $q (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}}) \cdot \vec{E}(\vec{R}) = \dot{\vec{p}} \cdot \vec{E}$

On en déduit la puissance moyenne :  $\overline{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{E}} = \frac{1}{2} \alpha'' \omega E_0^2$  (15)

$\alpha''$  est associé à l'absorption et traduit une dissipation d'énergie.

La force  $\vec{F}_1$  est associée à l'absorption et correspond à la force de pression de radiation étudiée en I.  
 $\vec{F}_1 = \vec{0}$  pour  $\alpha'' = 0$ .

$\vec{F}_2 = \vec{0}$  nécessite  $\vec{\nabla} E_0 = \vec{0}$  car on ne peut avoir  $\alpha' = 0$  si  $\alpha'' \neq 0$ .

c. • Onde plane progressive :  $E = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R})$

$$\Phi = -\vec{k} \cdot \vec{R} \Rightarrow \vec{F}_1 = \frac{\alpha''}{2} E_0^2 \vec{k} \text{ et } \vec{F}_2 = \vec{0}$$

• Onde plane stationnaire :  $E = E_m \cos(\vec{k} \cdot \vec{R}) \cos \omega t$

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ E_0(\vec{R}) = E_m \cos \vec{k} \cdot \vec{R} \Rightarrow \vec{F}_1 = 0 \text{ et } \vec{F}_2 = -\frac{\alpha'}{4} E_m^2 \sin(2\vec{k} \cdot \vec{R}) \vec{k} \end{cases}$$

d. Onde à «profil» gaussien :

$$\vec{\nabla} E_0 = E_m \left( -\frac{2\rho}{\rho_0^2} \right) e^{-\rho^2/\rho_0^2} \frac{\vec{\rho}}{\rho} = -2 \frac{E_0}{\rho_0^2} \vec{\rho} \text{ avec } E_0 = E_m e^{-\rho^2/\rho_0^2}$$

d'où la force de pression de radiation :

$$\vec{F}_2 = -K \vec{\rho} \text{ avec } K = \alpha' \frac{E_m^2}{\rho_0^2} \text{ pour } \rho \ll \rho_0$$

La puissance moyenne transportée par l'onde laser vaut :

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \int_0^\infty E_0^2 2\pi \rho d\rho = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \int_0^\infty E_m^2 e^{-2\rho^2/\rho_0^2} \rho d\rho$$

$$W = \frac{1}{4} \pi \rho_0^2 \epsilon_0 c E_m^2 \text{ d'où } K = \frac{4\alpha' W}{\pi \epsilon_0 c \rho_0^4}$$

Il s'agit d'une force de rappel pour  $\alpha' > 0$ .

II.3. a. Pour la superposition des 2 ondes planes progressives :

$$E_0^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{R}]$$

d'où :

$$\vec{F}_2 = \frac{\alpha'}{2} E_0 \vec{\nabla} E_0 = \frac{\alpha'}{4} \vec{\nabla} E_0^2.$$

Soit :

$$\vec{F}_2 = \frac{\alpha'}{4} E_1 E_2 (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \sin(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{R} \quad (16)$$

b. La puissance moyenne reçue par l'atome est nulle puisque  $\alpha'' = 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \cdot \vec{p}_2 &= E_1 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{R}) \alpha' E_2 (-\omega) \sin(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{R}) \\ &= \frac{\alpha'}{2} E_1 E_2 \omega \sin(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{R} \end{aligned}$$

d'où le nombre  $N$  de photons disparaissant par unité de temps de l'onde  $\vec{E}_1$  du fait de son interaction avec  $\vec{p}_2$  :

$$N = \frac{\vec{E}_1 \cdot \vec{p}_2}{\hbar \omega} = \frac{\alpha' E_1 E_2}{2\hbar} \sin(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{R} \quad (17)$$

Pour calculer le nombre de photons disparaissant de l'onde  $\vec{E}_2$  du fait de son interaction avec  $\vec{p}_1$ , il suffit de permuter les indices 1 et 2. Ce nombre est  $-N$ , de sorte que le bilan énergétique global est bien nul. En moyenne, les photons absorbés de 1 sont donnés à 2 par émission stimulée (redistribution cohérente) et vice-versa.

c. On a d'après (16) et (17) :

$$\vec{F}_2 = N \hbar (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (18)$$

Le bilan de quantité de mouvement n'est pas nul. Par unité de temps, l'atome absorbe  $N$  photons de quantité de mouvement  $\hbar \vec{k}_1$  et réémet par émission stimulée, c'est-à-dire de façon cohérente,  $N$  photons de quantité de mouvement  $\hbar \vec{k}_2$  d'où, en moyenne, l'expression (18) de la force  $\vec{F}_2$  qui traduit ce bilan de quantité de mouvement.

II.4 a. La polarisabilité statique  $\alpha_0$  est telle que :  $\omega_0^2 \alpha_0 = \mu$ .

b. Le calcul demandé est classique :

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma} = \alpha' - i\alpha''$$

d'où :

a)

$$\alpha' = \alpha_0 \omega_0^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (19)$$

b)

$$\alpha'' = \alpha_0 \omega_0^2 \frac{\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}$$

c. Si  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$  :

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx -2\omega\delta \text{ avec } \delta = \omega - \omega_0$$

On en déduit :

$$a) \quad \alpha' \approx \alpha_0 \frac{\omega_0}{2} \frac{-\delta}{\delta^2 + \Gamma^2/4}$$

(20)

$$b) \quad \alpha'' \approx \alpha_0 \frac{\omega_0}{2} \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4}$$

On note que  $\alpha' > 0$  pour  $\delta < 0$  soit  $\omega < \omega_0$  et  $\alpha' < 0$  pour  $\omega > \omega_0$ .

$\alpha''$  est toujours positif (absorption).

d.  $\vec{F}_2 = \frac{\alpha'}{4} \vec{\nabla} E_0^2$ . Si  $\delta < 0$ , l'atome est entraîné vers les zones de champ fort ( $\alpha' > 0$ ) ; à l'inverse si  $\delta > 0$ , l'atome est entraîné vers les zones de champ faible.

$|F_2|$  est maximale pour  $|\alpha'|$  maximal c'est-à-dire pour  $|\delta| = \Gamma/2$ .

Si  $\Gamma \rightarrow 0$ ,  $\alpha' \rightarrow -\frac{\alpha_0\omega_0}{2\delta} \neq 0$  alors que  $\alpha'' \rightarrow 0$  (pas d'absorption donc  $\vec{F}_1 = \vec{0}$ ). On retrouve bien le résultat II.3.c. avec  $\vec{F}_2 \neq \vec{0}$  bien que l'absorption soit nulle.

e.  $\vec{F}_1 = -\frac{\alpha''}{2} E_0^2 \vec{\nabla} \Phi$  ;  $|F_1|$  passe par un maximum pour  $\delta = 0$  (résonance).

$|F_1|$  croît sans limitation lorsque  $E_0$  croît, résultat incompatible avec I.3.c. Le modèle utilisé ici est linéaire donc incompatible avec une saturation. Nous verrons dans la partie III qu'un traitement quantique introduit la non linéarité et sa conséquence, la saturation.

### III

III.1. a. Avec la base choisie la matrice représentative de l'hamiltonien  $\hat{H}_0$  s'écrit :

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_{a_1} & 0 \\ 0 & E_{a_2} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\hat{H}_0 = \frac{E_{a_1} + E_{a_2}}{2} \hat{1} - \frac{E_{a_2} - E_{a_1}}{2} \hat{\sigma}_3 \quad (21)$$

b. On a :  $\langle 1 | \hat{D} | 1 \rangle = 0$        $\langle 2 | \hat{D} | 2 \rangle = 0$

résultat qui signifie que le moment dipolaire de l'atome est nul pour un état stationnaire (parité).

c. On a de façon évidente :  $\hat{H}_1 = -Ed \hat{\sigma}_1$

III.2. a.  $p = \langle \hat{D} \rangle$  d'où :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \langle [\hat{D}, \hat{H}_0 + \hat{H}_1] \rangle = \langle [\hat{D}, \hat{H}_0] \rangle = \left\langle \left[ d\hat{\sigma}_1, -\frac{E_{a_2} - E_{a_1}}{2} \hat{\sigma}_3 \right] \right\rangle \\ &= i d \hbar \omega_0 \langle \hat{\sigma}_2 \rangle \end{aligned}$$

en vertu de la relation de commutation  $[\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_1] = 2i \hat{\sigma}_2$ .

Finalement :  $\dot{\mathbf{p}} = \omega_0 d s_2$  (22)

b. On procède de même pour  $s_2$ :

$$i\hbar \dot{s}_2 = \langle [\hat{\sigma}_2, \hat{H}_0 + \hat{H}_1] \rangle = \left\langle \left[ \hat{\sigma}_2, -\frac{E_{a_2} - E_{a_1}}{2} \hat{\sigma}_3 - E d \hat{\sigma}_1 \right] \right\rangle$$

d'où :  $\dot{s}_2 = -\omega_0 s_1 + \frac{2Ed}{\hbar} s_3$

Soit :  $\dot{s}_2 = -\frac{\omega_0}{d} p + \frac{2Ed}{\hbar} s_3$  (23)

c. Si  $|\Psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$   $\pi_1 = aa^*$  et  $\pi_2 = bb^*$   
 on a :  $\pi_1 + \pi_2 = 1$  et  $\pi_1 - \pi_2 = aa^* - bb^* = s_3$

En éliminant  $s_2$  entre (22) et (23), on obtient :

$$\ddot{p} + \omega_0^2 p = \frac{2d^2\omega_0}{\hbar} (\pi_1 - \pi_2) E(t)$$
 (24)

d. On a :  $\dot{s}_3 = -\frac{2Ed}{\hbar} s_2 = -\frac{2E}{\hbar\omega_0} \dot{p}$

D'autre part :  $s_3 = \pi_1 - \pi_2 = 1 - 2\pi_2$

d'où :  $\dot{s}_3 = -2\dot{\pi}_2$

Soit :  $\dot{\pi}_2 = \frac{E\dot{p}}{\hbar\omega_0}$  (25)

$E\dot{p}$  représente la puissance moyenne reçue par l'atome et  $\frac{E\dot{p}}{\hbar\omega_0}$  est le nombre de photons absorbés par unité de temps.

e. On a ainsi, pour tenir compte de l'émission spontanée :

$$\ddot{p} + \Gamma \dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{2d^2\omega_0}{\hbar} (\pi_1 - \pi_2) E(t)$$
 (26)

$$\dot{\pi}_2 = -\Gamma \pi_2 + \frac{E\dot{p}}{\hbar\omega_0}$$
 (27)

En l'absence de champ externe,  $\pi_2$  relaxe en  $e^{-\Gamma t}$  ; il en est de même de  $p^2$  et de l'énergie ce qui est cohérent.

III.3. a. On a :

$$\frac{E \dot{p}}{\hbar \omega_0} = \frac{E_0 \omega}{\hbar \omega_0} [v(t) \cos^2(\omega t + \Phi) - u(t) \cos(\omega t + \Phi) \sin(\omega t + \Phi)]$$

On peut remplacer  $E \dot{p}$  par sa valeur moyenne prise sur une période optique soit :  $\frac{E \dot{p}}{\hbar \omega_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0 \omega}{\hbar \omega_0} v(t)$

d'où :

$$\dot{\pi}_2 = -\Gamma \pi_2 + \frac{1}{2} \frac{E_0 \omega}{\hbar \omega_0} v(t) \quad (28)$$

b. Il existe un régime stationnaire tel que  $\dot{\pi}_2 = 0$  d'où :

$$\pi_2 = \frac{1}{2} \frac{E_0 \omega}{\hbar \Gamma \omega_0} v \quad (29)$$

$v$  étant ainsi constant.

On peut trouver une solution avec  $u$  et  $v$  constants ; on reporte (29) dans (26) (avec  $\pi_1 - \pi_2 = 1 - 2\pi_2$ ) et en séparant les termes en  $\cos(\omega t + \Phi)$  et en  $\sin(\omega t + \Phi)$ , on obtient :

a)

$$u = \frac{2d^2 \omega_0}{\hbar} E_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left( \Gamma^2 + \frac{2d^2 E_0^2}{\hbar^2} \right)}$$

b)

$$v = \frac{2d^2 \omega_0}{\hbar} E_0 \frac{\omega \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \left( \Gamma^2 + \frac{2d^2 E_0^2}{\hbar^2} \right)} \quad (30)$$

c. si  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$  :  $\omega_0^2 - \omega^2 \approx -2\omega\delta$  et  $\omega \approx \omega_0$

d'où :

$$u = - \frac{d \omega_1 \delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}} \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{E_0 d}{\hbar} \quad (31)$$

$$v = \frac{d (\Gamma/2) \omega_1}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

On a ainsi :

$$\alpha' = \frac{u}{E_0} = - \frac{d^2}{\hbar} \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}} \quad \text{et} \quad \alpha'' = \frac{v}{E_0} = \frac{d^2}{\hbar} \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}} \quad (32)$$

On note que  $\alpha'$  et  $\alpha''$  dépendent de  $E_0^2$ , donc de l'intensité ce qui implique une non-linéarité qui manquait précisément dans le modèle classique (relations 20 a, b où ne figure pas au dénominateur le terme en  $\omega_1^2$ ). A cette non-linéarité est associé le phénomène de saturation.

III.4. a. D'après (14.a) :  $\vec{F}_1 = -\frac{\alpha''}{2} E_0^2 \vec{\nabla} \Phi$

Soit : 
$$\vec{F}_1 = -\frac{d^2 E_0^2}{2\hbar} \frac{\Gamma/2 \vec{\nabla} \Phi}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}} = -\frac{\hbar \omega_1^2}{2} \frac{\Gamma/2 \vec{\nabla} \Phi}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

et en introduisant le paramètre de saturation : 
$$s = \frac{\omega_1^2/2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{\hbar \Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \vec{\nabla} \Phi \quad (33)$$

où apparaît l'effet de saturation lorsque  $E_0$  augmente.

b. Pour une onde plane progressive  $\Phi = -\vec{k} \cdot \vec{R}$ .

D'où : 
$$\vec{F}_1 = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{s+1} \quad \text{identique à (7)}$$

On en déduit le probabilité d'excitation :

$$\beta I = \frac{\Gamma s}{2} = \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \frac{\omega_1^2}{2}$$

effectivement proportionnelle à  $E_0^2$  donc à  $I$ .

On retrouve l'expression de  $\beta I$  admise dans la question I.7.

c. D'après (14.b) : 
$$\vec{F}_2 = \frac{\alpha'}{2} E_0 \vec{\nabla} E_0 = -\frac{d^2}{4\hbar} \frac{\delta}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}} \vec{\nabla} E_0^2$$

Soit : 
$$\vec{F}_2 = -\frac{\hbar \delta}{4} \frac{\vec{\nabla} \omega_1^2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}} = -\vec{\nabla} U$$

d'où par intégration : 
$$U = \frac{\hbar \delta}{2} \text{Ln} \left[ 1 + \frac{\omega_1^2/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \right] = \frac{\hbar \delta}{2} \text{Ln} (1+s) \quad (34)$$

en prenant  $U = 0$  pour  $s = 0$  soit  $\omega_1 = 0$  ou  $E_0 d = 0$  (absence d'interaction).

III.5. a. Pour piéger l'atome il faut  $\delta < 0$  (puits de potentiel).

On retrouve la conclusion de la question II.2.d. où la force  $\vec{F}_2$  est une force de rappel pour  $\alpha' > 0$  donc  $\delta < 0$  (formule (32)).

$$|U| \text{ est maximal à } \omega_{1m} \text{ fixé pour } \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0 \text{ soit : } \text{Ln}(1 + s_m) + \delta_m \frac{s'_m}{1 + s_m} = 0$$

$$\text{avec : } \delta_m s'_m = \frac{-\omega_{1m}^2 \delta_m^2}{\left(\delta_m^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)^2} \approx -\frac{\omega_{1m}^2}{\delta_m^2} \approx 2 s_m$$

$$\text{d'où l'équation : } \text{Ln}(1 + s_m) - \frac{2 s_m}{1 + s_m} = 0$$

$$\Rightarrow s_m \approx 4 \quad \text{soit : } |\delta_m| = \frac{\omega_{1m}}{2\sqrt{2}}$$

$$b. \text{ La profondeur maximale } U_0 \text{ du puits vaut : } U_0 = \frac{-\hbar\omega_{1m}}{4\sqrt{2}} \text{Ln} 5 = -0,28 \hbar \omega_{1m}$$

$$c. \text{ On a : } d^2 = \frac{3\pi \epsilon_0 \hbar \Gamma}{(2\pi)^3} \lambda_0^3 \Rightarrow d = 2,13 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$$

$$\text{D'après II.2.d. : } E_m^2 = \frac{4W}{\pi \epsilon_0 c \rho_0^2} \Rightarrow E_m = 1,03 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$$

$$\text{d'où : } \omega_{1m} = \frac{E_m d}{\hbar} \Rightarrow \omega_1 = 2,08 \cdot 10^{11} \text{ rad.s}^{-1}$$

On en déduit la profondeur maximale du puits, soit d'après (34) :

$$U_m = \frac{\hbar \delta_m}{2} \text{Ln}(1 + s_m) = \frac{\hbar \omega_{1m}}{4\sqrt{2}} \text{Ln}(1 + s_m) \\ \approx \frac{\hbar \omega_{1m}}{4\sqrt{2}} \text{Ln} 5$$

$$\text{d'où : } U_m = 6,2 \cdot 10^{-24} \text{ J} = 0,45 \text{ K}$$

On notera la faible profondeur de ce puits d'où la nécessité de ralentir l'atome avant de le piéger.

d. En fait la force  $\vec{F}_1$  n'est pas nulle et a pour effet de modifier, en la diminuant, la profondeur du puits.

Le mouvement des atomes est une cause de limitation pour la spectroscopie de très haute résolution, en raison soit de l'effet Doppler lié aux vitesses thermiques des atomes d'un gaz, soit du temps limité que passe un atome dans la zone d'interaction avec la lumière et qui entraîne un élargissement supplémentaire des raies spectrales. Le «refroidissement laser» est une solution élégante pour ralentir, piéger et refroidir des atomes neutres.

En 1985, deux équipes américaines du National Bureau of Standards réussissaient l'arrêt d'atomes d'un jet de sodium en utilisant la pression de radiation. A Boulder, J. Hall et son équipe ont choisi de faire varier temporellement la fréquence du laser (cf. partie I.5. du problème) ; à Washington DC, W. Phillips et H. Metcalf ont fait varier spatialement la fréquence atomique de résonance en utilisant l'effet Zeeman produit par un champ magnétique (cf. partie I.6).

L'utilisation de la force-dipolaire (ou force de gradient) a été développée avec succès au Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure par Cl. Cohen Tannoudji, J. Dalibard et al. Elle permet d'assurer avec une grande efficacité les fonctions de piégeage et de refroidissement. Signalons que la température obtenue pour des atomes de césium ainsi piégés est d'environ 30  $\mu\text{K}$ , ce qui correspond à des vitesses

thermiques de quelques centimètres par seconde.

**On pourra lire avec profit les articles suivants :**

W. PHILLIPS et H. METCALF

Pour la Science, n° 115, mai 1987, p. 54

«Les atomes refroidis et piégés».

J. DALIBARD

La Recherche, n° 168, juillet - août 1985, p. 935

«Immobiliser les atomes à coup de lumière laser».

J. DALIBARD

Science et Vie, n° hors série, 1987

«Des atomes piégés par le froid».

# Agrégation

## OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve B : Composition d'Électricité, d'Électronique, d'Électrotechnique et d'Automatique - Session de 1990

### A. ÉTUDE D'UN DISPOSITIF DE MESURE VITESSE-POSITION

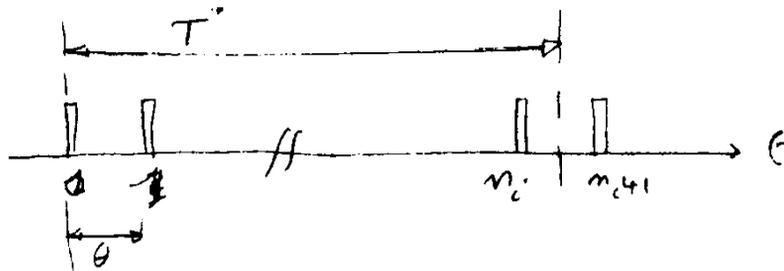
#### A.I. Mesure de la vitesse

##### A.I.1.

A.I.1.1. La vitesse doit rester constante pendant la durée  $T^*$ .

On mesure une vitesse moyenne en cette durée  $T^*$ .

A.I.1.2. Largeur des impulsions supposée très faible devant  $\theta$ .



La durée  $\theta$  qui sépare 2 impulsions vaut  $\theta = \frac{1}{N.V}$

$N$  = nombre de secteur/piste

$V$  = vitesse de rotation en t/s.

Si le comptage commence sur le front montant d'une impulsion, on a :

$$n_i \theta \leq T^* < (n_i + 1) \theta$$

On prendra la relation «quantifiée»  $T^* = n_i \theta$ .

Donc :  $n_i = \text{Int}(T^* N.V)$

A.I.1.3. Soit une vitesse :

$$V_1 \text{ tel que : } n_{i1} = T^* N V_1$$

$$V_2 \text{ tel que : } n_{i1} + 1 = T^* N V_2$$

$$\text{Alors on a : } 1 = T^* N(V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{1}{NT^*} = \text{résolution du dispositif de mesure.}$$

( $\Delta V$  correspond donc à 1 bit).

A.I.1.4.  $V_{\max} \Rightarrow$  codage sur la totalité des  $n$  bits. Codage  $2^n - 1$ .

$$V_{\max} = (2^n - 1) \Delta V = \frac{2^n - 1}{NT^*}$$

A.I.1.5. Applications numériques

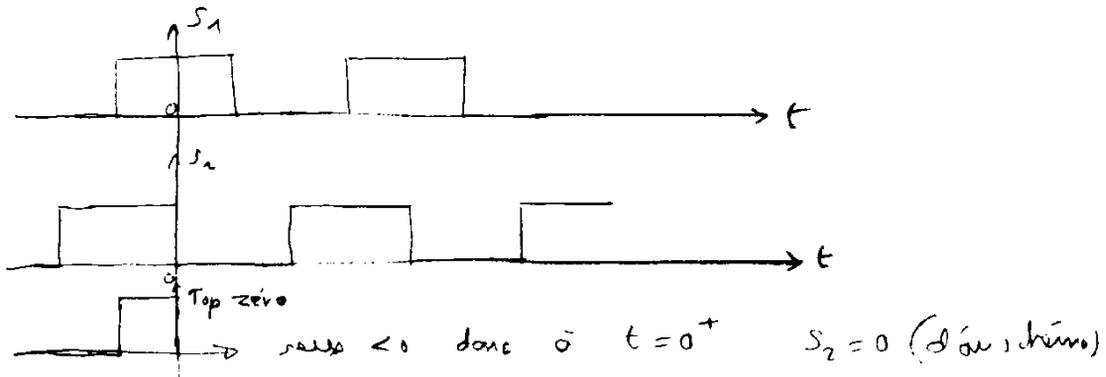
A.I.1.5.a.  $\Delta V = \frac{1}{NT^*} = \frac{1}{3,6} \times 60 = 16,66 \text{ t/mn}$  ou  $0,277 \text{ t/s}$ .

A.I.1.5.b.  $V_{\max} = (2^n - 1) \Delta V = 4250 \text{ t/mn}$ .

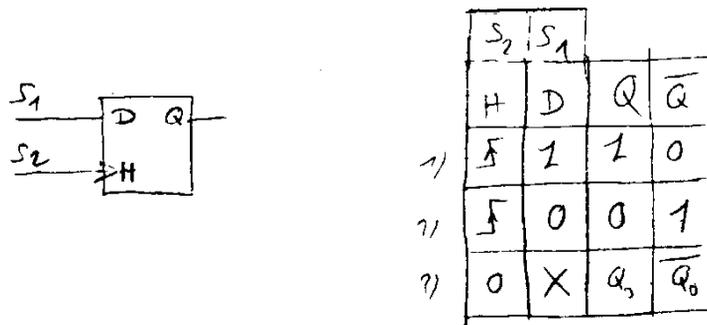
A.I.1.5.c. 4 bits  $\rightarrow V_{\min} = (2^4 - 1) \Delta V = 250 \text{ t/mn}$  (à 1 bit près  $\Rightarrow 266 \text{ t/mn}$ ).

A.I.2. Sens de rotation

A.I.2.1.

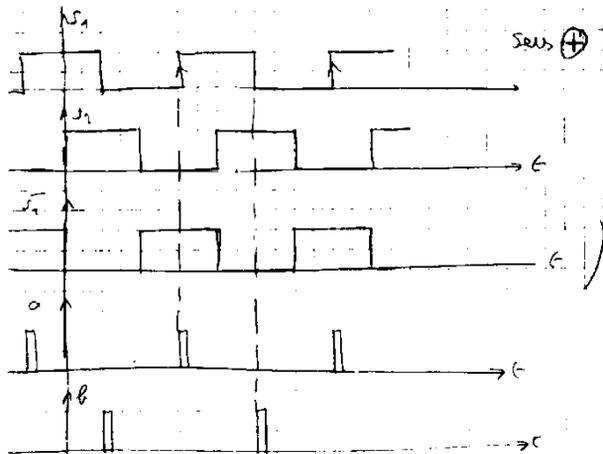


A.I.2.2.



A.I.2.2.a. Ici, pour le sens (-), à chaque front montant de S<sub>2</sub> (donc H) on a S<sub>1</sub> = 0 donc configuration ligne 2 et Q = 0 dans ce cas et  $\forall t$ . Pour H = 0  $\rightarrow$  pas de changement.

A.I.2.2.b. Pour le sens (+), à chaque front montant de S<sub>2</sub> on a S<sub>1</sub> = 1 (voir figure 2) donc ligne 1 et Q = 1



A.II. Mesure de la position

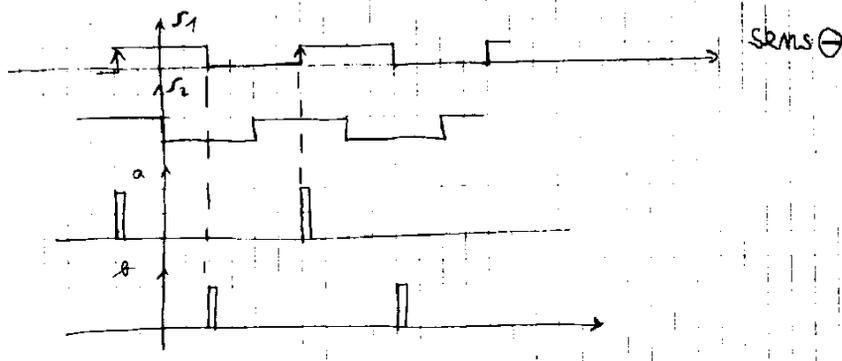
A.II.1. Bloc B<sub>1</sub>

A.II.1.1.

A.II.1.2. Il faut que a et b soient présents dans le sens + donc :

$$C^+ = b S_2 + a \bar{S}_2 \quad (b, a \text{ dépendant de } S_1, \text{ l'équation logique ne doit faire intervenir que } S_2).$$

A.II.1.3.



A.II.1.4. a et b présents sur  $C^-$  donc :

$$C^- = b \bar{S}_2 + a S_2$$

A.II.1.5.a.  $C^+ = b S_2 + a \bar{S}_2$  dans le sens (-) cela donne :  
 $b S_2 = 0$   
 $a \bar{S}_2 = 0$                       donc  $C^+ = 0$  pour le sens -

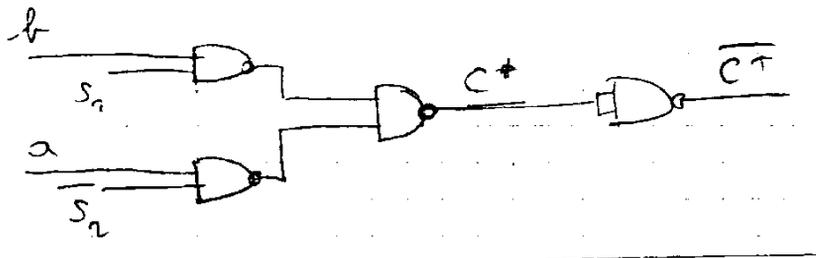
A.II.1.5.b. dans le sens (+) :  
 $C^- = b \bar{S}_2 + a S_2$   
 $b \bar{S}_2 = 0$   
 $a S_2 = 0$                        $C^- = 0$  pour le sens +

A.II.1.6. Réalisation de B1 : à partir de circuit ET et ET

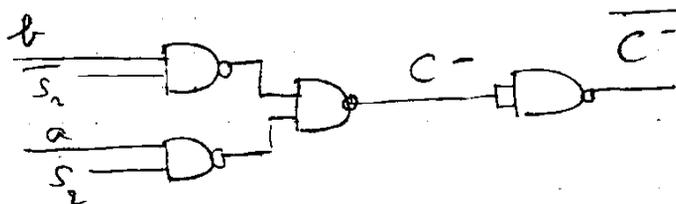
$$C^+ = b S_2 + a \bar{S}_2$$


---


$$C^+ = b S_2 + a \bar{S}_2 = b S_2 \cdot a \bar{S}_2$$



de même :  $C^- = b \bar{S}_2 + a S_2 = b \bar{S}_2 \cdot a S_2$

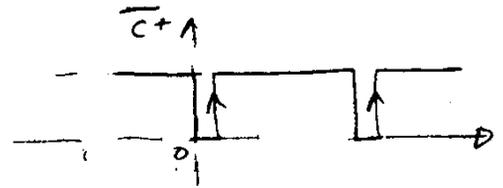


En fait ce sont les signaux  $C^+$  et  $C^-$  (et non  $C^+$  et  $C^-$ ) qui doivent attaquer le compteur (⇒ état 1 si absence d'impulsion).

Le comptage s'effectuant sur les fronts montants (voir figure 5), on a donc introduction d'un retard égal à la largeur d'impulsion du monostable.

Ceci n'est pas gênant pour la mesure de vitesse.

Pour la mesure de la position le retard spatial dépendra de la vitesse de rotation qui, dans ce cas, est en général très faible.



A.II.2. Décodeur  $C_1$ .

A.II.2.1. Comptage par 720  $2^9 < 720 < 2^{10}$   
il faut prendre la limite supérieure pour avoir un codage complet.

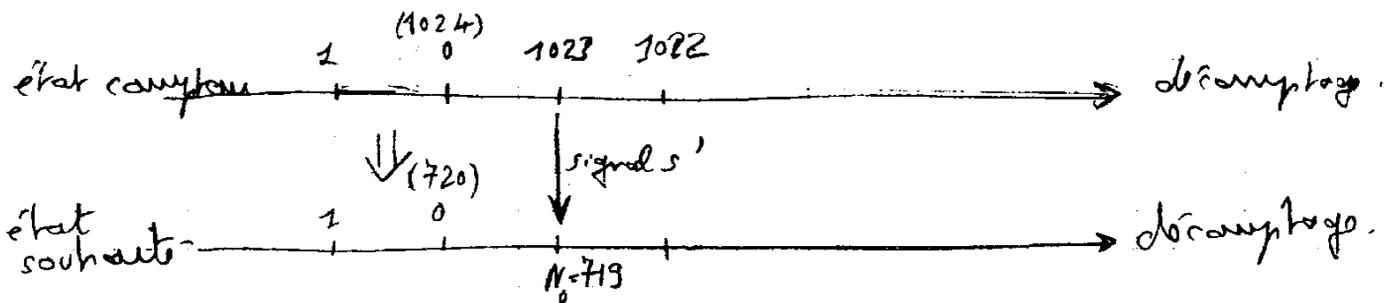
⇒  $n = 10$

A.II.2.2. Codeur :  $2 \times 360 = 720$  impulsions par tours.  
( $360^\circ$ )

donc  $\Delta\theta = 0,5^\circ/\text{bit}$  (résolution)

A.II.2.3. Choix 1023 :

$2^n = 2^{10} = 1024$  et 1023 → état 111111...1  
pour le compteur



passage 0 → 1023 interdit  
pour décomptage par 720 il faut 0 →  $719 = N_0$ .  
 $N_0 = 719$

A.II.2.4. Donc  $S' = 0$  pour  $N_c = 1023 = 2^{10} - 1$   
 $N_0 = 1023 \rightarrow Q_0 = Q_1 = \dots = Q_9 = 1$

d'où :  $S' = Q_0 \cdot Q_1 \cdot \dots \cdot Q_9$

A.II.2.5.  $S = 1$  pour  $N_1 = 720$

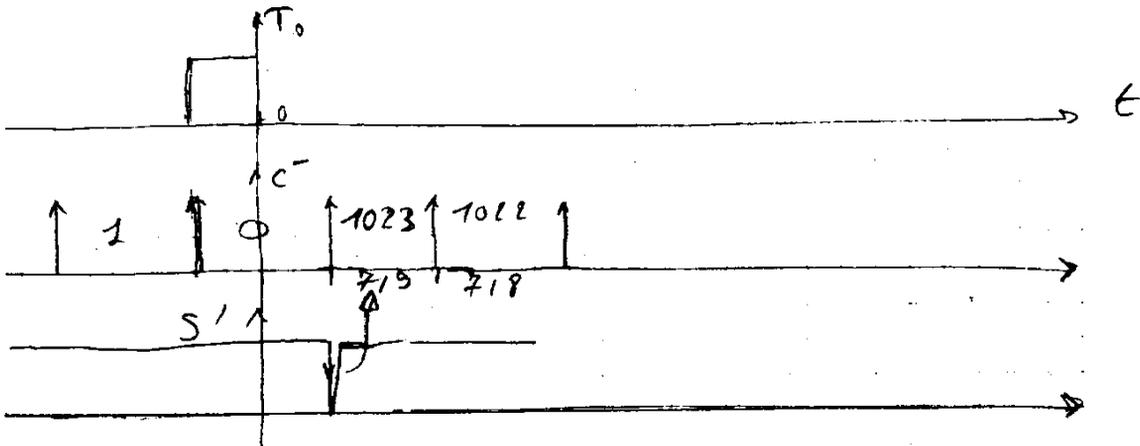
	$Q_9$	$Q_4Q_3$	$Q_0$
$N_1 = 720 = \$ 2 D 0$	X X	1 0	1 1 0 1
	2	D	0

$$S = Q_9 \cdot Q_7 \cdot Q_6 \cdot Q_4 \cdot \overline{Q_0} \cdot \overline{Q_1} \cdot \overline{Q_2} \cdot \overline{Q_3} \cdot \overline{Q_5} \cdot \overline{Q_8}$$

A.II.3.  $R_{f_0}$  relié à  $T_0$

c à d :  $T_0$  en service qui n'agit que sur RAZ (donc signal S double).

- a) \*  $S'$  provoque le passage 1023  $\rightarrow$  719 : doit être connecté en permanence (car comptage par 720).
- b1) \* Soit S déconnecté et décomptage.

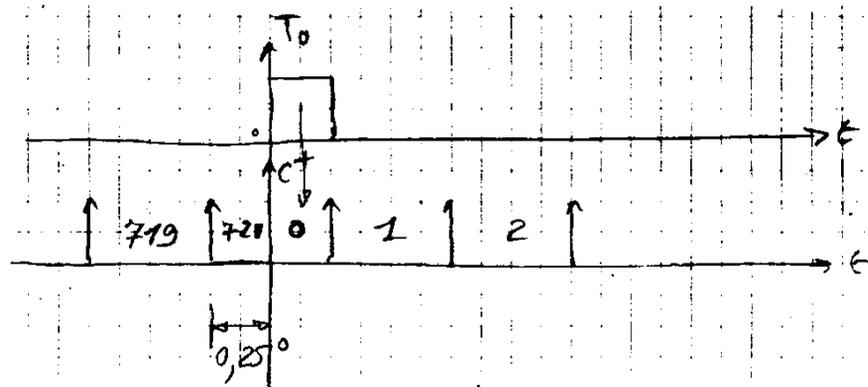


Donc :

- l'état 0 est correct ( $T_0$  impose cet état s'il y a perte de pas)
- le passage 0  $\rightarrow$  719 est également correct grace à  $S'$ .

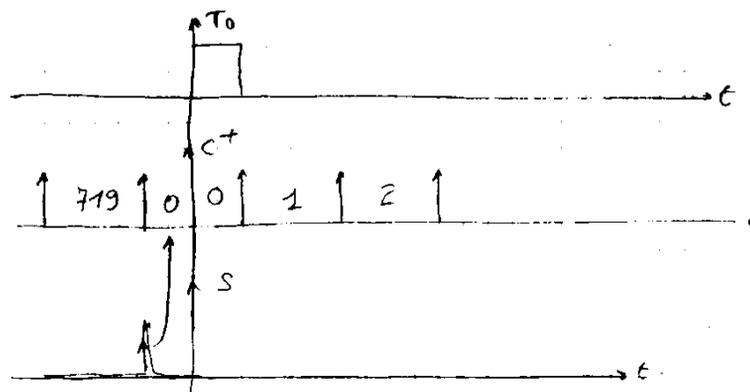
En décomptage, la sortie S n'est pas indispensable.

b2) \* S déconnecté et Comptage.



Le Top zéro intervient  $0,25^\circ$  trop tard ! l'état 720 (indésirable) subsiste sur un intervalle de  $0,25^\circ$ .

b3) \* S connecté / comptage.



Conclusion : Un fonctionnement correct exige l'usage des signaux S et S'.

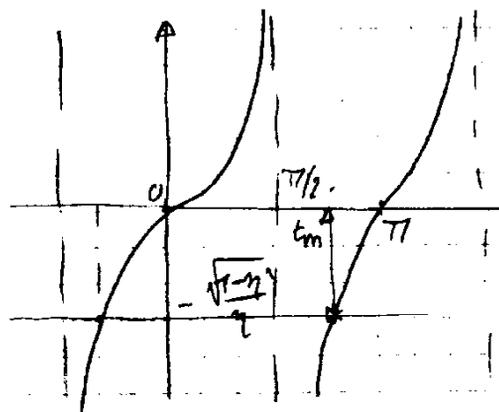
## B. COMMANDE ET CORRECTION D'UN PROCÉDÉ CONTINU

### B.I. Modèle d'ordre 2.

B.I.1.1.  $t_m$  tel que  $y(t_m) = 1$  donc on a :

$$\cos \omega_0 t_m = -\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \sin \omega_0 t_m$$

$$\text{tg } \omega_0 t_m = -\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta} \quad \text{mais } t_m \text{ ne peut pas être } < 0$$



donc :

$$\begin{aligned} \omega_0 t_m &= \pi - \text{Ar ctg } \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta} \\ &= \frac{\pi}{2} + \text{Ar ctg } \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \\ &= \pi - \text{Ar cos } \eta \end{aligned}$$

B.I.1.2.  $t_{\text{pic}} : \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$

$$0 = \eta \omega_n \left( \cos \omega_0 t_p + \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \sin \omega_0 t_p \right) - \left( -\omega_0 \sin \omega_0 t_p + \frac{\omega_0 \eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \cos \omega_0 t_p \right)$$

$$\cos \omega_0 tp \left( \eta \omega_n - \eta \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\eta^2}} \right) + \sin \omega_0 tp \left( \frac{\eta^2 \omega_n}{\sqrt{1-\eta^2}} + \omega_0 \right) = 0$$

$$\eta \omega_n - \eta \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\eta^2}} = 0 \quad \text{car : } \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\eta^2}} = \omega_n$$

$$\text{donc : } \sin \omega_0 tp = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 tp = \pi$$

$$\boxed{tp = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_v \sqrt{1-\eta^2}}}$$

B.I.1.3. Dépassement relatif

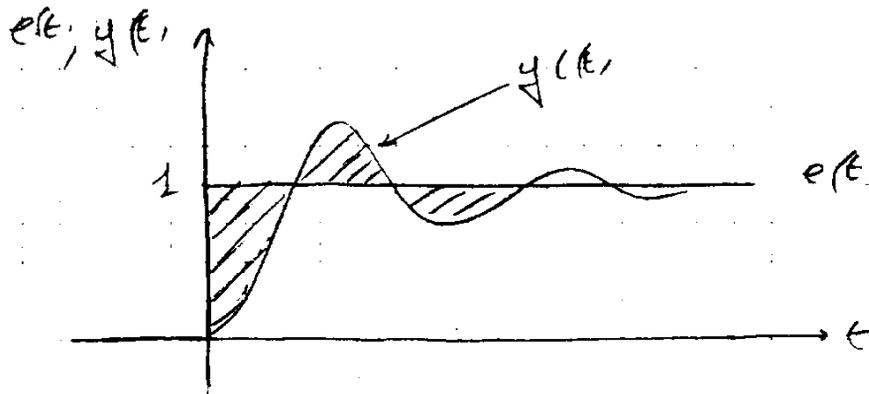
$$d_r = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \quad y_{\infty} = 1$$

$$d_r = y_{\max} - 1 = -e^{-\eta \omega_n tp} \left[ \cos \omega_0 tp + \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \sin \omega_0 tp \right]$$

$$\omega_0 tp = \pi \quad \cos \omega_0 tp = -1 \quad \sin \omega_0 tp = 0 \quad d_r = e^{-\eta \omega_n tp}$$

$$\boxed{d_r = e^{-\eta \frac{\pi}{\sqrt{1-\eta^2}}}}$$

B.I.2.



$$J = \int_0^{\infty} [e(t) - y(t)]^2 dt$$

J = Σ aires hachurées, lié à l'énergie à fournir pour obtenir cette réponse.

B.I.2.1. J = f(η) on a :

$$[e(t) - y(t)]^2 = e^{-2\eta \omega_n t} \left( \cos \omega_0 t + \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \sin \omega_0 t \right)^2$$

$$J = \int_0^{\infty} e^{-2\eta\omega_n t} \cos^2 \omega_0 t \, dt + \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_0^{\infty} e^{-2\eta \cos \omega_n t} 2 \cos \omega_n t \sin \omega_0 t \, dt$$

$$+ \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \int_0^{\infty} e^{-2\eta \omega_n t} \sin^2 \omega_0 t \, dt$$

$$J = I_1 + \frac{\eta^2}{1-\eta^2} I_2 + \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} I_3$$

$$= \frac{1+\eta^2}{4\eta\omega_n} + \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \cdot \frac{1-\eta^2}{4\eta\omega_n} + \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{2\omega_n}$$

$$= \frac{1}{4\eta\omega_n} + \frac{\eta}{2\omega_n} + \frac{\eta}{2\omega_n}$$

$$J = \frac{1}{4\eta\omega_n} + \frac{\eta}{\omega_n} = \frac{1+4\eta^2}{4\eta\omega_n}$$

B.I.2.2. J min

$$\frac{\partial J}{\partial \eta} = 0 = -\frac{1}{4\eta^2\omega_n} + \frac{1}{\omega_n}$$

$$\frac{1}{4\eta^2} = 1$$

ou  $2\eta_1 = 1$

$$\eta_1 = 0,5$$

B.I.3.1.a.  $dr = e^{-\eta} \frac{\pi}{\sqrt{1-\eta^2}}$

$$\eta = \eta_1 \Rightarrow \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$dr \approx 16,3\% \quad (\eta = \eta_1 = 0,5)$$

B.I.3.1.b.  $\omega_0 t_m = \pi - \text{Arc tg} \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}$

$$= \pi - \text{Arc tg} \sqrt{3}$$

$60^\circ$

$$\omega_0 t_m = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \quad \omega_0 t_m = 2,0944$$

B.I.3.1.c.  $\omega_0 t_{pic} = \pi$

$$\omega_0 t_m = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_m = \frac{2}{3} t_{pic}$$

$$\text{B.I.3.1.d. } \omega_n t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad \omega_n t_p = 3,63$$

$$\text{B.I.3.2. } \eta = \eta_2 = 0,707 = \sqrt{2}/2$$

$$\text{B.I.3.2.a. } dr = e^{-\pi \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}}$$

$$\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}}} = 1$$

$$dr = e^{-\pi} \# 4,32\%$$

$$\text{B.I.3.2.b. } \omega_0 t_m = \pi - \text{Arc tg} \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta} = \pi - \text{Arc tg} 1$$

$\pi/4$

$$\omega_0 t_m = \frac{3\pi}{4} \# 2,356$$

$$\text{B.I.3.2.c. } \omega_0 t_{pic} = \pi$$

$$\omega_0 t_m = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow t_m = \frac{3}{4} t_{pic}$$

$$\text{B.I.3.2.d. } \omega_n J(\eta_1) = \frac{1}{4\eta_1} + \eta_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\omega_n J(\eta_2) = \frac{1}{4\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{J(\eta_2)}{J(\eta_1)} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \# 1,0606$$

**Remarque** :  $\eta_1 = 0,5$  correspond au modèle le plus économique en énergie.

$$\omega_n t_{pic}(\eta_2) = \frac{\pi}{\sqrt{1-\eta_2}} \pi \sqrt{2} \# 4,44$$

$$\text{donc : } \frac{t_{pic}(\eta_2)}{t_{pic}(\eta_1)} = \frac{\pi \sqrt{2}}{2\pi/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \# 1,225$$

$$\text{ou : } \frac{t_m(\eta_2)}{t_m(\eta_1)} = \frac{3/4 t_{pic}(\eta_2)}{2/3 t_{pic}(\eta_1)} = 1,378$$

## B.II. Correction proportionnelle

$$\theta(p) = H(p) E(p) - H_w(p) \cdot Cr(p)$$

B.II.1.1. On a :

$$U(p) = [E(p) - \theta(p)] K_r$$

$$\Omega(p) = p \theta(p)$$

$$\Omega(p) = \frac{K}{1 + \tau p} U(p) - \frac{K_1}{1 + \tau p} Cr(p) \quad (\text{définition du modèle}).$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } p \cdot \theta(p) (1 + \tau p) &= K U(p) - K_1 Cr(p) \\ &= K K_r (E(p) - \theta(p)) - K_1 Cr(p) \end{aligned}$$

$$\theta(p) [K K_r + p + \tau p^2] = K K_r E(p) - K_1 Cr(p)$$

$$\theta(p) \frac{K \cdot K_r}{K K_r + p + \tau p^2} E(p) - \frac{K_1}{K K_r + p + \tau p^2} Cr(p)$$

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{\frac{K K_r}{\tau}}{\frac{K K_r}{\tau} + \frac{1}{\tau} p + p^2} \\ H_w(p) &= \frac{K_1/\tau}{\frac{K K_r}{\tau} + \frac{1}{\tau} p + p^2} = \frac{K_1}{K K_r} \cdot H(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B.II.1.2.} \quad \omega_n^2 &= \frac{K K_r}{\tau} & 2 \eta \omega_n &= \frac{1}{\tau} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{K K_r}{\tau}} & 2 \eta \omega_n &= \frac{\omega_n^2}{K K_r} \\ \eta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau K K_r}} \end{aligned}$$

$$\text{B.II.1.3.} \quad \tau = 0,7 \text{ s} \quad \eta = 0,707 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \eta^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{B.II.1.3.a.} \quad 4 \eta^2 = \frac{1}{\tau K K_r} = 2$$

$$K K_r = \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{1,4} \approx 0,714$$

$$\text{B.II.1.3.b.} \quad \omega_n = \frac{1}{2 \eta \tau} = \frac{1}{1,4 \cdot 0,707} = 1,01 \text{ rd.s}^{-1} = \omega_n$$

$$\omega_0 t_m \# 2,356$$

$$t_m = \frac{2,356}{\omega_0} \Rightarrow t_m = 3,33 \text{ sec.}$$

$$\omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \eta^2} = \frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \# 0,707 \omega_n$$

B.II.1.4. Écart permanent

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

ici  $\varepsilon(p) = E(p) - \theta(p) = E(p) \cdot [1 - H(p)]$  car  $C_r = 0$

$$1 - H = 1 - \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\eta\omega_n p + p^2}$$

$$= \frac{2\eta\omega_n p + p^2}{\omega_n^2 + 2\eta\omega_n p + p^2}$$

et  $p\varepsilon(p) = p^2 \frac{2\eta\omega_n + p}{\omega_n^2 + 2\eta\omega_n p + p^2}$

B.II.1.4.a.  $e(t) = \text{échelon} \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2\eta\omega_n + p}{D(p)} \equiv 0$$

B.II.1.4.b.  $e(t) = \text{rampe} = at \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^2}$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} a \cdot \frac{2\eta\omega_n + p}{D(p)} = a \cdot \frac{2\eta}{\omega_n} = \frac{a}{K K_r}$$

car  $\frac{2\eta}{\omega_n} = \frac{2\eta\omega_n}{\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{K K_r} \cdot \frac{1}{\omega_n^2}$

**B.II.2. Perturbation**

B.II.2.1. Seul  $H_w$  intervient dans ce cas car  $e(t) = 0$ .

$$\theta(p) = H(p) \cdot E(p) - H_w \cdot C_r(p) = -H_w \cdot C_r(p)$$

$$\theta_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} p \theta(p) = - \lim_{p \rightarrow 0} [p C_r(p) \cdot H_w(p)]$$

avec  $C_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$  ( $C_r(p)$  est un échelon)

et  $H_w = \frac{K_1/\tau}{\frac{K K_r}{\tau} + \frac{1}{\tau} p + p^2}$

$$\theta_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ -C_{r0} \cdot \frac{K_1/\tau}{D(p)} \right] \quad \text{avec} \quad D(0) = \frac{K K_r}{\tau}$$

$$\theta_\infty = -C_{r0} \frac{K_1}{\tau} \cdot \frac{\tau}{K K_r}$$

$$\theta_\infty = -C_{r0} \frac{K_1}{K \cdot K_r}$$

signe (-) car opposé au sens positif de la commande  $e(t)$ .

$$\text{B.II.2.2. } \theta_{\infty} = 10^{\circ} = \frac{\pi}{180} \times 10 = \frac{\pi}{18} \text{ rd.}$$

$$C_{r0} = \frac{K \cdot K_r}{K_1} \theta_{\infty} \quad \eta = 0,707 \Rightarrow K K_r = 0,714$$

$$K_1 = 4325$$

$$C_{r0} \approx 2,88 \cdot 10^{-5} \text{ N.m}$$

$$C_{r0} \approx 2,88 \cdot 10^{-3} \text{ N.cm.}$$

### B.III. Correction tachymétrique

$$\text{B.III.1.1. } \theta(p) = H_T(p) \cdot E(p) - H_{Tw}(p) \cdot C_r(p)$$

$$\text{On a toujours } \Omega(p) = \frac{K U(p)}{1 + \tau p} - \frac{K_1}{1 + \tau p} C_r(p)$$

$$\text{puis } U(p) = K_r [E - \theta - K_T \cdot \Omega]$$

$$\Omega(p) = p \theta$$

$$\text{donc : } p \theta (1 + \tau p) = K \cdot K_r [E - \theta - K_T p \theta] - K_1 \cdot C_r$$

$$\theta [p + \tau p^2 + K K_r + p K K_r \cdot K_T] = E K K_r - K_1 C_r$$

$$\text{d'où : } H_T(p) = \frac{\frac{K \cdot K_r}{\tau}}{\frac{K K_r}{\tau} + \frac{1 + K K_r K_T}{\tau} p + p^2}$$

$$H_{Tw}(p) = \frac{K_1 / \tau}{\frac{K K_r}{\tau} + \frac{1 + K K_r K_T}{\tau} p + p^2}$$

$$\text{B.II.1.2. On a donc : } \omega_n^2 = \frac{K K_r}{\tau}$$

$$2 \eta \omega_n = \frac{1 + K K_r K_T}{\tau} = 2 \eta \cdot \sqrt{\frac{K K_r}{\tau}}$$

$$\text{donc : } \eta = \frac{1 + K K_r K_T}{2 \sqrt{\tau K K_r}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K K_r}{\tau}}$$

B.III.1.3. Plus intéressant car réglage possible des 2 paramètres  $\eta$  et  $\omega_n$ .

$K_r$  → réglage de  $\omega_n$   
 $K_T$  → réglage amortissement.

**Remarque** : la correction P n'autorise qu'un seul réglage, en général  $\eta$  ;  $\omega_n$  en découle ensuite.

B.III.2.  $\eta = 0,707$  inchangé. Système 2 fois plus rapide  $\Rightarrow \omega_n \times 2$  donc  $\omega_n^2$  est  $\times 4$ .

B.III.2.1. Comme  $\omega_n^2 = \frac{K K_r}{\tau}$  dans les 2 cas, et que  $\tau$  est fixe, on a

(sans correction par DT on avait  $K K_r = \frac{1}{2\tau}$  :B.II.1.3.a.)  $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{donc : } K \cdot K_r &= 4 \times \frac{1}{2\tau} \\ &= 4 \times 0,714 \end{aligned}$$

$$K K_r \# 2,856$$

B.III.2.2.  $\eta = 0,707$

$$\begin{aligned} 1 + K K_r K_T &= 2\eta \cdot \sqrt{K K_r \cdot \tau} \\ &= 2\eta \cdot \sqrt{2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 2 \end{aligned}$$

avec  $K K_r \cdot \tau = 2$

d'où :  $K K_r K_T = 1$

$$\text{et } K_T = \frac{1}{K K_r} \approx 0,350$$

B.III.2.3. perturbation.

Même modèle  $H_m$  donc on a toujours :

$$\theta_\infty = -C_{r0} \cdot \frac{K_i}{K \cdot K_r}$$

$$C_{r0} = \frac{K \cdot K_r}{K_i} \cdot \theta_\infty$$

$$C_{r0} = \frac{2,856}{4325} \cdot \frac{\pi}{18} \approx 1,15 \cdot 10^{-4} \text{ N.m.}$$

c à d. 4 fois plus fort, ce qui est normal car  $K_r$  a été multiplié par 4, d'où l'intérêt de la correction tachymétrique :

- $K_r \Rightarrow$  précision statique accrue
- $\eta$  réglable par  $K_T$ .

#### B.IV. Correction cascade.

$$\Omega(p) = H_b \cdot S - H_{bw} C_r$$

$$C(p) = K_0 + \frac{K_i}{p}$$

B.IV.1.1.  $H_b$  du 1<sup>er</sup> ordre si  $C(p) \cdot G(p)$  est du 1<sup>er</sup> ordre.

$$\text{Or : } C \cdot G = \frac{1}{p} (K_i + p K_0) \frac{K}{1 + \tau p} = \frac{K K_i}{p} \cdot \frac{1 + p \frac{K_0}{K_i}}{1 + \tau p}$$

$$\text{donc } \tau = \frac{K_0}{K_i} \quad \text{puis } C \cdot G = \frac{K K_i}{p}$$

(Le correcteur P.I. compense exactement le pôle  $p = -\frac{1}{\tau}$  de  $G(p)$ ).

$$\begin{aligned} \text{Schéma} \Rightarrow \Omega &= C \cdot G (S - \Omega) - G_1 C_r \\ \Omega (1 + C G) &= C G S - G_1 C_r \\ \Omega \left( 1 + \frac{K K_i}{p} \right) &= \frac{K K_i}{p} S - \frac{K_1}{1 + \tau p} C_r \\ \Omega (p + K K_i) &= K K_i S - K_i \frac{p}{1 + \tau p} C_r \\ \Omega (p) &= \frac{K K_i}{p + K K_i} S (p) - p \frac{K_1}{(1 + \tau p) \cdot (p + K K_i)} C_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } H_b(p) &= \frac{1}{1 + \frac{p}{K K_i}} \\ \text{d'où : } H_{bw} &= \frac{p \cdot K_1}{K K_i \cdot (1 + \tau p) \left( 1 + \frac{p}{K K_i} \right)} \end{aligned}$$

B.IV.1.2. On a :  $S(p) = R(p) (E - \theta)$

$$\Omega = p \theta$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \Omega &= p \theta = H_b \cdot R (E - \theta) - H_{bw} \cdot C_r \\ \theta [p + R H_b] &= R H_b E - H_{bw} C_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } H_c(p) &= \frac{R(p) \cdot H_b(p)}{p + R(p) \cdot H_b(p)} \\ H_{cw}(p) &= \frac{H_{bw}}{p + R(p) \cdot H_b(p)} \end{aligned}$$

B.IV.1.3.  $R(p) = K_r$

$$\text{B.IV.1.3.a. } H_c = \frac{K_r \cdot H_b}{p + K_r H_b} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_r H_b}}$$

$$\frac{p}{K_r H_b} = p \cdot \frac{1 + \frac{p}{K K_i}}{K_r} = \frac{p}{K_r} + \frac{p^2}{K K_i K_r}$$

$$H_c(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_r} + \frac{p^2}{K K_i K_r}} = \frac{K K_i K_r}{K K_i K_r + K K_i p + p^2}$$

B.IV.1.3.b.  $\omega_n^2 = K K_r K_i$

$$2\eta \omega_n = K K_i = 2\eta \sqrt{K K_i K_r}$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{K K_i}{K_r}}$$

$$\omega_n = \sqrt{K \cdot K_r \cdot K_i}$$

avec  $\frac{K_0}{K_i} = \tau$

B.IV.1.4. Applications numériques :

B.IV.1.4.a.  $\eta = 0,707$

pour la boucle interne :  $H_b = \frac{1}{1 + \frac{p}{K K_i}}$

$$\tau' = \frac{1}{K K_i} \text{ et il faut } \tau' = \frac{\tau}{5}$$

donc  $K K_i = \frac{1}{\tau'} = \frac{5}{\tau} = \frac{5}{0,7} \approx 7,14$

puis  $\eta = 0,707 \Rightarrow K_r = \frac{K K_i}{4\eta^2} = \frac{K K_i}{2} \approx 3,57$

puis  $K K_0 = K \cdot K_i \cdot \tau = 5$

B.IV.1.4.b.  $\omega_n = \sqrt{K K_i K_r} \approx 5,05 \text{ rd.s}^{-1}$

$$t_m = \frac{3,33}{\omega_n} \approx 0,66 \text{ sec}$$

B.IV.1.5.  $H_{cw} = \frac{H_{bw}}{p + K_r H_b} = \frac{K_i}{K K_i (1 + \tau p)} \left( \frac{p}{1 + \frac{p}{K K_i}} \right) \cdot \frac{1}{p + \frac{K_r}{1 + \frac{p}{K K_i}}}$

$$H_{cw} = \frac{K_i}{K K_i (1 + \tau p)} \left[ \frac{p}{p + \frac{p^2}{K K_i} + K_r} \right]$$

$$H_{cw} = \frac{K_i}{K K_i} \frac{P}{(1 + \tau p) \left[ K_r + p + \frac{P^2}{K K_i} \right]} \quad D(p) \text{ du } 3^{\text{e}} \text{ ordre !}$$

B.IV.1.6.  $e(t) = 0$

$$\theta_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \theta(p)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \theta(p) &= -H_{cw}(p) \cdot C_r(p) \\ &= -H_{cw}(p) \cdot \frac{C_{r0}}{p} \end{aligned}$$

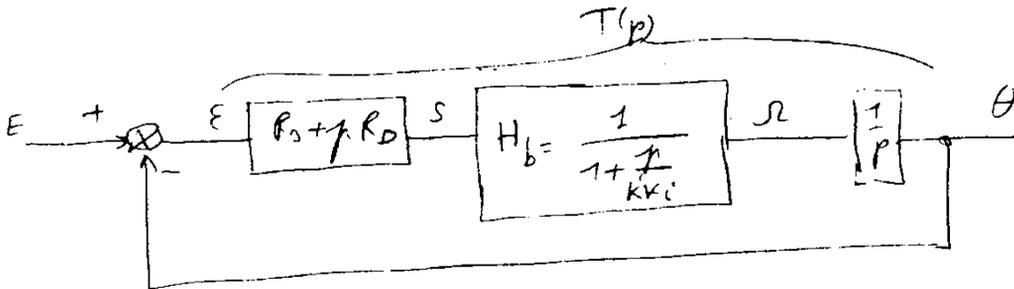
$$\text{donc } \theta_{\infty} = -H_{cw}(0) \cdot C_{r0}$$

$$\boxed{\theta_{\infty} = 0} \quad \text{car } H_{cw}(p) = 0.$$

Donc : l'action intégrale de  $C(p)$  permet d'annuler l'écart statique pour la perturbation.

B.IV.1.7.  $R(p) = R_0 + p R_D$

on a :



$$* \text{ si } \frac{R_D}{R_0} = \frac{1}{K K_i} \Rightarrow T(p) = \frac{\theta}{\varepsilon} = \frac{R_0}{p}$$

$$\text{donc } \frac{\theta}{\varepsilon} = \frac{R_0}{R_0 + p} = \frac{1}{1 + \frac{p}{R_0}} \Rightarrow \text{comportement } 1^{\text{er}} \text{ ordre}$$

$$* \text{ si } \frac{R_D}{R_0} \neq \frac{1}{K K_i}$$

$$\text{alors } H_c(p) = \frac{R_0 \left( 1 + p \frac{R_D}{R_0} \right)}{R_0 + (1 + R_D) p + \frac{p^2}{K K_i}}$$

Dans ce cas, le terme  $R_D$  a une influence similaire à celle du terme  $K_T$  dans la correction tachymétrique.

B.IV.2.1.  $H_b(p)$  d'ordre faible  $\Rightarrow C(p)$  doit compenser 1 pôle  $G(p)$ , nécessairement le plus grand (celui le mieux indentifié !) donc on a :

$$G(p) \cdot C(p) = \frac{k}{(1 + \tau p)(1 + Tp)} \cdot \frac{K_i}{p} \left( 1 + p \frac{K_0}{K_i} \right)$$

$$= \frac{K K_i}{p(1 + Tp)} \quad \text{avec} \quad \frac{K_0}{K_i} = \tau$$

puis en b. f. on a, à  $C_r = 0$

$$H_b = \frac{\Omega}{S} = \frac{G \cdot C}{1 + G C} = \frac{K \cdot K_i}{K K_i + p + T \cdot p^2}$$

$$H_b = \frac{\frac{K K_i}{T}}{\frac{K K_i}{T} + \frac{1}{T} p + p^2}$$

Il reste à fixer  $K_i$  pour obtenir le comportement souhaité.

B.IV.2.2. Marge de stabilité de la boucle interne.

On a :

$$\left. \begin{aligned} \frac{K K_i}{T} &= \omega_n^2 \\ 2 \eta \omega_n &= \frac{1}{T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{T^2} = 4 \eta^2 \frac{K K_i}{T}$$

$$4 \eta^2 = \frac{1}{T K K_i}$$

$$\text{d'où : } \eta^2 = \frac{1}{4 K K_i T}$$

Marge de stabilité si  $\eta \geq \eta_b$  fixé.

$$\text{Donc : } \eta^2 \geq \eta_b^2$$

$$\text{soit } \frac{1}{4 K K_i T} \geq \eta_b^2$$

$$\text{et } K K_i \leq \frac{1}{4 \eta_b^2 T}$$

$$\text{Soit } \boxed{K K_{iM} = \frac{1}{4 \eta_b^2 T}}$$

B.IV.2.3.  $\eta_b = 0,707$        $T = 0,03$

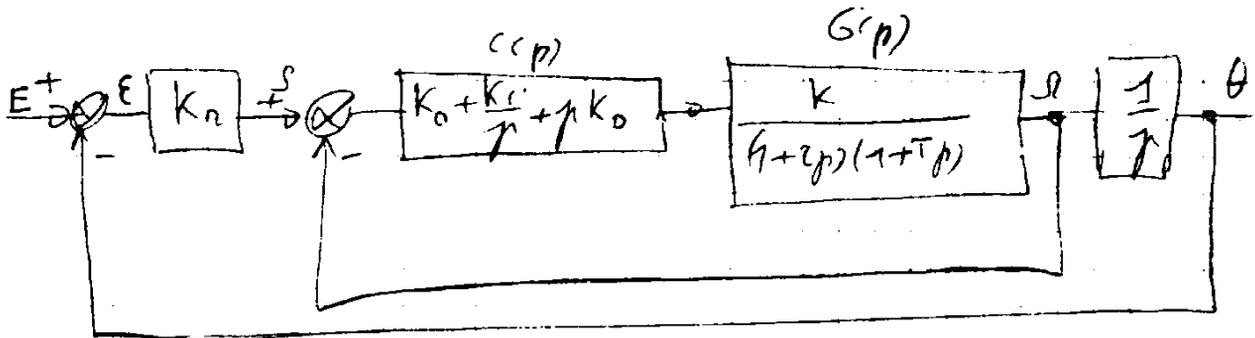
$$\text{B.IV.2.3.a. } K K_{iM} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,03}} = \frac{1}{0,06} \approx \underline{\underline{16,66}} \approx \frac{1}{2 \cdot T}$$

$$\text{B.IV.2.3.b. } t_m = \frac{3,33}{\omega_n} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K K_i}{T}} \approx 23,57 \text{ rd.s}^{-1}$$

$$t_m \approx 0,141 \text{ sec}$$

B.IV.2.3.c. Saturation des étages d'entrée (ou limitation de la dynamique).

B.IV.3.



B.IV.3.1.  $C(p)$  doit compenser les 2 pôles de  $G(p)$ . Il faut mettre  $C(p)$  sous une forme plus commode.

$$C(p) = \alpha \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_D p) = \frac{\alpha}{p T_i} (1 + T_i p) (1 + T_D p)$$

- Action I compense le pôle le + grand

$$T_i = \tau$$

- Action D le plus petit

$$T_D = T$$

$$\text{avec } C(p) = \alpha \left( 1 + \frac{T_D}{T_i} \right) + \frac{\alpha}{p T_i} + \alpha T_D \cdot p$$

donc :

$$K_0 = \alpha \left( 1 + \frac{T_D}{T_i} \right) = \alpha \left( 1 + \frac{T}{\tau} \right)$$

$$K_i = \frac{\alpha}{T_i} = \frac{\alpha}{\tau}$$

$$K_D = \alpha T_D = \alpha T$$

$$\alpha = \frac{K_0}{1 + \frac{T}{\tau}}$$

$$\text{on a alors : } G(p) C(p) = \frac{K \alpha}{p \cdot T_i}$$

$$\text{et } H_b = \frac{K \alpha}{K \alpha + p T_i} = \frac{1}{1 + p \frac{T_i}{K \alpha}}$$

$$\text{soit } \tau' = \frac{T_i}{K \alpha} = \frac{\tau}{K K_0} = \frac{\tau}{K K_0} \left( 1 + \frac{T}{\tau} \right) = \frac{T + \tau}{K K_0}$$

$$1 + \frac{T}{\tau}$$

$$\text{puis } \frac{\theta}{\varepsilon} = \frac{K_r}{p} H_b = \frac{K_r}{p (1 + \tau' p)}$$

$$\text{et } \frac{\theta}{E} = \frac{K_r}{K_r + p + \tau' p^2} = \frac{K_r / \tau'}{\frac{K_r}{\tau'} + \frac{1}{\tau'} + p^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K_r}{\tau'}$$

$$2 \eta \omega_n = \frac{1}{\tau'} \Rightarrow 4 \eta^2 \frac{K_r}{\tau'} = \frac{1}{\tau'^2}$$

$$4 \eta^2 K_r = \frac{1}{\tau'}$$

$$4 \eta^2 K_r = \frac{K K_0}{\tau \left( 1 + \frac{T}{\tau} \right)} = \frac{K K_0}{\tau + T}$$

d'où les relations :

$K_r = \frac{K K_0}{4 \eta^2 (T + \tau)}$
$\frac{K_i}{K_0} = \frac{1}{T + \tau}$
$\frac{K_D}{K_0} = \frac{T \tau}{\tau + T}$

B.IV.3.2. difficulté : 3 équations et 4 inconnues ( $K_0$ ,  $K_i$ ,  $K_D$  et  $K_r$ ).

Il faut fixer un paramètre : par exemple, la constante  $\tau'$  de la boucle interne

$$\tau' = \frac{T + \tau}{K K_0} \# \frac{\tau}{K K_0} \quad \text{car } T \ll \tau \quad (\tau = 0.7) \quad \text{ceci fixe } K_0$$

par exemple  $\tau' = 0.1$  s.  $K = 30$  (cette valeur est liée à la dynamique d'entrée fixée par les étages d'amplification).

$$K K_0 = \frac{T + \tau}{\tau'} \# \frac{0.73}{0.1} = 7.3 \Rightarrow K_0 = 0.243$$

$$\text{puis } \frac{K_i}{K_0} = \frac{1}{T + \tau} = 1,37$$

$$\frac{K_D}{K_0} = \frac{T \cdot \tau}{T + \tau} = \frac{0,7 \cdot 0,03}{0,73} = 0,0287$$

$$\text{et } K_r = \frac{K K_0}{4 \eta^2 (T + \tau)} = \frac{1}{4 \eta^2 \cdot \tau} \approx \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,1} = 5$$

$$\text{d'où } C(p) = K_0 \left( 1 + \frac{1,37}{p} + 0,0287 p \right)$$

$$R(p) = K_r = 5$$

$$K_0 = 0,243$$

$$K_i = 0,333$$

$$K = 0,059$$

$$K_r = 5$$

$$C(p) = 0,243 + \frac{0,333}{p} + 0,059 p$$

$$K_r = 5$$

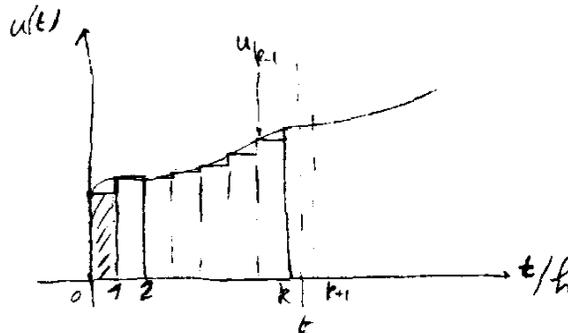
### C. COMMANDE NUMÉRIQUE

#### C.I.1. Intégration

$$\int_0^t u(\tau) d\tau = h \sum_{i=0}^{k-1} u_i$$

soit  $kh \leq t < (k+1)h$

alors  $t = kh + \varepsilon$  avec  $0 < \varepsilon < h$



$$\begin{aligned} \int_0^t u(\tau) d\tau &= \int_0^{kh} u(\tau) d\tau + \int_{kh}^{kh+\varepsilon} u(\tau) d\tau \\ &= h u_0 + h u_1 + \dots + h u_{k-1} + \int_0^\varepsilon u_k d\tau \\ &\quad \text{k éch.} \qquad \qquad \qquad \approx 0 \end{aligned}$$

$$\text{et } \int_0^t u(\tau) d\tau \approx h \sum_{i=0}^{k-1} u_i$$

Dérivation

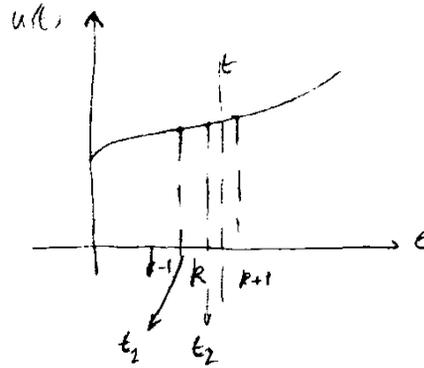
$$\frac{du}{dt} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{u(t_2) - u(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ici  $t_1 = (k - 1)h$

ici  $t_2 = kh$ .

avec  $t = hk + \epsilon = t_2 + \epsilon$

et  $\frac{du}{dt} \approx \frac{1}{h} [u_k - u_{k-1}]$



C.I.2. à  $t = kh$

$$y(t) = y_0 + c_0 \int_0^t u(\tau) d\tau + c_1 u(t) + c_2 \frac{du}{dt}$$

$$y_k = y_0 + c_0 h \sum_{i=0}^{k-1} u_i + c_1 u_k + \frac{c_2}{h} (u_k - u_{k-1})$$

C.I.3.  $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

$$\Delta y_k = h c_0 \left[ \sum_{i=0}^{k-1} u_i - \sum_{i=0}^{k-2} u_i \right] + c_1 [u_k - u_{k-1}] + \frac{c_2}{h} [u_k - u_{k-1} - u_{k-1} + u_{k-2}]$$

$$\Delta y_k = \left( c_1 + \frac{c_2}{h} \right) u_k + \left( h c_0 - 2 \frac{c_2}{h} - c_1 \right) u_{k-1} + \frac{c_2}{h} u_{k-2}$$

d'où :  $y_k = y_{k-1} + \left( c_1 + \frac{c_2}{h} \right) u_k + \left( h c_0 - 2 \frac{c_2}{h} - c_1 \right) u_{k-1} + \frac{c_2}{h} u_{k-2}$

C.I.4.  $u_k = \delta_0 = \{1, 0, \dots\}$

$k = 0$   $y_0 = c_1 + \frac{c_2}{h}$  ( $y_0$  n'est pas nul car correspond aux actions P et D transmises à  $t = 0^+$ )

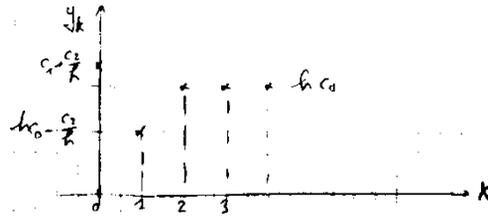
$$k = 1 \quad y_1 = y_0 + \left( h c_0 - 2 \frac{c_2}{h} - c_1 \right) u_1$$

$$= c_1 + \frac{c_2}{h} + h c_0 - 2 \frac{c_2}{h} - c_1$$

$$y_1 = h c_0 - \frac{c_2}{h}$$

$k = 2$   $y_2 = y_1 + \frac{c_2}{h} = h c_0 = y_2$

$k = 3$   $y_3 = y_2 \dots$



$$\begin{aligned}
 \text{C.I.5. } Y_{(z)} &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} \\
 Y_{(z)} &= y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots \\
 &= c_1 + \frac{c_2}{h} + \left( h c_0 - \frac{c_2}{h} \right) z^{-1} + h c_0 z^{-2} + \dots \\
 &= c_1 + \frac{c_2}{h} + \left( h c_0 - \frac{c_2}{h} \right) z^{-1} + h c_0 z^{-2} (1 + z^{-1} + \dots) \\
 &\qquad\qquad\qquad \frac{1}{1 - z^{-1}}
 \end{aligned}$$

$$Y_{(z)} = \left( c_1 + \frac{c_2}{h} \right) + \left( h c_0 - \frac{c_2}{h} \right) z^{-1} + h c_0 \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

C.I.6.

$$\begin{aligned}
 \text{C.I.6.1. } P(z) &\rightarrow c_0 = c_2 = 0 \\
 P(z) &= c_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{C.I.6.2. } I(z) &\rightarrow c_1 = c_2 = 0 \\
 I(z) &= h c_0 z^{-1} + h c_0 \frac{z^{-2}}{1 - z^{-2}} \\
 &= h c_0 z^{-1} \left( \frac{1 - z^{-1} + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right)
 \end{aligned}$$

$$I(z) = h c_0 \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{C.I.6.3. } D_r(z) &\rightarrow c_0 = c_1 = 0 \\
 D_r(z) &= \frac{c_2}{h} (1 - z^{-1})
 \end{aligned}$$

C.I.6.4. par arrangement

$$Y(z) = c_1 + h c_0 \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{c_2}{h} (1 - z^{-1})$$

$$Y(z) = P(z) + I(z) + D_r(z)$$

C.II. Transformée en z

C.II.1.  $\Delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \cdot z^{-k} = 1$

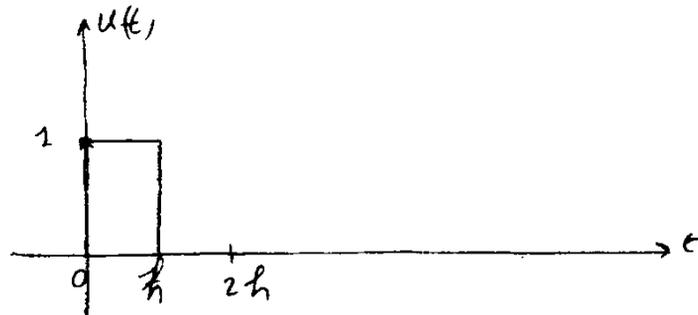
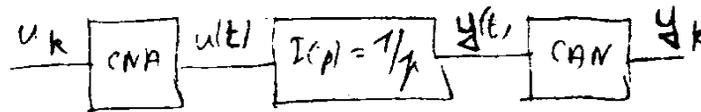
car  $\delta_k = 1$  si  $k = 0$   
 $= 0$  si  $k \neq 0$

donc, puisque les conditions initiales sont nulles :  $I_0(z) = 0$  on a  $Y(z) = G(z) \Delta(z)$

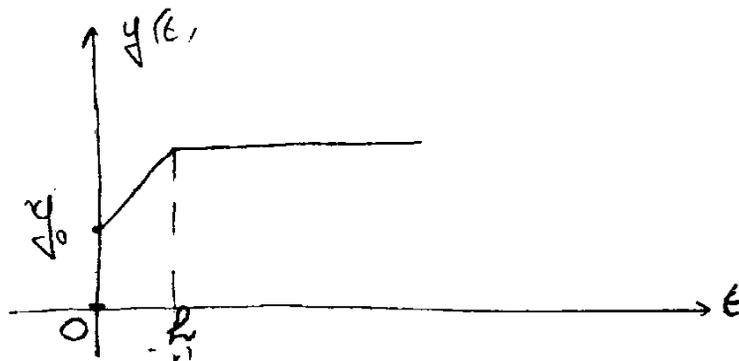
$Y(z) = G(z)$

la détermination de  $G(z)$  peut se faire en calculant la transformée en Z de la réponse impulsionnelle discrète du processeur continu.

C.II.2.1. ici,  $\{u_k\} = \delta_0$



C.II.2.2. A priori,  $y_0$  n'est pas forcément nul. Pour  $0 \leq t \leq h$ , le processus intègre une commande  $\rightarrow$  rampe. Puis, pour  $t > h \rightarrow y(t) \equiv$  constante car entrée nulle.



C.II.2.3.  $y(t) = y_0 + \int_0^t u(\tau) d\tau$

pour  $0 < t < h$  :  $y(t) = y_0 + \int_0^t d\tau = y_0 + t$

pour  $t \geq h$  :  $y(t) = y(h) + \int_h^t 0 d\tau = y(h)$

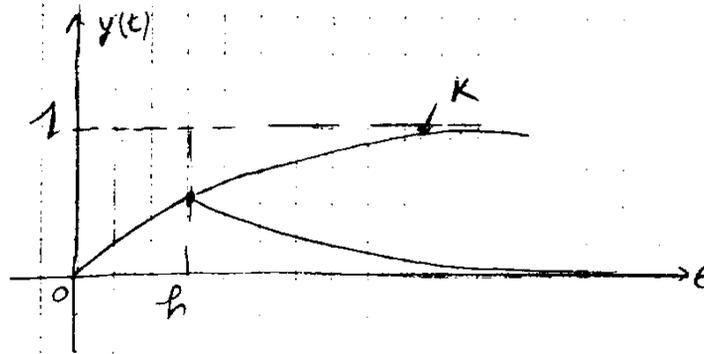
donc  $y_0 = 0$   
 $y_1 = h = y_2 = \dots = y_k$   
 $\{y_k\} = \{0 \ h \ h \ \dots \ h \ \dots\}$

C.II.2.4.  $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$   
 $= h [z^{-1} + z^{-2} + \dots]$   
 $= h z^{-1} [1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots]$   
 $Y(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

comme  $Y(z) = I(z)$  car entrée impulsionnelle  $\rightarrow I(z) = \frac{h z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

C.II.3.  $G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$  avec  $K = 1$

C.II.3.1.



C.II.3.2. pour  $0 \leq t \leq h$  :  $y(t) = K (1 - e^{-t/\tau})$   
réponse indicielle d'un 1<sup>er</sup> ordre de gain K.  
pour  $t \geq h$  : réponse libre à partir de  $y_1 = y(h) = K (1 - e^{-h/\tau})$   
donc  $y(t) = y_1 e^{-\frac{t-h}{\tau}}$

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_1 &= K (1 - e^{-h/\tau}) \\ y_2 &= y_1 \cdot e^{-h/\tau} \\ y_3 &= y_1 e^{-2h/\tau} \\ y_k &= K (1 - e^{-h/\tau}) e^{-(k-1)h/\tau} \quad k = 1, 2, \dots \text{ et } y_0 = 0 \end{aligned}$$

C.II.3.3.  $G(z) = Y(z) = K (1 - e^{-h/\tau}) [z^{-1} + e^{-h/\tau} z^{-2} + \dots]$   
 $= K (1 - e^{-h/\tau}) z^{-1} [1 + e^{-h/\tau} z^{-1} + \dots + e^{-kh/\tau} z^{-k} + \dots]$

$$G(z) = K (1 - e^{-h/\tau}) \frac{z^{-1}}{1 - e^{-h/\tau} z^{-1}}$$

C.II.3.4. Applications numériques :

$$h = 10 \text{ m sec}$$

$$\tau = 0,7 \quad K = 30$$

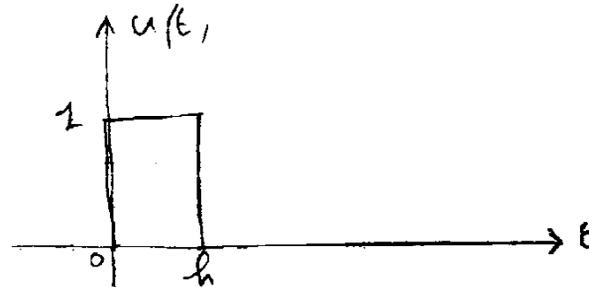
$$e^{-h/\tau} = 0,9858$$

$$K (1 - e^{-h/\tau}) = 0,425$$

et  $G(z) \# \frac{0,425 z^{-1}}{1 - 0,986 z^{-1}}$

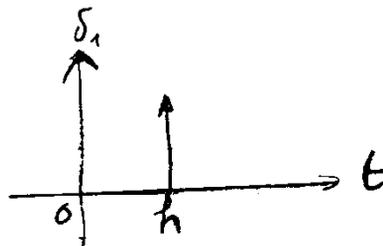
C.III. Transformée en z (2°)

C.III.1.1.  $U(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-hp}}{p} = \frac{1 - e^{-hp}}{p}$



C.III.1.2.  $B_0(p) = U(p) = \frac{1 - e^{-hp}}{p}$  car  $\Delta(p) = 1$  (entrée)

C.III.1.3.  $Z\{e^{-hp}\}$   
 $e^{-hp} \equiv L\{\delta_1\}$



donc  $Z\{e^{-hp}\} = z^{-1}$  : transformée en Z d'une impulsion de Dirac retardée d'une période.

C.III.1.4.  $Z\left\{e^{-hp} \frac{G(p)}{p}\right\} \equiv$  Transformée en Z de la suite  $\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}$  retardée d'une période.  
 $Z\left\{e^{-hp} \frac{G(p)}{p}\right\} = z^{-1} Z\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}$

C.III.1.5. Par définition,

$$G(z) = Z\{B_0(p) \cdot G(p)\}$$

$$= Z\left\{\frac{G(p)}{p}\right\} - Z\left\{\frac{e^{-hp} G(p)}{p}\right\}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G(p)}{p}\right\}$$

$$\text{C.III.2. } G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{K}{p(1 + \tau p)} = K \left[ \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p} \right]$$

$$\text{puis } Z \left\{ \frac{1}{p} \right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Z \left\{ \frac{\tau}{1 + \tau p} \right\} = Z \left\{ \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right\} = \frac{1}{1 - e^{-h/\tau} z^{-1}}$$

$$\text{donc } Z \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\} = K \left[ \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-h/\tau} z^{-1}} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } G_1(z) &= (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\} \\ &= K \left[ 1 - \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-h/\tau} z^{-1}} \right] \end{aligned}$$

$$G_1(z) = K \left[ \frac{1 - e^{-h/\tau} z^{-1} - 1 + z^{-1}}{1 - e^{-h/\tau} z^{-1}} \right]$$

$$G_1(z) = K (1 - e^{-h/\tau}) \frac{z^{-1}}{1 - e^{-h/\tau} z^{-1}}$$

$$\text{C.III.3. } G(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$$

$$\begin{aligned} \text{C.III.3.1. } \frac{G(p)}{p} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1 + \tau p} \\ &= \frac{Ap + B}{p^2} + \frac{C}{1 + \tau p} \end{aligned}$$

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{(Ap + B)(1 + \tau p) + Cp^2}{p^2(1 + \tau p)}$$

par identification, on a :

$$\begin{aligned} p^2 &\rightarrow C + A\tau = 0 & C &= -A\tau = K\tau^2 \\ p &\rightarrow A = B\tau = 0 & A &= -K\tau \\ 0 &\rightarrow K = B \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \frac{G(p)}{p} = -\frac{K\tau}{p} + \frac{K}{p^2} + \frac{K\tau^2}{1 + \tau p}$$

$$\text{C.III.3.2. } G_2(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\}$$

$$Z \left\{ -\frac{K\tau}{p} \right\} = -\frac{K\tau}{1 - z^{-1}}$$

$$Z \left\{ \frac{K}{p^2} \right\} = \frac{K h z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$Z \left\{ \frac{K \tau^2}{1 + \tau p} \right\} = Z \left\{ \frac{K \tau}{p + \frac{1}{\tau}} \right\} = \frac{K \tau}{1 - e^{-h/\tau} z^{-1}}$$

$$G_2(z) = -K \tau + \frac{K h z^{-1}}{1 - z^{-1}} + K \tau \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-h/\tau} z^{-1}}$$

C.III.3.3. forme standard.

$$G_2(z) = K \left[ \frac{-\tau(1 - z^{-1}) + h z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{\tau(1 - z^{-1})}{1 - e^{-h/\tau} z^{-1}} \right]$$

$$= K \left[ \frac{(1 - e^{-h/\tau} z^{-1}) [(h + \tau) z^{-1} - \tau] + \tau(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-h/\tau} z^{-1})} \right]$$

$$= \frac{K}{D(z)} \left[ z^{-1} (h + \tau + \tau e^{-h/\tau}) - \tau - (h + \tau) e^{-h/\tau} z^{-2} + \tau - 2\tau z^{-1} + \tau z^{-2} \right]$$

$$= \frac{K}{D(z)} \left[ z^{-1} [h + \tau + \tau e^{-h/\tau} - 2\tau] + z^{-2} [\tau - (h + \tau) e^{-h/\tau}] \right]$$

$$G_2(z) = K \frac{z^{-1} (h - \tau + \tau e^{-h/\tau}) + z^{-2} [\tau - (h + \tau) e^{-h/\tau}]}{1 - z^{-1} (1 + e^{-h/\tau}) + e^{-h/\tau} z^{-2}}$$

donc :

$$b_1 = K [h - \tau + \tau e^{-h/\tau}]$$

$$b_2 = K [\tau - (h + \tau) e^{-h/\tau}]$$

$$a_1 = -(1 + e^{-h/\tau})$$

$$a_2 = e^{-h/\tau}$$

C.III.3.4.

\* pôles de  $G_2(z)$  :  $1 - z^{-1} = 0$   
 et  $1 - e^{-h/\tau} z^{-1} = 0$

donc :  $z_1 = 1$   
 $z_2 = e^{-h/\tau}$

\* pôles de  $G(p) = \frac{k}{p(1 + \tau p)}$

$p_1 = 0$   
 $p_2 = -\frac{1}{\tau}$

on passe de l'un à l'autre par  $z = e^{hp}$

C.III.3.5. Applications numériques :

a)  $a_1 = -(1 + e^{-h/\tau}) \approx -1,986$   
 $a_2 = e^{-h/\tau} \approx 0,986$

b)  $b_1 = K [h - \tau + \tau e^{-h/\tau}] \approx 2,1327 \cdot 10^{-3}$

$$b_2 = K [\tau - (h + \tau) e^{-h/\tau}] \approx 2,12256 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{d'où : } G_2(z) \approx 2,13 \cdot 10^{-3} \frac{z^{-1} (1 + z^{-1})}{1 - 1,986 z^{-1} + 0,986 z^{-2}}$$

#### C.IV. Modèle discret

##### C.IV.1. réponse impulsionnelle de $H_m(p)$ .

Contrairement à ce qui a été fait aux questions C.II. et C.III., il s'agit ici de la réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2 sans bloqueur.

Les calculs sont un peu plus simples, mais l'on ne devra considérer que le dénominateur de  $H_m(z)$  pour l'étude dynamique de la partie C.V

$$h(t) \equiv \text{dérivée de } y(t) = 1 - e^{-\eta \omega_n t} \left[ \cos \omega_0 t + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \sin \omega_0 t \right]$$

avec  $\omega_0 = \omega_n \sqrt{1 - \eta^2}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \eta \omega_m \left[ \cos \omega_0 t + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \sin \omega_0 t \right] e^{-\eta \omega_n t} \\ &- e^{-\eta \omega_n t} \left[ -\omega_0 \sin \omega_0 t + \frac{\eta \omega_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} \cos \omega_0 t \right] \\ &= e^{-\eta \omega_n t} \left[ \cos \omega_0 t \left( \eta \omega_n - \frac{\eta \omega_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right) + \sin \omega_0 t \left( \frac{\eta^2 \omega_n}{\sqrt{1 - \eta^2}} + \omega_0 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{\eta^2 \omega_n}{\sqrt{1 - \eta^2}} + \omega_n \sqrt{1 - \eta^2} = \frac{\omega_n (\eta^2 + 1 - \eta^2)}{\sqrt{1 - \eta^2}}$$

$$\text{donc : } \boxed{h(t) = \frac{\omega_n e^{-\eta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \sin \omega_0 t}$$

$$\text{d'où : } \boxed{h_k = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \eta^2}} e^{-\eta \omega_n k h} \sin k \omega_0 h}$$

##### C.IV.2. $H_m(z) = Z \{H_m(p)\}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$$

**1<sup>ère</sup> méthode :**

$$\begin{aligned} \text{avec } h_k &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \eta^2}} \left( e^{-\eta \omega_n h} \right)^k \frac{1}{2j} \left[ e^{j k h \omega_0} - e^{-j k h \omega_0} \right] \\ &= h_{k_1} + h_{k_1}^* \end{aligned}$$

$$h_{k_1} = \frac{\omega_n}{2j \sqrt{1 - \eta^2}} \left( e^{-\eta \omega_n h + j h \omega_0} \right)^k$$

$$\Rightarrow Z \{h_{k_1}\} = \frac{\omega_n}{2j \sqrt{1-\eta^2}} \frac{1}{1 - e^{-\eta \omega_n h + j h \omega_0} z^{-1}}$$

de même :  $Z \{h^*_{k_1}\} = \frac{-\omega_n}{2j \sqrt{1-\eta^2}} \frac{1}{1 - e^{-\eta \omega_n h - j h \omega_0} z^{-1}}$

et  $H_m(z) = Z \{h_k\} = \frac{\omega_n}{2j \sqrt{1-\eta^2}} \left[ \frac{1}{1 - e^{-\eta \omega_n h + j h \omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-\eta \omega_n h - j h \omega_0} z^{-1}} \right]$

$$= \frac{\omega_n}{2j \sqrt{1-\eta^2}} \left[ \frac{1 - e^{-\eta \omega_n h} e^{-j h \omega_0} z^{-1} - 1 + e^{-\eta \omega_n h} e^{j h \omega_0} z^{-1}}{1 - e^{-\eta \omega_n h} z^{-1} (e^{j h \omega_0} + e^{-j h \omega_0}) + e^{-2\eta \omega_n h} z^{-2}} \right]$$

$$H_m(z) = \frac{\omega_n e^{-\eta \omega_n h} z^{-1}}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{(e^{j h \omega_0} - e^{-j h \omega_0})/2j}{1 - 2 e^{-\eta \omega_n h} \cos h \omega_0 z^{-1} + e^{-2\eta \omega_n h} z^{-2}}$$

$$H_m(z) = \frac{\omega_n e^{-\eta \omega_n h} \sin h \omega_0}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{z^{-1}}{1 - 2 e^{-\eta \omega_n h} \cos h \omega_0 z^{-1} + e^{-2\eta \omega_n h} z^{-2}}$$

**2<sup>e</sup> méthode :**

$$H_m(p) = A \left[ \frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2} \right]$$

avec  $p_1, p_2$  solution de  $\omega_n^2 + 2 \eta \omega_n p + p^2 = 0$

donc  $p_1 = -\eta \omega_n + j \omega_n \sqrt{1-\eta^2}$

$p_2 = -\eta \omega_n - j \omega_n \sqrt{1-\eta^2}$

$$H_m(p) = \frac{A}{(p-p_1)(p-p_2)} [p_1 - p_2]$$

$$A (p_1 - p_2) = \omega_n^2$$

$$A = \frac{\omega_n^2}{2j \omega_n \sqrt{1-\eta^2}}$$

puis  $Z \left\{ \frac{1}{p-p_1} \right\} = \frac{1}{1 - e^{p_1 h} z^{-1}}$

et  $H_m(z) = A \left[ \frac{1}{1 - e^{p_1 h} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{p_2 h} z^{-1}} \right]$

$$= A \left[ \frac{1 - e^{p_2 h} z^{-1} - 1 + e^{p_1 h} z^{-1}}{1 - z^{-1} (e^{p_1 h} + e^{p_2 h}) + e^{(p_1 + p_2) h} z^{-2}} \right]$$

$$= A \frac{z^{-1} (e^{p_1 h} - e^{p_2 h})}{1 - z^{-1} (e^{p_1 h} + e^{p_2 h}) + e^{(p_1 + p_2) h} z^{-2}}$$

On a :

$$* e^{p_1 h} + e^{p_2 h} = e^{-\eta \omega_n h} \left[ e^{j \omega_0 h} + e^{-j \omega_0 h} \right]$$

$$= 2 \cos h \omega_0 e^{-\eta \omega_n h}$$

$$* e^{(p_1 + p_2) h} = e^{-2\eta \omega_n h}$$

$$* e^{p_1 h} - e^{p_2 h} = e^{-\eta \omega_n h} 2j \sin h \omega_0$$

d'où :

$$H_m(z) = \frac{\omega_n e^{-\eta \omega_n h} \sin h \omega_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} \frac{z^{-1}}{1 - 2 e^{-\eta h \omega_n} \cos h \omega_0 z^{-1} + e^{-2\eta \omega_n h} z^{-2}}$$

$$C.IV.3. H_m(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos \Psi z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$$

on a immédiatement :

$$\alpha = e^{-\eta \omega_n h}$$

$$\Psi = h \omega_n \sqrt{1 - \eta^2}$$

C.IV.4. Applications numériques :

$$\omega_n = 10 \quad h = 0,01 \quad \eta = 0,707 \quad \eta^2 = 0,5$$

$$\Psi = h \omega_n \sqrt{0,5} = h \omega_n \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,1 \cdot 10,707 = 0,0707 \text{ rd}$$

soit 4,051 degré

$$\alpha = e^{-\eta \omega_n h}$$

$$\alpha = e^{-0,0707} \approx 0,9317 \quad \alpha_2 \approx 0,868$$

$$2\alpha \cos \Psi \approx 1,8588$$

$$\text{donc } D(z) \# 1 - 1,86 z^{-1} + 0,868 z^{-2}$$

C.V.1. Correcteur PI numérique.

$$C.V.1.1. \text{ expression de } G'(z) = \frac{\Omega(z)}{S(z)}$$

$$\text{On a } C(z) = d_0 \left( \frac{1 + \frac{d_1}{d_0} z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right)$$

$$\text{et on a } \frac{d_1}{d_0} = -e^{-h/\tau} \quad \text{pour compenser le pôle } e^{-h/\tau} \text{ de } G_1(z)$$

$$\text{donc } G_1(z) C(z) = \frac{d_0}{1 - z^{-1}} \cdot K \cdot (1 - e^{-h/\tau}) z^{-1} = \frac{N}{D}$$

$$\text{et } G'(z) = \frac{K d_0 (1 - e^{-h/\tau}) z^{-1}}{1 + z^{-1} [K d_0 (1 - e^{-h/\tau}) - 1]} = \frac{N}{N+D}$$

C.V.1.2. Modèle d'ordre 1 :

de la forme :

$$G_m(z) = \frac{K_m (1 - e^{-h/\tau'}) z^{-1}}{1 - e^{-h/\tau'} z^{-1}} \quad \text{par analogie avec } G_1(z)$$

C.V.1.2.a. On a donc :  $e^{-h/\tau'} = K d_0 (1 - e^{-h/\tau}) - 1$

d'où :  $d_0 = \frac{1 - e^{-h/\tau'}}{K (1 - e^{-h/\tau})}$

C.V.1.2.b. puis  $d_1 = -d_0 e^{-h/\tau}$

C.V.1.2.c. Applications numériques :  $h/\tau = \frac{0,1}{7}$      $\frac{h}{\tau'} = \frac{0,1}{1,4}$      $k = 30$

$d_0 \approx 0,1620$     et     $d_1 \approx -0,1597$

R.Q. Le numérateur de  $G_m(z)$  n'intervient pas dans la détermination du correcteur PI.

R.Q. si  $h \rightarrow 0$

on a  $1 - e^{-h/\tau'} \approx \frac{h}{\tau'}$

$1 - e^{-h/\tau} \approx \frac{h}{\tau}$

et  $d_0 \rightarrow \frac{1}{k} \cdot \frac{h}{\tau'} \cdot \frac{\tau}{h} = \frac{\tau}{k \tau'} \approx 0,166$

C.V.1.3.a.  $C(p) = c_1 + \frac{c_0}{p}$

$C(z) = c_1 + c_0 \frac{h z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

Transmittance en z d'un correcteur P.I. échantillonné + bloqué (ordre zéro).

donc  $C(z) = \frac{c_1 - (c_1 - h c_0) z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

C.V.1.3.b. Comparer avec la forme  $C(z) = \frac{d_0 + d_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$

$\Rightarrow c_1 = d_0$

$d_1 = -(c_1 - h c_0) = h c_0 - c_1$

$c_0 = \frac{d_1 + c_1}{h} = \frac{d_0 + d_1}{h}$

C.V.1.3.c. *Applications numériques :*

$$K c_1 = K d_0 \# 30.0,162 = 4,86$$

(au lieu de 5)

voir Q. B.IV.1.4. 
$$\begin{cases} K K_0 = 5 \\ K K_i = 7,14 = \frac{5}{\tau} \\ C(p) = K_0 + \frac{K_i}{p} \end{cases}$$

si  $h \rightarrow 0$

$$\text{on retrouve } K d_0 = K \frac{\tau}{K \tau} = \frac{\tau}{\tau} = 5$$

la différence est due à l'échantillonnage.

$$K \cdot c_0 = \frac{K}{h} (d_0 + d_1)$$

$$\text{et } K d_1 = -K d_0 e^{-h/\tau}$$

$$\text{donc } K \cdot c_0 = \frac{K d_0}{h} [1 - e^{-h/\tau}]$$

$$K c_0 \# 6,893$$

$$\text{R.Q. si } h \rightarrow 0 \text{ alors } K c_0 \rightarrow \frac{K d_0}{h} \cdot \frac{h}{\tau} = \frac{K d_0}{\tau} = 7,14$$

C.V.1.4. Équation récurrente

$$\text{on a } C(z) = \frac{0,162 - 0,1597 z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{U(z) \text{ (sortie)}}{\varepsilon(z) \text{ (entrée)}}$$

$$\rightarrow U(z) (1 - z^{-1}) = [0,162 - 0,1597 z^{-1}] \varepsilon(z)$$

$$\downarrow u_k = u_{k-1} + 0,162 \varepsilon_k - 0,1597 \varepsilon_{k-1}$$

Noter la précision «importante» sur les coefficients  $d_0$  et  $d_1$ , nécessaire ici car la période d'échantillonnage  $h$  est très petite devant les constantes de temps principales du système ( $h / \tau \ll 1$ )

C.V.2. *PID discret*

$$\text{C.V.2.1. } G''(z) = \frac{\theta(z)}{E(z)}$$

puisque  $\beta$  doit compenser un pôle stable, ce ne peut être que  $\beta = -0,986$  donc on a :

$$\begin{aligned} C(z) G_2(z) &= \frac{d_0}{1 - z^{-1}} (1 + \gamma z^{-1}) \cdot 2,13 \cdot 10^{-3} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{2,13 \cdot 10^{-3} d_0 (1 + z^{-1}) (1 + \gamma z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{N}{D} \end{aligned}$$

donc

$$G''(z) = \frac{N}{N+D} \frac{2,13 \cdot 10^{-3} d_0 (1+z^{-1})(1+\gamma z^{-1})}{2,13 \cdot 10^{-3} d_0 (1+z^{-1})(1+\gamma z^{-1}) + 1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

$$D(z) = 1 + 2,13 \cdot 10^{-3} d_0 + z^{-1} [(1+\gamma) 2,13 \cdot 10^{-3} d_0 - 2] + z^{-2} [1 + 2,13 \cdot 10^{-3} d_0 \gamma]$$

C.V.2.2. Modèle d'ordre 2  $\Rightarrow$

$$D_m(z) = 1 - 2\alpha \cos \Psi z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}$$

$$\alpha^2 = \frac{1 + 2,13 \cdot 10^{-3} d_0 \gamma}{1 + 2,13 \cdot 10^{-3} d_0}$$

$$2\alpha \cos \psi = \frac{2 - (1+\gamma) 2,13 \cdot 10^{-3} d_0}{1 + 2,13 \cdot 10^{-3} d_0}$$

C.V.2.3.  $\eta = 0,707$      $h = 0,01$      $\omega_n = 10$

$$\alpha = e^{-\eta \omega_n h} = 0,93174$$

$$\alpha^2 \# 0,86814$$

$$\psi = h \omega_n \sqrt{1 - \eta^2} \approx 0,0707 \approx 4,052 \text{degré}$$

$$2\alpha \cos \psi \approx 1,8588 \# 1,86$$

donc

$$0,8681 (1 + 2,13 \cdot 10^{-3} d_0) = 1 + 2,13 \cdot 10^{-3} d_0 \gamma$$

$$1,8588 (1 + 2,13 \cdot 10^{-3} d_0) = 2 - (1+\gamma) 2,13 \cdot 10^{-3} d_0$$

$$-0,139 + 1,849 \cdot 10^{-3} d_0 = 2,13 \cdot 10^{-3} d_0 \gamma$$

$$-0,1412 + 2,13 \cdot 10^{-3} d_0 (1,8588 + 1) + - 2,13 \cdot 10^{-3} d_0 \gamma$$

$$1,849 d_0 = 139 + 2,13 d_0 \gamma$$

$$6,089 d_0 = 141,2 - 2,13 d_0 \gamma$$

$$\Sigma \Rightarrow 7,938 d_0 = 280,2 \Rightarrow d_0 \# 35,3 (35,298)$$

$$\text{et } \gamma = \frac{141,2 - 6,089 d_0}{2,13 d_0}$$

$$\gamma \# -0,9806$$

C.V.2.4.

$$C(z) = \frac{d_0}{1-z^{-1}} (1+\gamma z^{-1})(1+\beta z^{-1})$$

$$= \frac{d_0}{1-z^{-1}} [1 + (\gamma+\beta) z^{-1} + \gamma\beta z^{-2}]$$

$$\begin{aligned} * \gamma + \beta &= -0,9806 - 0,986 \\ &= -1,9666 \end{aligned}$$

$$* \gamma\beta = 0,96687 \approx 0,967$$

$$\text{d'où } C(z) = \frac{35,3 - 69,4 z^{-1} + 34,13 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$C(z) = \frac{35,3 (1 - 1,9666 z^{-1} + 0,967 z^{-2})}{1 - z^{-1}}$$

$$C(z) = \frac{35,3}{1 - z^{-1}} (1 - 0,9806 z^{-1}) (1 - 0,986 z^{-1})$$

C.V.2.5. Relation de récurrence

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{\text{Sortie}}{\text{Entrée}}$$

$$(1 - z^{-1}) U(z) = (35,3 - 69,4 z^{-1} + 34,13 z^{-2}) \varepsilon(z)$$

$$u_k = u_{k-1} + 35,3 \varepsilon_k - 69,4 \varepsilon_{k-1} + 34,13 \varepsilon_{k-2}$$

# Agrégation

(Concours Interne)

COMPOSITION DE CHIMIE

Option Physique - Session : 1990

par Ph. FLEURY  
Lycée Saint Louis, Paris

## QUELQUES ASPECTS DE LA CHIMIE DU CHLORE

### I-Récolte du chlorure de sodium.

I-1-Liquidus: courbe qui limite le domaine de la solution.

Solidus: Courbe qui limite les domaines solides homogènes.

Sur le diagramme NaCl, eau:

- le liquidus est la courbe donnée par l'énoncé;
- le solidus est constitué de trois segments verticaux: glace, NaCl, 2H<sub>2</sub>O, NaCl (ce dernier est à l'infini avec l'abscisse choisie).

I-2-La composition de la saumure à 25°C est donnée par le segment TF:

$$\frac{39,4 - x}{39,4 - 35,7} = \frac{105 - 25}{105 - 0,2} \quad \text{donc} \quad \underline{x = 36,6 \text{ g pour } 100\text{g}}$$

I-3-a-La température pour laquelle se forme le premier cristal de glace est donnée par l'ordonnée du point de la branche OE pour  $x = 2,96$ :

$$\frac{t}{2,96} = \frac{-21,6}{29,7} \quad \text{donc} \quad \underline{t = -2,1^\circ\text{C}}$$

b-La couche de glace s'épaississant, le point figuratif de la solution décrit le segment OE, jusqu'au point E (limite au point eutectique).

c-Etant au point E, si on évapore de l'eau c'est NaCl, 2H<sub>2</sub>O qui se dépose.

d-Par réchauffement du cristal à  $t > 0,2^\circ\text{C}$  on obtient un équilibre diphasé: une saumure et du solide NaCl (anhydre).

e-On part de 100g de NaCl, 2H<sub>2</sub>O soit  $m(\text{H}_2\text{O}) = 100 \cdot 2,18 / (2,18 + 23 + 35,5)$

$$\underline{m(\text{H}_2\text{O}) = 38,1\text{g}} \quad \text{et} \quad \underline{m(\text{NaCl}) = 61,9\text{g}}$$

La composition de la saumure est celle trouvée en "I-2" d'où la masse de NaCl dans la saumure:  $m(\text{NaCl}, \text{saumure}) = 38,1 \times 0,366 = 13,9\text{g}$ .

masse de saumure:	52,0g
masse de NaCl solide:	48,0g

### II-Production industrielle du chlore.

II-1-a-Une intensité est par définition  $i = dq/dt$ ; une vitesse de réaction est proportionnelle à  $dn/dt$  (variation du nombre de moles de réactant). Chaque molécule de Ox qui disparaît entraîne la capture de  $n$  Faraday. Donc:

$$dq \propto dn \quad \text{et} \quad i \propto v$$

b-Par définition, la surtension  $\eta$  est:  $\eta = E - E_n$ .

$E$  potentiel de l'électrode;

$E_n$  potentiel de l'électrode à l'équilibre (potentiel de Nernst).

c-Le courant à l'équilibre  $j_0$  représente la vitesse commune de la réaction d'oxydation et de la réaction de réduction quand le potentiel de l'électrode est le potentiel de Nernst ( $\eta = 0$ ).

Si  $j_0$  est grand la réaction est rapide;

si  $j_0$  est petit la réaction est lente.

d-Le coefficient de transfert  $\alpha$  est lié à l'irréversibilité de la réaction; il varie de 0 à 1; 1 si la réaction est réversible; 0 si l'on est très loin de la réversibilité.

II-2-Pour la réaction étudiée,  $n = 1$  et  $\alpha = 0,5$ ; l'équation se simplifie:

$$j = 2j_0 \cdot \text{sh} \left( \frac{\mathcal{F} \cdot \eta}{2RT} \right)$$

$$\eta = \frac{2RT}{\mathcal{F}} \cdot \text{Argsh} \left( \frac{j}{2j_0} \right)$$

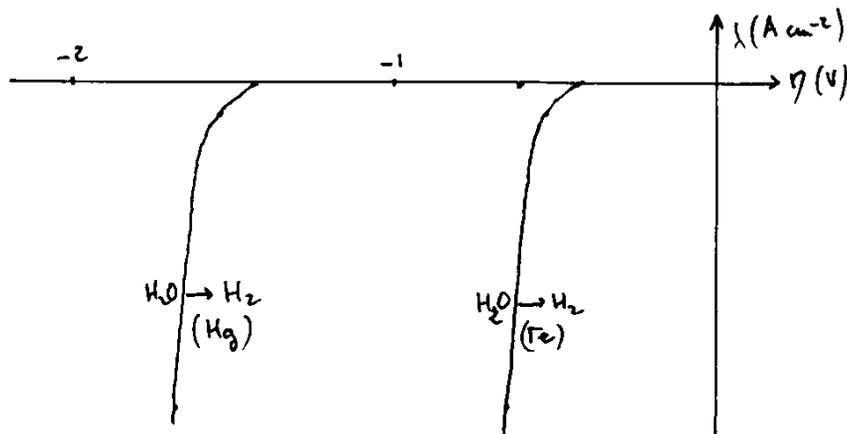
Attention: comme on étudie une réduction  $j$  est négatif.

Résultats pour l'électrode de fer:

$j(\text{A} \cdot \text{cm}^{-2})$	-0,005	-0,05	-0,5
$\eta(\text{V})$	-0,413	-0,531	-0,650

Résultats pour l'électrode de mercure:

$j(\text{A} \cdot \text{cm}^{-2})$	-0,005	-0,05	-0,5
$\eta(\text{V})$	-1,446	-1,564	-1,683



Le dégagement de  $\text{H}_2$  sur le mercure demande donc une plus grande surtension; il est plus "difficile" que sur le fer.

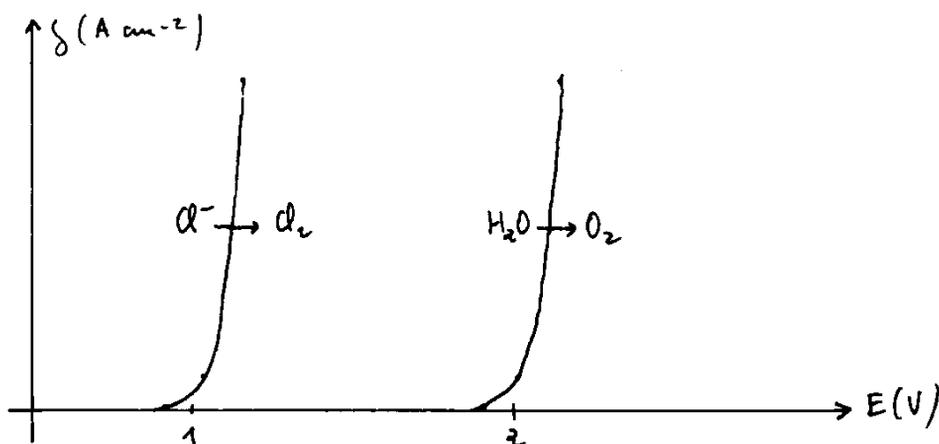
II-3-a-Les électrodes DSA sont en titane recouvert d'oxydes de métaux de transition, essentiellement de ruthénium ( $\text{RuO}_2$ ).

b-Etude de l'oxydation de  $\text{Cl}^-$ : Potentiel de Nernst,  $E^\circ(\text{Cl}^-/\text{Cl}_2) = 1,36 \text{ V}$ . (on travaille en oxydation donc  $j > 0$ ).

$j(\text{A} \cdot \text{cm}^{-2})$	0,005	0,05	0,5
$\eta(\text{V})$	0,085	0,201	0,319
$E(\text{V ENH})$	1,44	1,56	1,68

Etude de l'oxydation de l'eau: Potentiel de Nernst,  $E = 1,23 - 0,06pH$ ,  
 $E = 0,99 \text{ V ENH}$ .

$j(\text{Acm}^{-2})$	0,005	0,05	0,5
$\eta(\text{V})$	0,910	1,029	1,148
$E(\text{V ENH})$	1,90	2,02	2,14



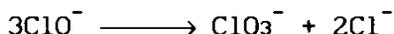
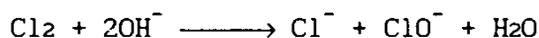
c-Ces courbes montrent que l'oxydation de  $\text{Cl}^-$  se fait seule à condition que la tension reste inférieure à 1,9 V ENH.

II-4-a-Sur l'électrode en fer la réduction est celle de l'eau puisque le potentiel de réduction de l'ion  $\text{Na}^+$  est très négatif. Le potentiel de Nernst pour la réduction de l'eau est  $E = -0,06pH = -0,84 \text{ V ENH}$ .

b-Les phénomènes parasites possibles qui apparaissent sont:

-la dissolution du chlore dans la solution;

-Les dismutations successives du chlore au contact des ions  $\text{OH}^-$  formés à la cathode:



c-Pour éviter ces phénomènes parasites: on laisse monter la température ce qui diminue la solubilité du chlore; on utilise des solutions très concentrées en ions  $\text{Cl}^-$ ; on sépare les compartiments cathodique et anodique pour limiter la diffusion des ions  $\text{OH}^-$ ; on place la cathode en sortie de cellule pour que les ions  $\text{OH}^-$  soient éliminés aussitôt formés.

d-Pour obtenir  $j = 0,5 \text{ A.cm}^{-2}$  on a:

-potentiel de l'anode:  $E_+ = E_{eq+} + \eta_+ = 1,678 \text{ V}$ ;

-potentiel de la cathode:  $E_- = E_{eq-} + \eta_- = -1,49 \text{ V}$ ;

- $e = E_+ - E_- = 3,168 \text{ V}$ .

e-Essentiellement, deux phénomènes augmentent cette valeur:

-l'augmentation de température (on a fait les calculs pour  $25^\circ\text{C}$ );

-l'effet Joule.

II-5-a-Ecriture de la loi de Nernst pour la réaction de réduction de  $\text{Na}^+$  sur Hg.

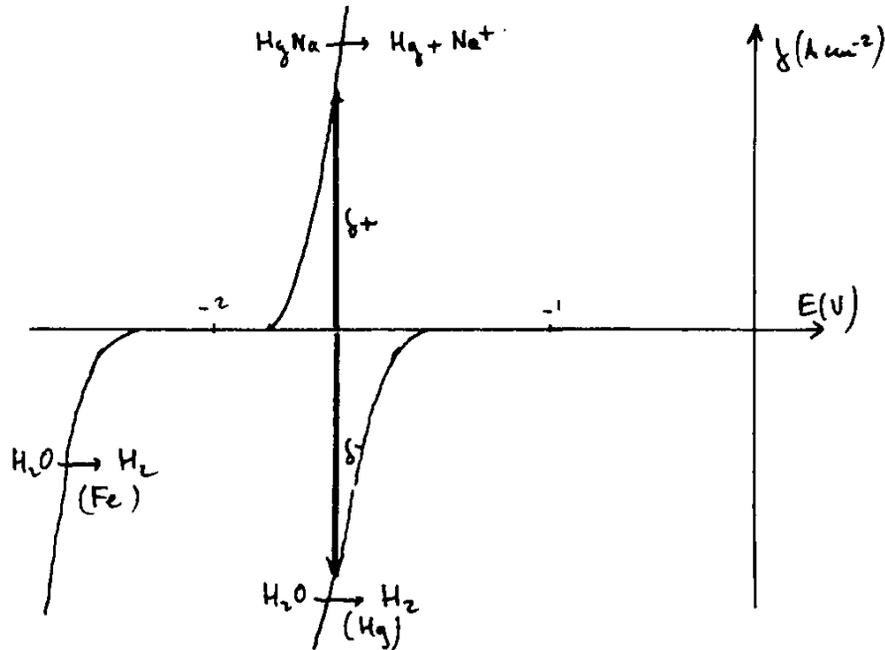
$$E = -1,84 + 0,06 \cdot \log \frac{(\text{Na}^+)}{(\text{Na})}$$

(Na) est l'activité du sodium dans l'amalgame.

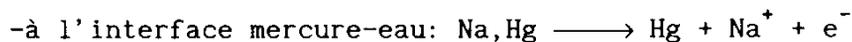
b-La tension cathodique pour obtenir  $0,5 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$  à partir de la réduction de l'eau est  $E_+ = -0,84 - 1,683 = -2,523 \text{ V}$ ; celle pour obtenir la même densité de courant à partir de la réduction de  $\text{Na}^+$  est voisine de  $-1,84 \text{ V}$ .

C'est donc cette dernière réaction qui se produit.

c-Etude du décomposeur: replaçons les différentes courbes intensité potentiel.



On voit donc qu'effectivement on a possibilité de réactions:



On obtient une sorte de pile court-circuitée. Il sort du décomposeur un gaz (l'hydrogène) et une solution de soude.

II-6-a-Une tonne de chlore représente  $N = 10^6/71$  moles de chlore; chaque mole de chlore nécessite la circulation de 2 Faraday; l'énergie nécessaire est donc:

$$W = U \cdot q = 2F \cdot N \cdot U$$

cathode en fer:  $U = 3,45 \text{ V}$  donc  $W = 9,38 \cdot 10^9 \text{ J} = 2605 \text{ kWh}$ ;

cathode en Hg:  $U = 4,4 \text{ V}$  donc  $W = 1,20 \cdot 10^9 \text{ J} = 3322 \text{ kWh}$ .

b-Dans le procédé à cathode en fer, qui paraît plus économique, il faut dépenser de l'énergie pour séparer la soude de la saumure qui reste. Pour cela il faut évaporer l'eau (par chauffage)  $\text{NaCl}$ , moins soluble, précipite.

II-7-Les membranes utilisées maintenant sont constituées de polymères fluorés (chaines de type "téflon", polytétrafluoroéthylène) sur lesquels sont greffés des sites anioniques,  $-\text{COO}^-$  ou mieux  $-\text{SO}_3^-$ .

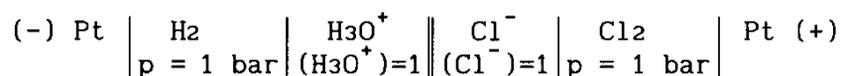
II-8-Pour préparer le dibrome à partir des ions bromures il suffit de faire une oxydation par le chlore:



Le brome est alors distillé.

III-Les composés du chlore en solution aqueuse.

III-1-Considérons une cellule électrochimique constituée d'une électrode normale à hydrogène et d'une électrode normale à chlore selon le schéma suivant:



Par définition la f.e.m. de cette pile est:  $E = E_+ - E_- = E^\circ(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) - 0,000$ .  
A cette pile est associé le bilan:



On sait d'autre part que  $\Delta G = -\mathcal{F}.E$  (avec  $\Delta G$  enthalpie libre de la réaction bilan).

III-2-Diagramme de Frost du chlore. On donne dans l'énoncé les potentiels normaux de tous les couples dont le réducteur est  $\text{Cl}^-$ .

Pour  $\text{pH} = 0$ , il suffit de prendre les combinaisons des potentiels donnés; on se souvient que seuls les  $\Delta G$  sont des fonctions d'état.

Voici par exemple le détail du calcul pour l'étude de  $\text{ClO}_4^-$ :

$$y(\text{ClO}_4^-) = 8.E^\circ(\text{ClO}_4^-/\text{Cl}^-) - E^\circ(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = 9,645$$

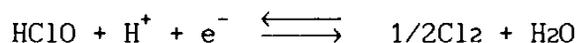
On obtient finalement les résultats suivants:

N.O.	-I	0	+I	+III	+V	+VII
espèces	$\text{Cl}^-$	$\text{Cl}_2$	$\text{HClO}$	$\text{HClO}_2$	$\text{ClO}_3^-$	$\text{ClO}_4^-$
y(eV)	-1,395	0	1,605	4,845	7,305	9,645

Pour  $\text{pH} = 14$ , les calculs sont plus compliqués car il faut tenir compte d'une part du changement de pH pour les couples faisant intervenir des  $\text{H}_3\text{O}^+$  et d'autre part des changements d'espèces prédominantes.

-pour le degré -I: pas de changement,  $y = -1,395$ .

-pour le degré +I: l'espèce stable à  $\text{pH} = 14$  est  $\text{ClO}^-$ .



$$E = 1,605 + 0,06 \cdot \log \frac{(\text{HClO})(\text{H}^+)}{(\text{Cl}_2)^{1/2}} = 1,605 + 0,06 \cdot \log \frac{(\text{ClO}^-)(\text{H}^+)^2}{K_a \cdot (\text{Cl}_2)^{1/2}}$$

$$E_{\text{app}}^\circ = 1,605 + 0,06 \cdot 7,3 - 0,12\text{pH}$$

$$E_{\text{app}}^\circ (\text{pH}=14) = 0,363 \quad (\text{c'est le potentiel normal apparent à pH}=14).$$

-pour le degré VII: l'espèce prédominante est toujours  $\text{ClO}_4^-$ .

$$E = \frac{9,645}{7} + \frac{0,06}{7} \cdot \log \frac{(\text{ClO}_4^-)(\text{H}^+)^8}{(\text{Cl}_2)^{1/2}}$$

$$y(\text{VII}) = 7.E_{\text{app}}^\circ (\text{pH}=14) = 2,925$$

On obtient finalement les résultats suivants:

N.O.	-I	0	+I	+III	+V	+VII
espèces	$\text{Cl}^-$	$\text{Cl}_2$	$\text{ClO}^-$	$\text{ClO}_2^-$	$\text{ClO}_3^-$	$\text{ClO}_4^-$
y(eV)	-1,395	0	0,363	1,605	2,265	2,925



III-4-a-Les potentiels normaux des couples  $\text{ClO}_3^-/\text{Cl}^-$  et  $\text{ClO}_4^-/\text{Cl}^-$  sont très grands. La thermodynamique prévoit donc un fort pouvoir oxydant pour les ions chlorate et perchlorate. En fait, sauf peut-être pour l'ion chlorate en milieu très acide, ce pouvoir oxydant ne se manifeste pas. On a affaire à un blocage cinétique; les réactions sont très lentes.

b-Chlorates et perchlorates sont par contre des oxydants à sec et utilisés comme tel:

- chlorates: feux d'artifice (feux de Bengale, fusées);
- perchlorate: comburant solide pour fusées.

III-5-Diagramme tension-pH du chlore:

a-limite de prédominance  $\text{HClO}$ ,  $\text{ClO}^-$ :  $\text{pH} = \text{pK}_a = 7,3$ .

limite de prédominance  $\text{HClO}$ ,  $\text{Cl}^-$ :  $\text{HClO} + \text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$

$$E = 1,50 + 0,06 \cdot \log \frac{[\text{HClO}][\text{H}^+]}{[\text{Cl}^-]}$$

$$E_{\text{app}} = 1,50 - 0,03\text{pH}$$

limite de prédominance  $\text{ClO}^-$ ,  $\text{Cl}^-$ :  $\text{ClO}^- + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$

$$E = 1,50 + 0,06 \cdot \log \frac{[\text{ClO}^-][\text{H}^+]^2}{K_a[\text{Cl}^-]}$$

$$E_{\text{app}} = 1,72 - 0,06\text{pH}$$

b-Il y a dégagement de chlore quand la pression de chlore à l'équilibre dépasse 1 bar.

$$E = 1,359 + 0,06 \cdot \log \frac{p(\text{Cl}_2)^{1/2}}{[\text{Cl}^-]}$$

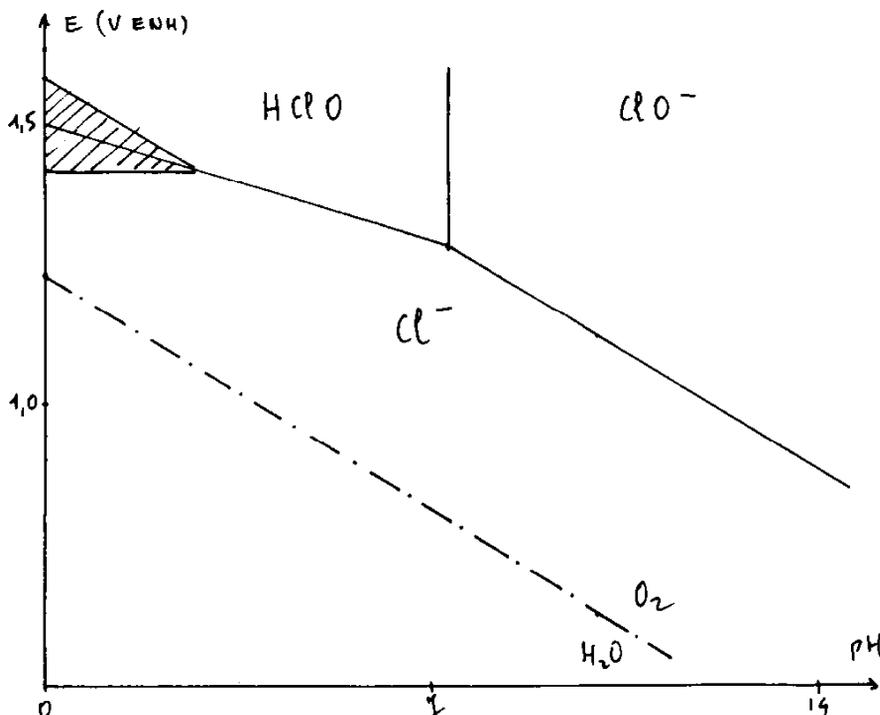
Pour  $p(\text{Cl}_2) = 1 \text{ bar}$  et  $[\text{Cl}^-] = 0,1 \text{ mol.l}^{-1}$ ,  $E = 1,42 \text{ V ENH}$ .

c-étude du dégagement de chlore à partir d'une solution de  $\text{HClO}$ :

$$E = 1,641 + 0,06 \cdot \log \frac{[\text{HClO}][\text{H}^+]}{p(\text{Cl}_2)^{1/2}}$$

Pour  $p(\text{Cl}_2) = 1 \text{ bar}$  et  $[\text{HClO}] = 0,1 \text{ mol.l}^{-1}$ :  $E = 1,58 - 0,06\text{pH}$ .

d-le domaine E-pH, dans lequel le chlore va se dégager est donc le triangle compris entre les deux droites trouvées ci-dessus.



III-6-On trouve la constante de la loi de Henry en identifiant les deux expressions de la loi de Nernst:

$$E = 1,359 + 0,06 \cdot \log \frac{p(\text{Cl}_2)^{1/2}}{[\text{Cl}^-]} = 1,395 + 0,06 \cdot \log \frac{[\text{Cl}_2]^{1/2}}{[\text{Cl}^-]}$$

Avec  $[\text{Cl}_2] = k \cdot p(\text{Cl}_2)$ , on trouve  $k = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1} \cdot \text{bar}^{-1}$ .

III-7-Cherchons dans quelle zone du plan  $\text{Cl}_2$  devient majoritaire à partir d'une solution d'ions chlorure  $[\text{Cl}^-] = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}$ .

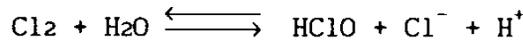
A la limite de prédominance:

$$\left. \begin{array}{l} 2[\text{Cl}_2] = [\text{Cl}^-] \\ 2[\text{Cl}_2] + [\text{Cl}^-] = 10^{-1} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} [\text{Cl}^-] = 0,05 \\ [\text{Cl}_2] = 0,025 \end{array} \right.$$

En reportant dans la loi de Nernst, écrite pour le chlore dissous, on trouve  $E = 1,425 \text{ V ENH}$ . On voit donc que le chlore gaz va se dégager avant que l'espèce  $\text{Cl}_2$  devienne majoritaire (voir le résultat de III-5).

Le raisonnement est équivalent à partir d'une solution de  $\text{HClO}$ .

III-8-a-La réaction qui a lieu quand le chlore barbote dans l'eau est:



D'après la loi de Henry:  $[\text{Cl}_2] = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$ .

La réaction ci-dessus permet d'écrire:  $[\text{HClO}] = [\text{Cl}^-] = [\text{H}^+] = x$ .

On va trouver la constante de la loi d'action de masse grâce à l'écriture de la loi de Nernst pour les deux équilibres  $\text{Cl}_2/\text{Cl}^-$  et  $\text{HClO}/\text{Cl}_2$ :

$$E = 1,395 + 0,06 \cdot \log \frac{[\text{Cl}_2]^{1/2}}{[\text{Cl}^-]} = 1,605 + 0,06 \cdot \log \frac{[\text{HClO}][\text{H}^+]}{[\text{Cl}_2]^{1/2}}$$

$$\text{Tout calcul fait: } \log K = \log \frac{[\text{HClO}][\text{Cl}^-][\text{H}^+]}{[\text{Cl}_2]} = -3,5 \quad K = 3,16 \cdot 10^{-4}$$

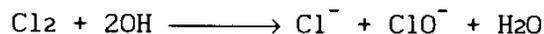
On est amené à résoudre l'équation:  $x^3 = K \cdot [\text{Cl}_2] = 2 \cdot 10^{-5}$ .

Ce qui donne:  $x = 2,71 \cdot 10^{-2}$ , donc  $\text{pH} = 1,56$ , puis  $E = 1,45 \text{ V ENH}$ .

b-On remarque que le point figuratif de cette solution est en dehors de la zone de stabilité thermodynamique de l'eau; elle est donc thermodynamiquement instable (heureusement la réaction d'oxydation de l'eau est lente).

c-Cette solution est surtout utilisée pour ses propriétés oxydantes (ce qui est lié à son pouvoir décolorant):  $\text{Fe}^{2+}$  oxydé en  $\text{Fe}^{3+}$ ,  $\text{I}^-$  oxydé en  $\text{I}_2$ , les composés du soufre  $\text{S}^{2-}$ ,  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ ,  $\text{SO}_3^{2-}$  sont oxydés en  $\text{SO}_4^{2-}$ .

III-9-a-L'eau de Javel contient  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{ClO}^-$ ,  $\text{Na}^+$ , par dismutation complète de  $\text{Cl}_2$  en milieu basique:



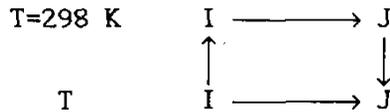
Le point figuratif de cette solution se trouve sur la droite limitant les domaines de prédominance de  $\text{Cl}^-$  et  $\text{ClO}^-$  (voir le graphe).

b-Quand on ajoute de l'acide sulfurique, le pH diminue, le point figuratif décrit les droites limitant les domaines de prédominance de  $\text{Cl}(-\text{I})$  et  $\text{Cl}(+\text{I})$ ; quand on pénètre dans le triangle trouvé en III-5,  $\text{Cl}_2$  se dégage.

c-Cette solution est oxydante:  $\text{Fe}^{2+}$  est oxydé en  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ ,  $\text{I}^-$  en  $\text{IO}_3^-$ ,  $\text{NH}_3$  en azote (expérience classique).....

iv-Oxydation par voie sèche.

IV-1-Etude de l'enthalpie standard d'une réaction. Pour étudier les fonctions d'état, on se sert d'un cycle:



Pour l'enthalpie:

$$\begin{aligned}
 \Delta H^\circ(T) &= C_I(298 - T) + \Delta H^\circ(298) + C_J(T - 298) \\
 &= \Delta H^\circ(298) + (T - 298)(C_J - C_I)
 \end{aligned}$$

Pour l'entropie on trouve de même;

$$\Delta S^\circ(T) = \Delta S^\circ(298) + (C_J - C_I) \ln \frac{T}{298}$$

Soit enfin pour l'enthalpie libre standard:

$$\begin{aligned}
 \Delta G^\circ(T) &= \Delta H^\circ(T) - T \Delta S^\circ(T) \\
 &= \Delta H^\circ(298) - T \Delta S^\circ(298) + (T - 298)(C_J - C_I) - T(C_J - C_I) \ln \frac{T}{298}
 \end{aligned}$$

On obtient la loi,  $\Delta G^\circ(T) = A + B.T \ln T + C.T$ , avec:

$$\begin{cases}
 A = \Delta H^\circ(298) - 298.(C_J - C_I) \\
 B = -(C_J - C_I) \\
 C = (C_J - C_I)[1 + \ln 298] - \Delta S^\circ(298)
 \end{cases}$$

IV-2-Approximation d'Ellingham: dans cette approximation on prend:

$$\Delta G^\circ(T) = \alpha + \beta.T$$

On peut démontrer que les variations d'enthalpie et d'entropie sont constantes grace aux relations:

$$\begin{cases}
 \Delta S^\circ = -\frac{\delta}{\delta T}(\Delta G^\circ) = -\beta \\
 -\frac{\Delta H^\circ}{T^2} = +\frac{\delta}{\delta T}\left(\frac{\Delta G^\circ}{T}\right) = -\frac{\alpha}{T^2} \quad \text{donc } \Delta H^\circ = \alpha
 \end{cases}$$

Donc  $\Delta H^\circ$  et  $\Delta S^\circ$  sont bien constantes.

IV-3-a-Etude de la formation de MnCl<sub>2</sub>. On calcule l'enthalpie standard et l'entropie standard et l'on trouve:

$$\Delta G^\circ = -481,5 \cdot 10^3 + 137,6.T$$

b-On sait qu'à l'équilibre:  $\Delta G^\circ + RT \ln K_p = 0$ .

Pour la réaction considérée:  $K_p = (p(\text{Cl}_2))^{-1}$ , on a donc:

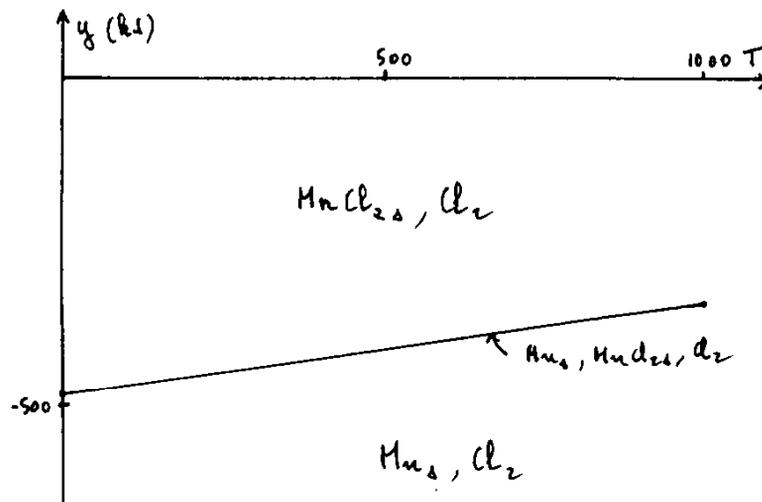
$$\Delta G^\circ = RT \ln(p(\text{Cl}_2))$$

Posons  $y = RT \ln(p(\text{Cl}_2))$ , trois cas sont a considérer:

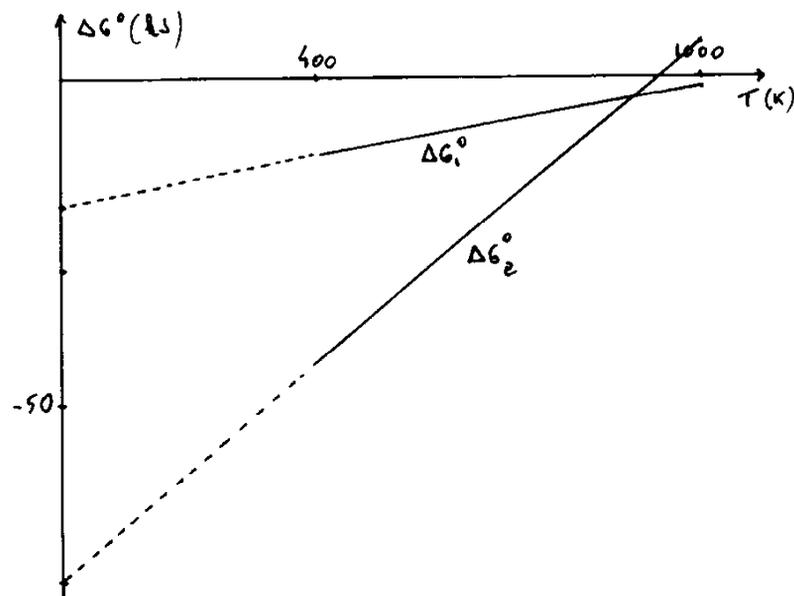
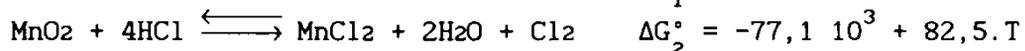
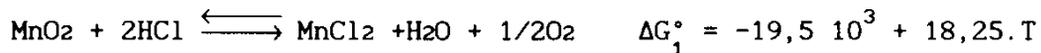
-si  $y = \Delta G^\circ$ , le point figuratif se trouve sur la droite d'Ellingham; nous avons équilibre entre les trois espèces (Cl<sub>2g</sub>, Mns, MnCl<sub>2s</sub>).

-si  $y > \Delta G^\circ$ ,  $p(\text{Cl}_2)$  est alors supérieure à la valeur qu'il aurait à l'équilibre; le système va évoluer avec diminution de  $p(\text{Cl}_2)$ ; donc si l'on fixe  $p(\text{Cl}_2)$  il ne peut exister Mns. On se trouve dans le domaine de MnCl<sub>2s</sub> (il n'existe que les systèmes Cl<sub>2g</sub>, MnCl<sub>2s</sub>).

-si  $y < \Delta G^\circ$ ,  $p(\text{Cl}_2)$  est supérieure à sa valeur à l'équilibre; le système aurait tendance à évoluer avec augmentation de  $p(\text{Cl}_2)$ ; si on fixe  $p(\text{Cl}_2)$  il ne peut exister  $\text{MnCl}_2\text{s}$ . C'est le domaine de  $\text{Mns}$  (il n'existe que des systèmes  $\text{Cl}_2\text{g}$ ,  $\text{Mns}$ ).



IV-4-a-Les calculs de  $\Delta G^\circ$  se font comme plus haut:



b-Variance de ces équilibres:  $V = c + 2 - \phi$

-c nombre de constituants indépendants; ici 5 constituants mais 1 équilibre, donc  $c = 4$ ;

-2 paramètres physiques: pression et température;

-\phi nombre de phases; ici une phase gaz et 2 phases solides

donc  $\phi = 3$ .

$$V = 3$$

Si on enferme dans un récipient seulement  $\text{MnO}_2$  et  $\text{HCl}$ , la variance devient  $V=2$  car on impose une relation supplémentaire; par exemple pour le second équilibre  $p(\text{H}_2\text{O}) = 2 \cdot p(\text{O}_2)$ .

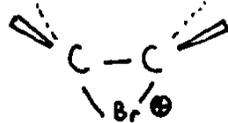
c-L'étude du diagramme d'Ellingham tracé plus haut montre qu'à basse température on produit du chlore tandis qu'à haute température on obtiendra de l'oxygène.

V-Les halogènes en chimie organique.

V-1-a-L'action des halogènes sur les alcènes s'effectue:

- en phase liquide;
- le solvant doit être polaire (solvant chloré, éther, par exemple)
- la réaction a lieu à froid et en l'absence de tout catalyseur.

b-Pour la bromation, l'intermédiaire de réaction est l'ion bromonium:

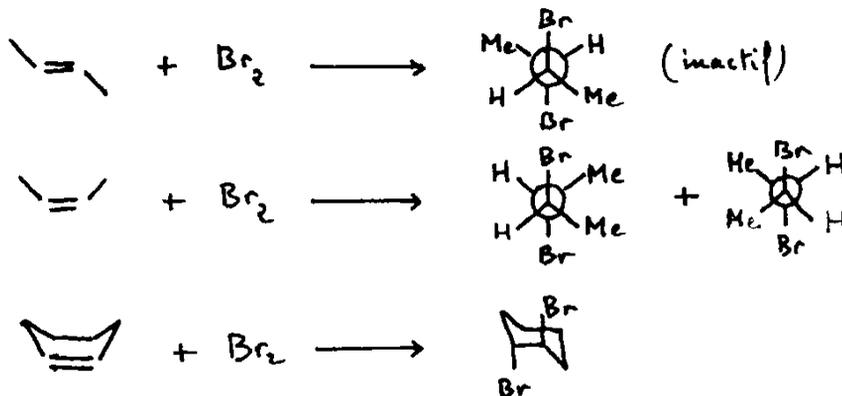


Parmi les preuves du mécanisme on peut citer:

-si l'on ajoute un nucléophile différent de  $\text{Br}^-$ , ( $\text{SCN}^-$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{NO}_3^-$ ...) on obtient des additions mixtes; la réaction se fait donc en deux étapes la seconde étant une attaque nucléophile.

-il y a toujours transaddition; le brome est un gros atome, le nucléophile ne peut attaquer que du côté opposé.

c-Schémas de quelques additions:



V-2-a-Bilan:

Conditions expérimentales:

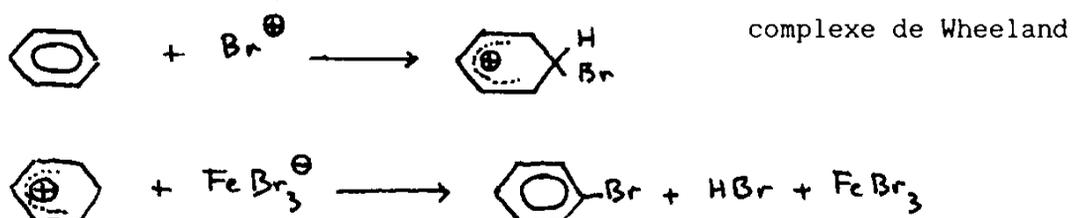
- phase liquide; le benzène sert de solvant;
- à froid;
- obligatoirement un catalyseur, par exemple:
  - Fe pour la bromation;
  - I<sub>2</sub> pour la chloration.

b-Mécanisme de la réaction:

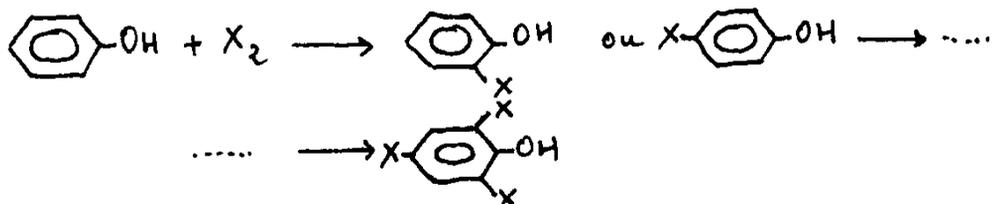
-formation d'une espèce électrophile entre l'halogène et le catalyseur; par exemple pour la bromation:



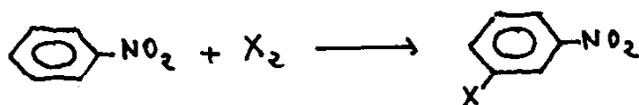
-attaque du benzène par l'électrophyle formé:



V-3-Action sur le phénol: les halogénations du phénol sont plus rapides que celles du benzène; le système évolue rapidement vers le trihalogéné; d'autre part le groupement fonctionnel du phénol (-OH) oriente les substitutions en ortho et para.

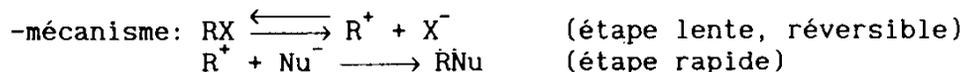


Action sur le nitrobenzène: dans ce cas les halogénations sont plus difficiles (plus lentes) qu'avec le benzène; l'orientation se fait en position méta.



V-4-a-Quelques nucléophiles ioniques:  $OH^-$ ,  $I^-$ ,  $CN^-$ ;  
moléculaires:  $H_2O$ ,  $NH_3$ , amines.....

b-Etude d'une réaction SN1:

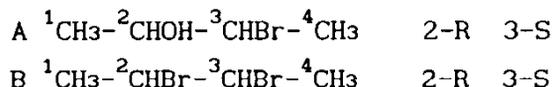


- réaction d'ordre 1 en RX; d'ordre 0 en Nu;
- réaction amenant une racémisation (le carbocation est plan);
- réaction plus facile avec les R tertiaires, car le cation est stabilisé;
- le rôle des halogènes dépend des caractéristiques du solvant.

c-Etude d'une réaction SN2:

- mécanisme: c'est une réaction élémentaire (bimoléculaire);
- réaction d'ordre 2 (1 par rapport à RX, 1 par rapport à Nu);
- réaction stéréospécifique (inversion de Walden);
- réaction plus rapide avec les R primaires (moindre gêne stérique).

V-5-a-Configuration des carbones:



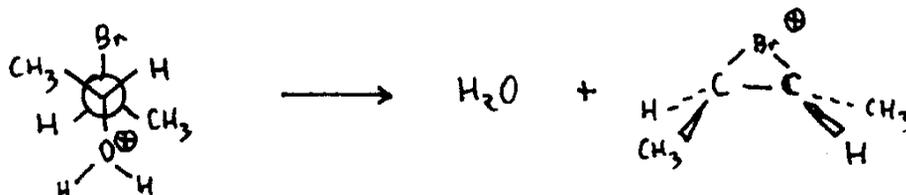
b-A est actif; B est inactif (forme méso, plan de symétrie).

c-Si la réaction était une SN1: on obtiendrait un mélange de deux stéréoisomères 2-R,3-S et 2-R,3-R grâce à l'intermédiaire carbocation plan.

Si la réaction était une SN2: l'inversion de Walden conduirait à un seul stéréoisomère 2-R,3-R (ce n'est pas B).

Conclusion: aucun de ces mécanismes ne convient.

d-Protonation de l'alcool puis formation du cation bromonium ( $H_2O$  est un bon nucléofuge contrairement à  $OH^-$ )



Ensuite l'attaque de  $Br^-$  se fait en anti et l'on obtient B.

e-En partant de l'énantiomère de A, on obtient le même B par le mécanisme précédent; l'ion bromonium est le même.

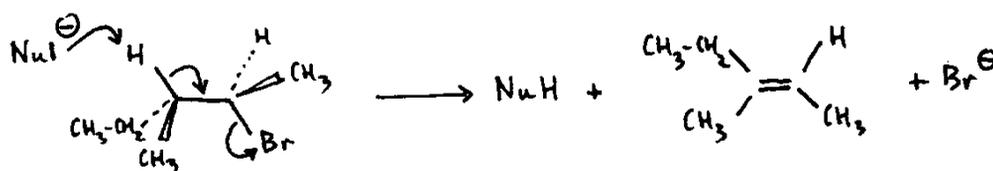
V-6-a-Les conditions pour favoriser une élimination E2 par rapport à la  $SN_2$  sont:

- utilisation d'une base plus forte:  $EtO^-$  mieux que  $OH^-$ ;
- utilitation d'un solvant moins polaire:  $EtOH$  mieux que  $H_2O$ .

b-Règle de Zaitsev: l'hydrogène éliminé est celui qui est porté par le carbone le plus substitué

Le 2-bromo butane donne le butane 2-ène.

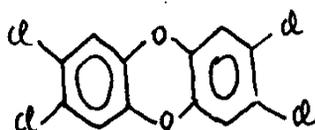
c-Il s'agit d'une antiélimination soit dans ce cas:



V-7-a-La saponification du monochlorobenzène est très difficile; il faut opérer à température assez élevée, faire, par exemple, une fusion alcaline.

La différence vient du fait que les intermédiaires de réaction ont perdu le caractère aromatique; ils sont donc très difficiles à former.

b-L'énoncé se termine comme une énigme; On doit se souvenir de la catastrophe survenue le 10-7-76 à l'usine d'ICMESA à Séveso. Un réacteur réalisant l'hydrolyse alcaline du 2,4,5-trichloro phénol étant mal réglé laissa échapper la dioxine.



Pour plus de détails, voir le BUP n° 654 (mai 83).

\* \* \* \* \*

# C.A.P.E.S.

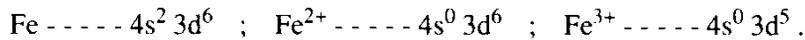
## (Concours Externe) COMPOSITION DE CHIMIE

Épreuve commune aux options - Session : 1990

par Odile DURUPHTY

### A. CHIMIE MINÉRALE ET GÉNÉRALE : LE FER

#### A.1. Structure électronique

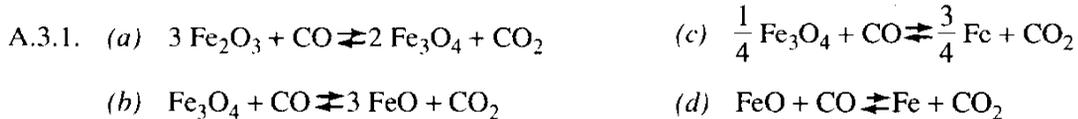


#### A.2. Variétés allotropiques du fer

A.2.1. Deux schémas cc et cfc.

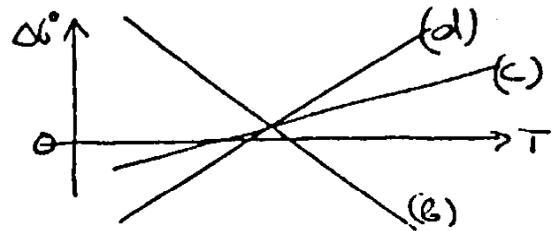
$$\text{A.2.2. } \rho_{\alpha} = \frac{2 M}{N a^3} = 7600 \text{ kg/m}^3 \quad \rho_{\gamma} = \frac{4 M}{N a^3} = 7630 \text{ kg/m}^3 .$$

#### A.3. Réduction des oxydes de fer - Sidérurgie



A.3.2.  $\forall T \quad \Delta_a G^\circ \ll 0 \quad K \gg 1 \quad (a)$  quasi totale dans le sens réduction de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ .

A.3.3. (l'échelle doit être respectée et pas plus de 3 points calculés par droite).



A.3.4. a. concurrentes à  $T = 835 \text{ K} \Rightarrow (\Delta G^\circ = 1630 \text{ J/mol})$



$$\begin{array}{ccccccc} \text{c. } v & = & 5 & - & 2 & + & 2 & - & 4 & = & 1 & \text{ou} & v_{\text{réduite}} = 0 \\ & & (\text{Fe, FeO} & & (2 \text{ équil.} & & (T, P) & & (1 \text{ gaz} & & & & \text{car } \Delta v_{\text{gaz}} = \\ & & \text{Fe}_3\text{O}_4, \text{CO} & & \text{indép.)} & & & & 3 \text{ solides)} & & & & 0 \\ & & \text{CO}_2) & & & & & & & & & & \end{array}$$

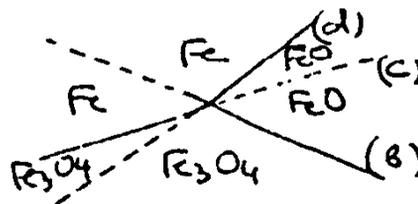
$\forall P$  la coexistence des 5 corps n'est possible qu'à 835 K.

A.3.5.  $\mathcal{A}_i = -\Delta_i G^\circ(T) + RT \ln \frac{P_{CO}}{P_{CO_2}} = -\Delta_i G^\circ(T) + y.$

A.3.6. A  $T_{fixée}$  si M au-dessus d'une droite,  $\mathcal{A}_i > 0$ , la réaction se fait dans le sens de la réduction  
 $Fe_3O_4 \rightarrow FeO$  ou  $Fe$

$FeO \rightarrow Fe$

d'où les espèces



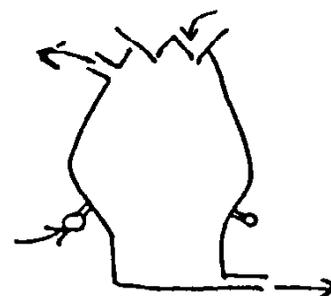
A.3.7. A 1000 K  $K_{(b)} = \exp\left(-\frac{\Delta_b G^\circ}{1000 R}\right) \approx 2.$

A.3.8. Aux ouvrages  $C + O_2 \rightarrow CO$  et  $CO_2$

ailleurs  $C + CO_2 \rightleftharpoons 2 CO$

entrées minerai ; C ; fondant au geulard  
 $O_2$  (air) aux ouvrages

sorties gaz  $CO, CO_2, (N_2)$  en haut (vers les coopers)  
 fonte, laitier en bas



A.3.9.  $15 \cdot 10^6$  t.

#### A.4. Le fer et ses ions $Fe^{2+}$ et $Fe^{3+}$

A.4.1. a. 2 précipités par exemple  $Fe(OH)_2$  et  $Fe(OH)_3$ .

b. 2 complexes tels  $Fe(phen)_3^{2+}$  et  $FeSCN^{2+}$ .

c. 2 redox par exemple  $Fe^{2+}$  par  $MnO_4^-$  et  $Fe^{3+}$  par  $I^-$ .

A.4.2.  $\left[Fe(H_2O)_6\right]^{3+} / \left[Fe(H_2O)_5OH\right]^{2+}$   $pK_a \approx 3$  acidité de l'ion  $Fe(H_2O)_6^{3+}$ .

A.4.3. a.  $Cr_2O_7^{2-} + 3 H_2C_2O_4 + 8 H_3O^+ \rightarrow 2 Cr^{3+} + 6 CO_2 + 15 H_2O$

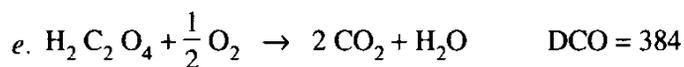
$Cr_2O_7^{2-} + 6 Fe^{2+} + 14 H_3O^+ \rightarrow 2 Cr^{3+} + 6 Fe^{3+} + 21 H_2O.$

b. Orthophénantroline (car  $E^\circ Fe(phen)_3^{3+} / Fe(phen)_3^{2+} = 1,06 V$ ) ou tout couple Ox/Red à espèces colorées de  $E^\circ$  adapté.  
 bleu pâle rouge

c. Fiole jaugée (éventuellement pipette jaugée pour  $V_2$ ).

d.  $6 C_{Cr_2O_7^{2-}} \cdot V_2 = 2 C_{H_2C_2O_4} \cdot V_1 + C_{Fe^{2+}} \cdot V_3.$

$[H_2C_2O_4] = 0,024 \text{ mol/l.}$



### A.5. Le fer et ses dérivés en catalyse

A.5.1. Synthèse  $\text{NH}_3$ .

A.5.2. Deux réactions redox rapides à la place d'une lente.

A.5.3. a.  $2\text{Fe} + 3\text{Br}_2 \rightarrow 2\text{FeBr}_3$  acide de Lewis  $\square\text{FeBr}_3$ .

b.  $\text{CH}_3 - \text{C}_6\text{H}_5 + \text{Br}_2 \rightarrow \text{HBr} + \text{CH}_3 - \text{C}_6\text{H}_4\text{Br}$  (en ortho ou en para).

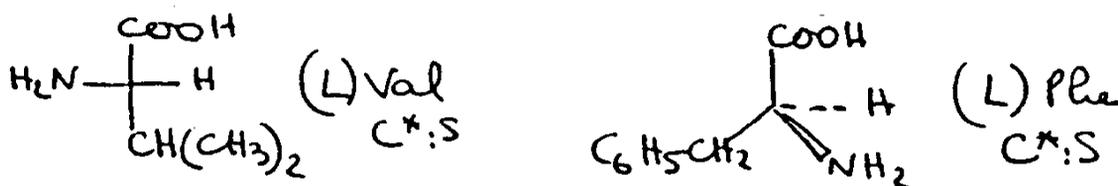
c. Mécanisme  $\text{CH}_3 - \text{C}_6\text{H}_5 \rightarrow |\text{Br}^-| \leftarrow |\text{Br}^-| \rightarrow \square\text{FeBr}_3$  (concerté ou non ; intermédiaire Wheland).

## B. CHIMIE ORGANIQUE

### B.1. Acides $\alpha$ -aminés

B.1.1. "Essentiel" = non synthétisé par l'organisme  $\Rightarrow$  doit être apporté par l'alimentation.

B.1.2.



B.1.3. Rotation du plan de polarisation d'une lumière déjà polarisée (dextrogyre  $\curvearrowright$  pour l'observateur ; lévogyre  $\curvearrowleft$ ).

B.1.4. Blocage  $-\text{NH}_2$  de Val  
"  $-\text{COOH}$  de Phe

activation de  $-\text{COOH}$  de Val  
formation de la liaison peptidique  
déblocages.

### B.2. Chimie organique industrielle

B.2.1. a. Gaz naturel :  $\text{CH}_4$  ( $\text{H}_2\text{S}$  ;  $\text{CO}_2$  ,  $\text{C}_2\text{H}_6$  ...).

b. Pétrole :  $\text{C}_x\text{H}_y$  (saturé cycliques ou non, aromatiques) + composés contenant S, O, N.

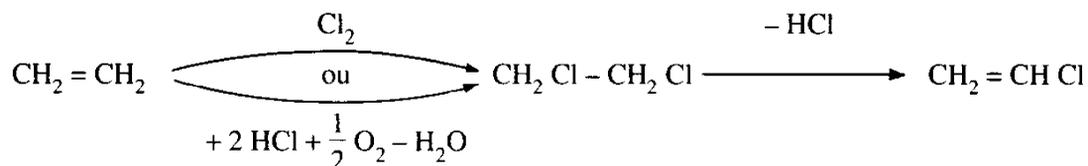
B.2.2. Première distillation du brut et usages divers  $\Rightarrow$ 

{	gaz GPL
	essences (légères, lourdes, naphta)
	hérozène
	gazole
	résidu $\curvearrowright$ vers deuxième distillation.

B.2.3. Vapocraquage = craquage thermique avec deshydrogenations  
 produits : 50 % C<sub>2</sub>H<sub>4</sub> ; C<sub>3</sub>H<sub>6</sub> ; C<sub>4</sub>H<sub>8</sub>    20 % CH<sub>4</sub> ; H<sub>2</sub>

rôle H<sub>2</sub>O  $\left\{ \begin{array}{l} \text{fluide caloporteur} \\ \text{diluant} \\ \text{anti dépôt de C (C + H}_2\text{O} \rightarrow \text{CO + H}_2\text{)}. \end{array} \right.$

B.2.4.



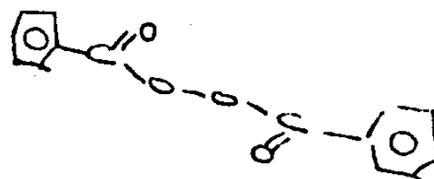
### B.3. Synthèse

B.3.1. a. H<sub>2</sub>C = CH - CH<sub>2</sub> - CH<sub>3</sub> ; CH<sub>3</sub> - CH = CH - CH<sub>3</sub> ;  $\begin{array}{l} \text{CH}_3 \\ \diagdown \\ \text{C} = \text{CH}_2 \\ \diagup \\ \text{CH}_3 \end{array}$   
 Z et E

b. Addition électrophile ou radicalaire.

c. B = dérivé monohalozéné d'alcane

initiation réaction radicalaire - effet Karash  
 solvant non polaire.

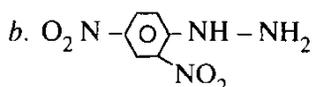


B.3.2. a. C = organo magnésien.

b. H<sub>2</sub>O détruit les magnésiens.

c. Étheroxyde : base de Lewis vis-à-vis de  $\overline{\text{Mg}}$  - acide de Lewis.

B.3.3. a. D = alcool secondaire                      E = cétone.



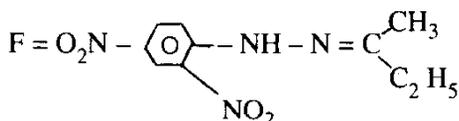
B.3.4. G alcool tertiaire.

B.3.5. E = butanone                      D = butanol -2

G = méthyl -3 heptanol -3

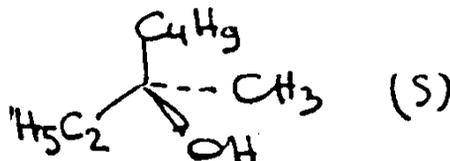
C = bromure de butyl magnésium

B = bromo -1 butane                      A = butène -1



B.3.6. Mécanisme : passage par C<sup>+</sup> (2<sup>aires</sup> + stable).

B.3.7. (S)            chiral - pouvoir rotatoire.



## Agrégation

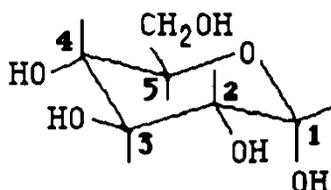
### OPTION CHIMIE

Épreuve C : Composition de Chimie - Session de 1990

par I. RICO, R. BEN AIM, J.F. LE MARECHAL, F. MASSIAS, J.C. MORLAES

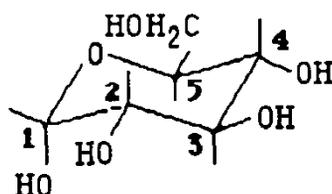
## I. LES CYCLODEXTRINES : STRUCTURE, COMPOSES D'INCLUSION ET CATALYSE

### I.1.



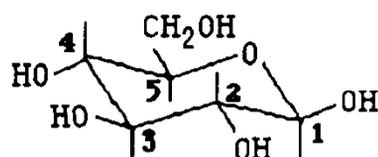
$\alpha$ -D-glucopyranose

**I.1.a.** L'énantiomère de l' $\alpha$ -D-glucopyranose est l' $\alpha$ -L-glucopyranose dont on obtient la structure par symétrie par rapport à un plan (image dans un miroir) ; tous les carbones asymétriques changent de configuration :



$\alpha$ -L-glucopyranose

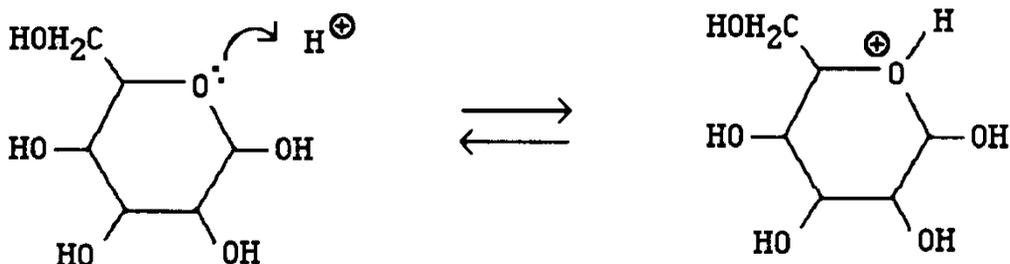
**I.1.b.** L'anomère de l' $\alpha$ -D-glucopyranose est le  $\beta$ -D-glucopyranose, qui ne diffère de l' $\alpha$ -D-glucopyranose que par la configuration du carbone 1 :



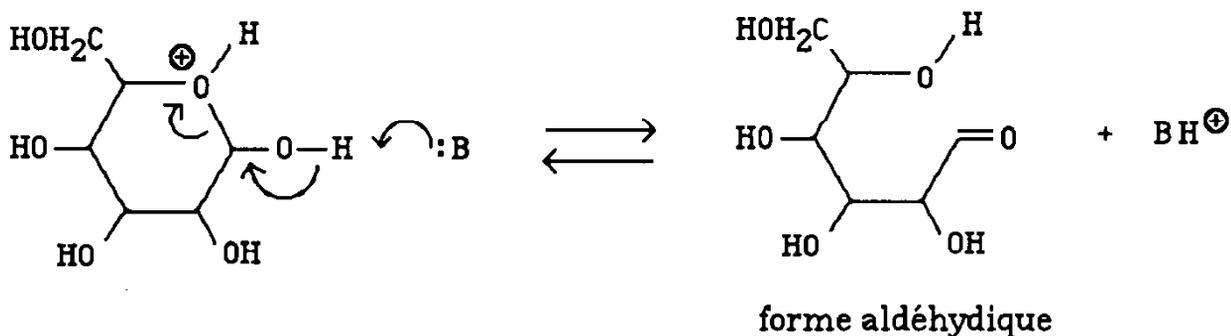
$\beta$ -D-glucopyranose

**I.1.c.** Par définition, tout stéréoisomère de l' $\alpha$ -D-glucopyranose différent de l' $\alpha$ -L-glucopyranose est un diastéréoisomère de l' $\alpha$ -D-glucopyranose. Pour obtenir la structure d'un diastéréoisomère quelconque, il suffit de changer la configuration d'au moins un et au plus 4 carbones asymétriques (sur les 5). On peut noter que l'anomère (I.1.b.) est un diastéréoisomère particulier.

**I.2.a.** La mutarotation fait intervenir une ouverture réversible de la forme cyclique conduisant à la forme aldéhydique, avec une catalyse acide et basique :



forme glucopyranose  $\alpha$  ou  $\beta$



forme aldéhydique

Pour la mettre en évidence, il suffit de partir de l'une des formes  $\alpha$  ou  $\beta$  et de suivre l'évolution du pouvoir rotatoire.

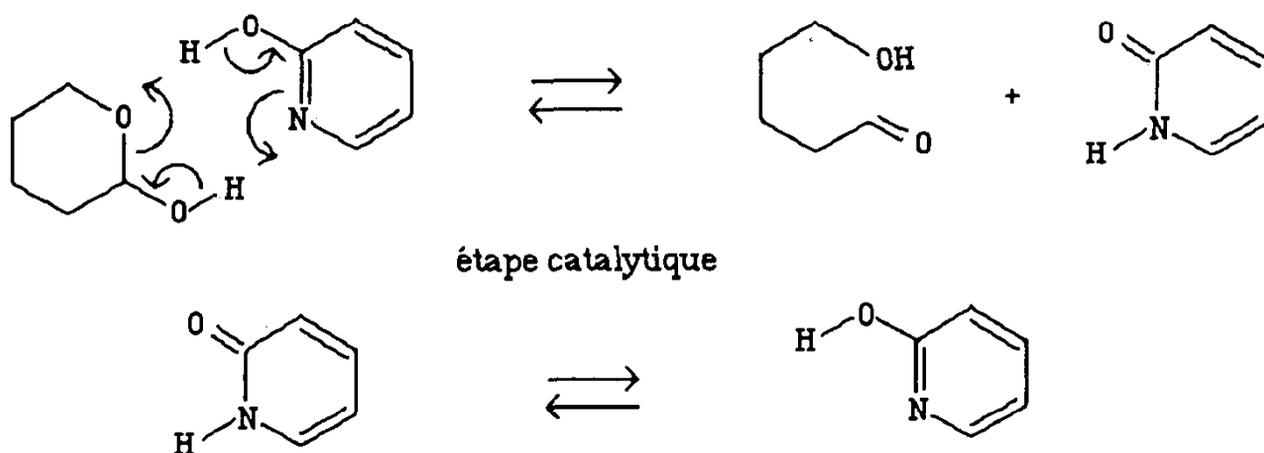
**I.2.b.** Si on note  $x$  la fraction de forme  $\alpha$ , on a, en négligeant la forme aldéhydique du glucose :

$$112x + 18,7(1 - x) = 52,5 \Rightarrow x = 0,36.$$

On a donc, à l'équilibre : 36% de forme  $\alpha$  et 64% de forme  $\beta$ .

Pour justifier la prépondérance de la forme  $\beta$ , on peut invoquer sa plus grande stabilité ; en effet, tous les substituants de la forme  $\beta$  sont équatoriaux, alors que dans la forme  $\alpha$  le groupe OH porté par  $C_1$  est axial. Le problème est en réalité plus complexe : dans le cas du mannopyranose, par exemple, la forme  $\alpha$  (OH axial) est plus stable que la forme  $\beta$  (OH équatorial).

**I.2.c.** La 2-hydroxypyridine est un catalyseur bifonctionnel : la même molécule réalise à la fois la catalyse acide et la catalyse basique. Sa structure permet un transfert concerté de protons, cinétiquement favorable du point de vue entropique et surtout du fait que l'étape limitante ne met en jeu que des déplacements électroniques. A l'issue de l'étape catalytique, la 2-hydroxypyridine se trouve sous une forme tautomère qui se réarrange, ce qui justifie le nom de catalyseur tautomère.



**I.3.a.** La loi de Beer-Lambert permet d'obtenir une expression de  $\Delta A$  :

$$A = (\epsilon_C [C] + \epsilon_S [S] + \epsilon_{CS} [CS]).l \quad ; \quad A_o = (\epsilon_C [C]_o + \epsilon_S [S]_o).l$$

$$\Rightarrow \Delta A = (\epsilon_C ([C] - [C]_o) + \epsilon_S ([S] - [S]_o) + \epsilon_{CS} [CS]).l$$

Par ailleurs, la stoechiométrie de la réaction conduit à :

$$[C] - [C]_o = [S] - [S]_o = -[CS]$$

On en déduit :

$$\Delta A = \Delta\epsilon.l.[CS] \quad \text{avec} \quad \Delta\epsilon = \epsilon_{CS} - \epsilon_S - \epsilon_C \quad \Rightarrow \quad [CS] = \frac{\Delta A}{l.\Delta\epsilon}$$

La loi d'action de masse s'écrit :

$$K_d = \frac{[C][S]}{[CS]} = \frac{([C]_o - [CS])([S]_o - [CS])}{[CS]} \quad \Rightarrow \quad K_d = \frac{\left([C]_o - \frac{\Delta A}{l.\Delta\epsilon}\right)\left([S]_o - \frac{\Delta A}{l.\Delta\epsilon}\right)}{\frac{\Delta A}{l.\Delta\epsilon}}$$

**I.3.b.** En développant l'expression précédente, on obtient :

$$K_d = \frac{[C]_o[S]_o - \frac{\Delta A}{l.\Delta\epsilon} ([C]_o + [S]_o) + \left(\frac{\Delta A}{l.\Delta\epsilon}\right)^2}{\frac{\Delta A}{l.\Delta\epsilon}}$$

$[CS] \ll [S]_o$  et  $[C]_o \Rightarrow$  on peut négliger le terme  $\left(\frac{\Delta A}{l.\Delta\epsilon}\right)^2$  devant  $[C]_o[S]_o$ .

L'expression simplifiée de  $K_d$  conduit alors à :

$$\frac{[C]_o [S]_o}{\Delta A} = \frac{K_d}{1. \Delta \epsilon} + \frac{[C]_o + [S]_o}{1. \Delta \epsilon}$$

Le graphe est bien une droite, de pente :  $1/1. \Delta \epsilon$  et d'abscisse à l'origine :  $-K_d$ .

**I.3.c.** On obtient :  
 - pour l'acétate de m-chlorophényle :  $K_d = 4.10^{-3}$  ;  
 - pour l'acétate de p-chlorophényle :  $K_d = 1,1.10^{-2}$  .

**I.3.d.** On a :  $\Delta_r G^\circ = -RT \ln K_d \Rightarrow \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ = -RT \ln K_d$ .

Si on néglige la variation de capacité calorifique à pression constante au cours de la réaction (approximation d'Ellingham),  $\Delta_r H^\circ$  et  $\Delta_r S^\circ$  sont indépendants de T et le graphe de  $RT \ln K_d$  en fonction de T est une droite, d'ordonnée à l'origine  $\Delta_r H^\circ$  et de pente  $\Delta_r S^\circ$ .

Pour le substrat acétate de m-éthylphényle, on obtient ainsi :

$$\Delta_r H^\circ = +22,3 \text{ kJ.mol}^{-1} ; \Delta_r S^\circ = +23,8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.$$

**I.4.a.** La vitesse totale de réaction est la somme des vitesses de réaction à l'intérieur et à l'extérieur de la cyclodextrine :  $v = k_c [CS] + k_o [S]$ . D'autre part, on observe expérimentalement :  $v = k [S]_t = k ([S] + [CS])$ . On en déduit :

$$k ([S] + [CS]) = k_c [CS] + k_o [S] \Rightarrow k = \frac{k_o + k_c \frac{[CS]}{[S]}}{1 + \frac{[CS]}{[S]}}$$

Par ailleurs, la conservation globale de C s'écrit :  $[C]_o = [C] + [CS]$  ; l'hypothèse  $[C] \gg [S]_t$  implique  $[C] \gg [CS]$  et on a :  $[C] \approx [C]_o$ .

$$\text{De plus : } K_d = \frac{[C][S]}{[CS]} \Rightarrow \frac{[CS]}{[S]} = \frac{[C]}{K_d} \approx \frac{[C]_o}{K_d} .$$

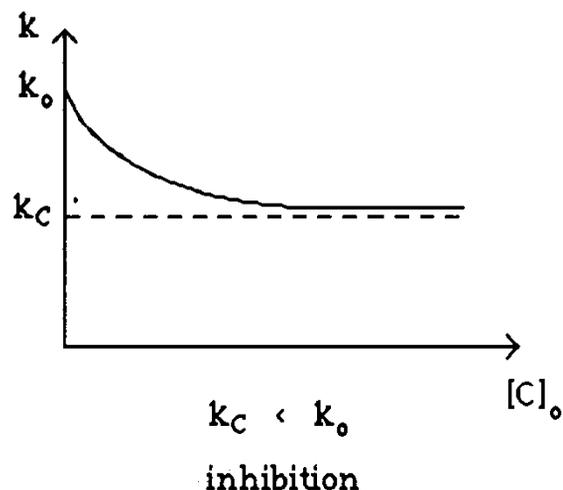
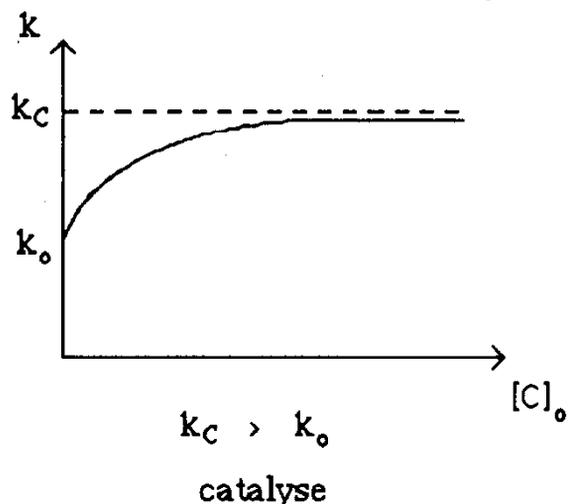
$$\text{On en déduit l'expression de } k : k = \frac{k_o + \frac{k_c}{K_d} [C]_o}{1 + \frac{1}{K_d} [C]_o}$$

$$\text{qui se met aussi sous la forme : } k = k_o + \frac{k_c - k_o}{1 + \frac{[C]_o}{K_d}}$$

On vérifie que :  
 - pour  $[C] = 0$  :  $k = k_o$  (c'est normal, il n'y a pas de cyclodextrine) ;

- pour  $[C] \rightarrow \infty$  ,  $k \rightarrow k_c$  (ce cas limite correspond en pratique à  $[C] \gg K_d$ , c'est à dire au cas où tout le substrat se trouve pratiquement sous forme complexée CS).

Selon les valeurs relatives de  $k_o$  et  $k_c$ , on a catalyse ou inhibition :



Dans le cas où  $k_c > k_o$ , il y a analogie avec la catalyse enzymatique ; l'expression de  $k$  a la forme de l'équation de Michaelis-Menten. Cependant, les rôles sont inversés : en catalyse enzymatique, le substrat est en large excès par rapport à l'enzyme ; ici, c'est la cyclodextrine qui est en large excès par rapport au substrat.

I.4.b. L'expression de  $k$  permet d'obtenir la relation :

$$\frac{1}{k - k_o} = \frac{1}{k_c - k_o} + \frac{K_d}{k_c - k_o} \frac{1}{[C]_o}$$

en accord avec le graphe expérimental.

L'ordonnée à l'origine est :  $\frac{1}{k_c - k_o} \Rightarrow k_c - k_o = 5,9 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

L'abscisse à l'origine est :  $-\frac{1}{K_d} \Rightarrow K_d = 5,8 \cdot 10^{-3}$

I.4.c.

L'expression de  $k$  (I.4.a) conduit à :  $k_c = k_o + (k - k_o) \left(1 + \frac{K_d}{[C]_o}\right)$

d'où les valeurs numériques suivantes :

acétate de	$k_c \text{ (s}^{-1}\text{)}$	$k_c/k_o$
phényle	$2,35 \cdot 10^{-2}$	29,2
m-chloro	$3,17 \cdot 10^{-1}$	166,1
p-chloro	$9,35 \cdot 10^{-3}$	6,15
m-tolyle	$7,17 \cdot 10^{-2}$	103,0
p-tolyle	$3,20 \cdot 10^{-3}$	4,81

Un substituant en méta favorise la réaction dans la cyclodextrine, un substituant en para la défavorise.

$$\text{I.5.a. De même qu'en I.4.a. on a : } v = k ([S] + [CS]) = k_c [CS] + k_o [S] \quad (1)$$

La conservation de C s'écrit maintenant :  $[C]_0 = [C] + [CS] + [CI]$ , soit en tenant compte de l'hypothèse  $[C] \gg [CS]$  :  $[C] \approx [C]_0 + [CI]$  (2)

Enfin, l'hypothèse de quasi-équilibre appliqué à la formation de CS et de CI permet d'écrire :

$$K_d = \frac{[C][S]}{[CS]} \quad (3) \quad \text{et} \quad K_i = \frac{[C][S]}{[CI]} \quad (4)$$

Des équations (1) et (4), on tire :

$$[I] = K_i \left( \frac{[C]_0}{[C]} - 1 \right) \quad (5)$$

Des équations (3) et (4) on tire :

$$\frac{1}{[C]} = \frac{1}{K_d} \frac{k_c - k}{k - k_o} \quad (6)$$

En regroupant (5) et (6), on obtient finalement :

$$[I] = \frac{K_i}{K_d} \frac{k_c - k}{k - k_o} [C]_0 - K_i$$

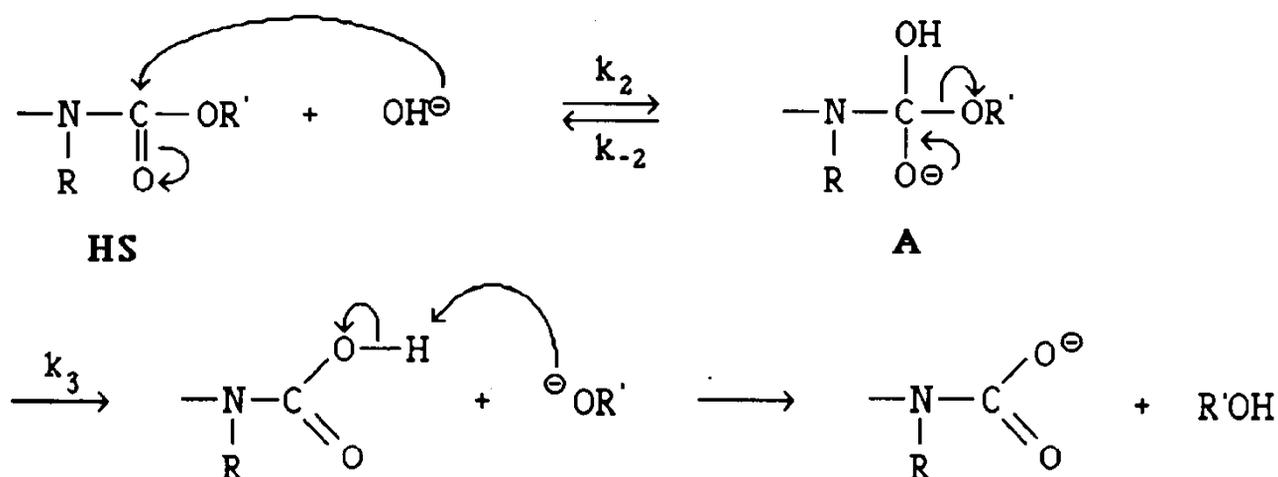
**I.5.b.** Le graphique corrobore l'expression obtenue en I.5.a. . L'ordonnée à l'origine est  $K_i$  ; l'abscisse à l'origine :  $K_d/[C]_0$ . On en déduit :

$$K_i = 5,0 \cdot 10^{-3} \quad ; \quad K_d = 1,9 \cdot 10^{-2}$$

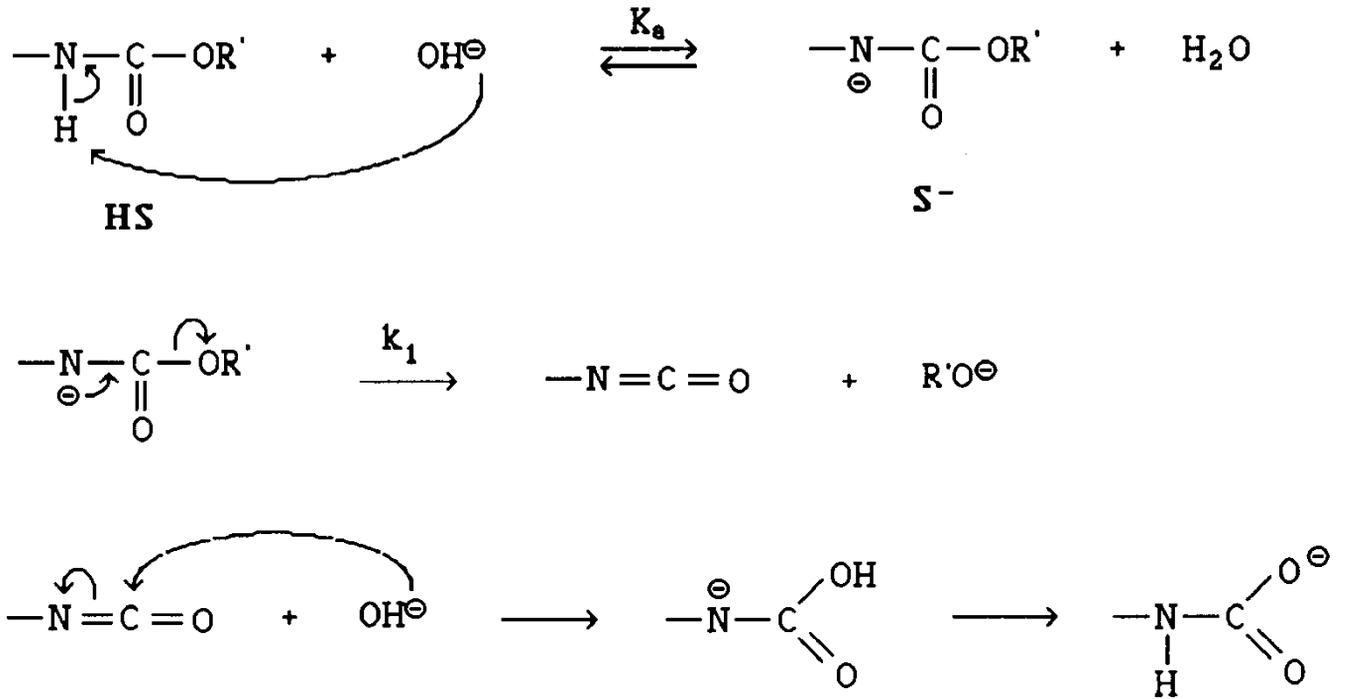
## II. HYDROLYSE BASIQUE DES CARBAMATES

### II.1.a.

#### Mécanisme B<sub>AC</sub>2



Mécanisme E1CB



**II.1.b.**

Mécanisme BAC2 :  $v = k_3 [A]$ .

On applique à l'intermédiaire réactionnel A, formé lentement et consommé rapidement, l'hypothèse de l'état quasi-stationnaire (Bodenstein) :

$$k_2 [\text{HS}][\text{OH}^-] = (k_{-2} + k_3)[A] \Rightarrow [A] = \frac{k_2}{k_{-2} + k_3} [\text{HS}][\text{OH}^-] \approx \frac{k_2}{k_3} [\text{HS}][\text{OH}^-]$$

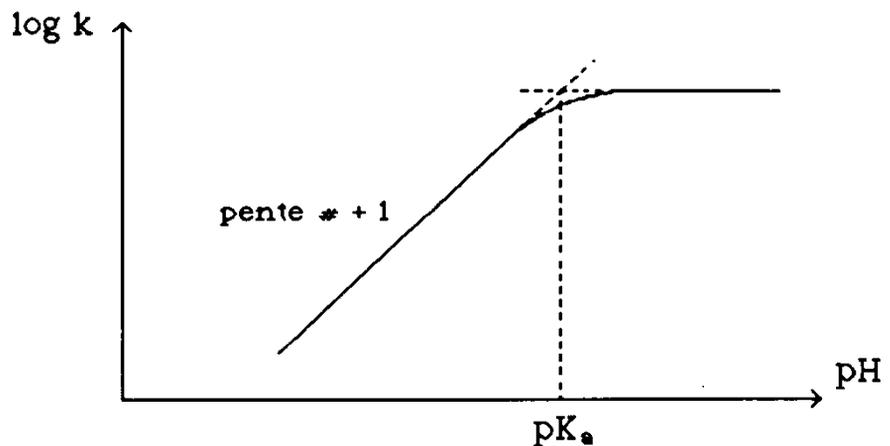
$$\Rightarrow v = k_2 [\text{HS}][\text{OH}^-]$$

On observe donc que la première étape détermine la vitesse, ce qui était prévisible ( $k_3 \gg k_2$ ).

Mécanisme E1CB :  $v = k_1 [S^-]$ . (étape déterminant la vitesse) ; on applique à  $[S^-]$  l'hypothèse de quasi-équilibre :

$$\frac{[S^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HS}]} = K_a \Rightarrow [S^-] = K_a \frac{[\text{HS}]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \Rightarrow v = k_1 \frac{K_a}{K_e} [\text{HS}][\text{OH}^-]$$

**II.1.c.1.**



**II.1.c.2.** Les deux lois de vitesses théoriques se mettent sous la forme :

$$v = k' [\text{HS}][\text{OH}^-]$$

avec  $k' = k_2$  ou  $k' = k_1 \cdot K_a / K_e$  selon que le mécanisme est  $B_{AC2}$  ou  $E1_{CB}$ .  
D'autre part, on obtient expérimentalement :

$$v = k[\text{HS}]_t = k ([\text{HS}] + [\text{S}^-]) = k [\text{HS}] \left( 1 + \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \right)$$

Pour que les deux expressions concordent, on doit avoir :

$$k \left( 1 + \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \right) = k' \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \Rightarrow k = \frac{k' K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+] + K_a}$$

Cette dernière relation est bien en accord avec la courbe expérimentale  $\log k = f(\text{pH})$ .

En effet : - pour  $[\text{H}_3\text{O}^+] \gg K_a$ , on a :

$$k \approx \frac{k' K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \Rightarrow \log k = \text{pH} + \log k' - \text{p}K_e$$

ce qui correspond à une droite de pente + 1 ;

- pour  $[\text{H}_3\text{O}^+] \ll K_a$ , on a :

$$k \approx \frac{k' K_e}{K_a} \Rightarrow \log k = \log k' + \text{p}K_a - \text{p}K_e$$

ce qui correspond à une droite parallèle à l'axe des abscisses.

L'intersection de ces deux droites asymptotes correspond à :  $\text{pH} = \text{p}K_a$ .  
Graphiquement, on obtient ainsi :  $\text{p}K_a = 13,9$ .

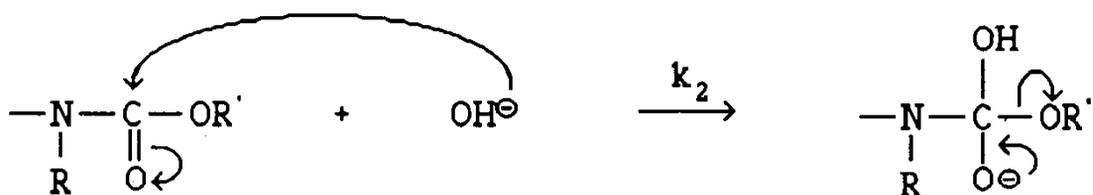
Du fait que, pour les deux mécanismes, les deux lois de vitesse ont la même forme, le graphe ne permet pas de trancher.

**II.1.d.** Dans le cas où  $R = \text{CH}_3$ , on ne peut avoir que le mécanisme  $B_{AC2}$ . On peut donc attribuer les relations de Brönsted :

$$\text{mécanisme } B_{AC2} : \log k_{\text{OH}} = -0,10 \text{ p}K_a' + 1,98$$

$$\text{mécanisme } E1_{CB} : \log k_{\text{OH}} = -1,38 \text{ p}K_a' + 15,05$$

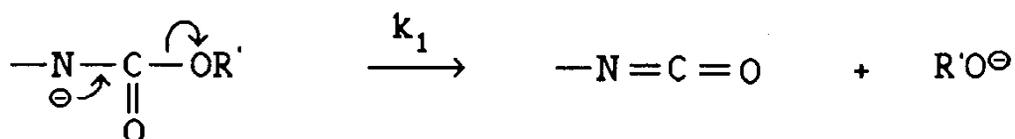
**II.1.e.** Pour le mécanisme  $B_{AC2}$ , l'étape limitante :



correspond à une diminution du nombre de degrés de liberté du système ; on peut penser qu'il en est de même pour le passage du produit de départ à l'état de transition : l'entropie d'activation correspondante doit donc être négative :

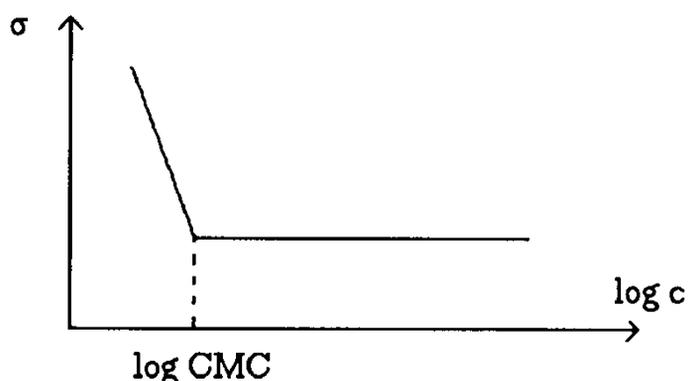
$$\Delta S^\ddagger = 108 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

Pour le mécanisme E1<sub>CB</sub>, au contraire, l'étape limitante correspond à une augmentation du nombre de degrés de liberté :



et l'entropie d'activation est bien positive :  $\Delta S^\ddagger = + 4 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

### II.2.a.



La courbe comporte deux parties :

- pour  $c < \text{CMC}$ , une augmentation de  $c$  traduit une augmentation de la concentration en tensioactif libre et à la surface de la solution d'où la décroissance régulière de  $\sigma$  observée ;

- à partir du moment où la CMC est atteinte, l'augmentation de  $c$  se traduit par la formation de micelles, mais les concentrations en tensioactif libre et à la surface de la solution restent constantes : on observe un palier pour  $\sigma$ .

La CMC correspond à l'intersection des deux portions de la courbe, soit :

$$\text{CMC} \approx 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol.l}^{-1}$$

### II.2.b.

Facteur défavorable à la micellisation :

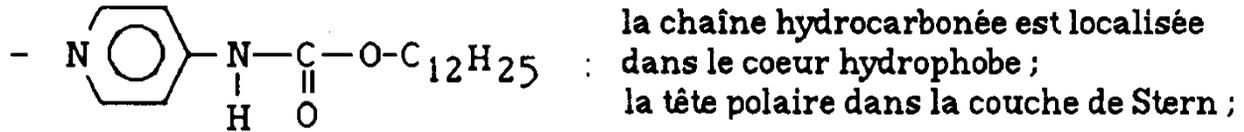
- interactions électrostatiques répulsives entre ions de même signe.

Facteurs favorables :

- interactions dipolaires ;
- interactions hydrophobes.

**II.2.c.1.** La localisation dépend de la nature hydrophobe ou hydrophile des molécules :

- hexane : dans la micelle ;
- hexanoate de méthyle : dans la micelle ;



- OH<sup>-</sup> : dans la phase aqueuse.

**II.2.c.2.** La conservation de la quantité de matière de substrat s'écrit :

$$n_o = n_M + n_{aq}$$

où  $n_o$  représente la quantité de matière totale de S,  $n_M$  et  $n_{aq}$  les quantités de matière respectivement dans les phases micellaire et aqueuse.

En désignant par  $V_o$  le volume total de solution, par  $V_M$  et  $V_{aq}$  les volumes des phases micellaire et aqueuse, cette expression se met sous la forme :

$$[S]_o = [S]_M \frac{V_M}{V_o} + [S]_{aq} \left( 1 - \frac{V_M}{V_o} \right)$$

Par ailleurs, en assimilant  $V_m$ , volume molaire du tensioactif, au volume molaire de la phase micellaire, on a :

$$V_M = n_M V_m = [D] V_o V_m$$

En reportant cette expression de  $V_M$  dans l'équation de conservation en concentrations, on obtient :

$$[S]_o = [D] V_m ([S]_M - [S]_{aq}) + [S]_{aq} \Rightarrow \frac{[S]_o}{[S]_{aq}} = [D] V_m (P_S - 1) + 1$$

On en déduit l'expression de  $K_S$  :  $K_S = V_m (P_S - 1)$ .

**II.2.d.** Dès que la CMC est atteinte, il y a solubilisation du substrat dans les micelles. Dans le cas du CTAB, les ions OH<sup>-</sup> sont attirés vers la couche de Stern par les têtes polaires, chargées positivement, ce qui facilite l'attaque du substrat dissous dans les micelles. Dans le cas du SDS, les ions OH<sup>-</sup> sont au contraire repoussés des micelles par les têtes polaires chargées négativement.

**II.2.e.** La vitesse globale d'hydrolyse est la somme des vitesses d'hydrolyse dans la phase aqueuse et dans la phase micellaire :

$$v = k_{aq} [S]_{aq} + k_M [SD] = k_{aq} [S]_{aq} + k_M K_S [S]_{aq} [D]$$

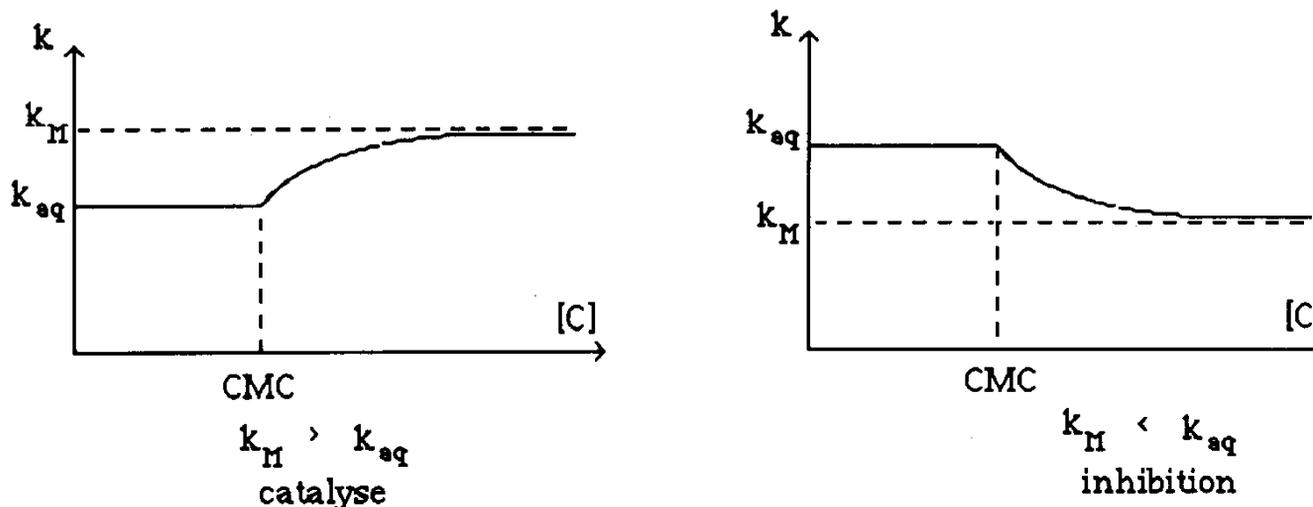
En posant :  $v = k [S]_o = k (1 + K_S [D]) [S]_{aq}$ , il vient :

$$k = \frac{k_{aq} + k_M K_S [D]}{1 + K_S [D]}$$

Lorsque  $[C]$  est inférieure à la CMC, on a :  $[D] = 0 \Rightarrow k = k_{aq}$ .

Pour  $[D] \gg 1/K_S$ , on a :  $k \approx k_M$ .

On aura donc catalyse si  $k_M > k_{aq}$  et inhibition dans le cas contraire.



**II.2.f.1.** Dans le cas du mécanisme bimoléculaire, la vitesse globale d'hydrolyse s'écrit :

$$v = k_{aq} [S]_{aq} [OH^-] + k_M [SD] [OH^-] = (k_{aq} [S]_{aq} + k_M K_S [S]_{aq} [D]) [OH^-]$$

Si on pose :  $v = k [S]_0 [OH^-]$ , on aura la même expression de  $k$  que pour le mécanisme monomoléculaire.

**II.2.f.2.** L'expression de  $k$  (II.2.e.) conduit à la relation :

$$\frac{k_{aq} + k_M K_S [D]}{k} - 1 = K_S [D]$$

Dans l'hypothèse où :  $k_{aq} \gg k_M K_S [D]$ , on obtient :

$$\frac{k_{aq}}{k} - 1 \approx K_S [D]$$

expression en accord avec les graphes expérimentaux. La mesure des pentes des droites permet d'obtenir les valeurs de  $K_S$ . Le pourcentage de substrat incorporé dans les micelles est :

$$x = \frac{[SD]}{[SD] + [S]} = \frac{1}{1 + \frac{[S]}{[SD]}} \quad \text{soit :} \quad x = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_S [D]}}$$

R'	$K_S$	x
phényle	$4,65 \cdot 10^2$	0,32
méthyle	$1,2 \cdot 10^2$	0,11
dodécyle	$4,45 \cdot 10^4$	0,98

Ces résultats montrent que la diminution de vitesse observée peut s'expliquer par une diminution de la concentration du substrat réactif dans la pseudophase aqueuse : la fraction de substrat incorporé dans les micelles est

protégé de l'attaque des ions  $\text{OH}^-$  dans le cas du SDS, d'où sa non-réactivité. Les valeurs expérimentales de  $x$  confirment que ce phénomène inhibiteur est d'autant plus important que le substrat est plus hydrophobe.

### II.2.f.3.

Dans le cas où  $\text{R}' = \text{CH}_3$ , la courbe  $k = f([\text{C}])$  présente une partie ascendante puis une partie descendante.

Ce résultat peut être expliqué à partir du modèle d'échange d'ions de Romsted :

- quand le tensioactif est présent en quantité faible, les concentrations relatives du substrat organique et du réactif ionique dans la couche de Stern augmentent rapidement avec la concentration en tensioactif, d'où une accélération de la réaction (partie ascendante de la courbe).

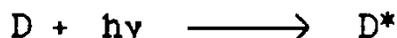
- une fois que tout le substrat est dans la pseudophase micellaire, une augmentation de la concentration en tensioactif produit une augmentation des ions antagonistes non réactifs  $\text{Br}^-$ , qui déplacent les ions  $\text{OH}^-$  liés aux micelles à proximité des molécules de substrat liées : ceci peut expliquer la partie descendante de la courbe aux plus fortes concentrations de tensioactif.

L'augmentation de vitesse observée dans le cas de l'hydrolyse basique du carbamate de dodécyle pour des concentrations en CTAB inférieures à la CMC peut être expliquée par le fait que cette molécule peut elle-même former des micelles et contribuer ainsi à la CMC.

## III. PHOTOAMIDATION DES OLEFINES

III.1.a. Le processus de photosensibilisation permet le passage d'une molécule A de réactif de son état fondamental (singulet) à un état excité (singulet puis triplet)  $\text{A}^*$ , sans absorption directe de photon par A.

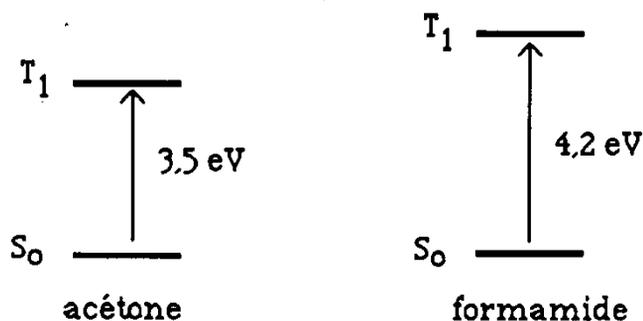
Dans une première étape, un photon est absorbé par une molécule de photosensibilisateur (ou donneur) D qui passe de son état fondamental à un état excité  $\text{D}^*$  :



Dans une deuxième étape,  $\text{D}^*$  se désexcite en cédant son énergie excédentaire à une molécule de A qui passe à son état excité :



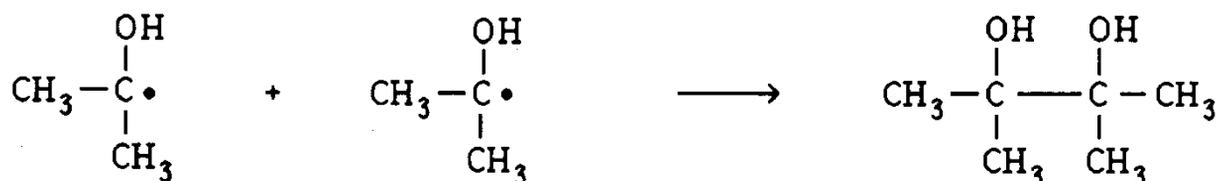
Ce transfert d'énergie est soumis à la règle de Wigner (conservation de la multiplicité de spin totale). De plus, il n'est évidemment possible que si le niveau d'énergie de  $\text{D}^*$  est supérieur au niveau d'énergie de  $\text{A}^*$  ; dans le cas de l'acétone (D) et du formamide (A), cette condition n'est pas remplie :



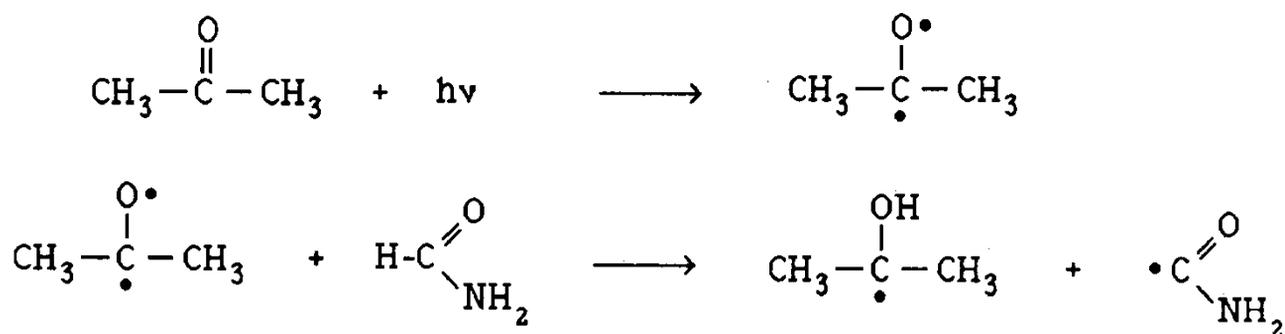
L'acétone ne joue donc pas ici le rôle de photosensibilisateur, mais de photoamorceur.

III.1. b.

La formation de pinacol résulte de la duplication du radical  $\text{CH}_3-\overset{\text{OH}}{\underset{\cdot}{\text{C}}}-\text{CH}_3$  :



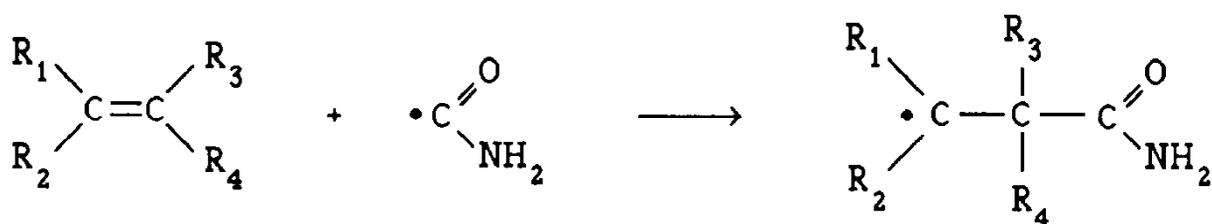
On peut envisager le processus d'amorçage suivant, qui rend compte de la formation de ce radical :



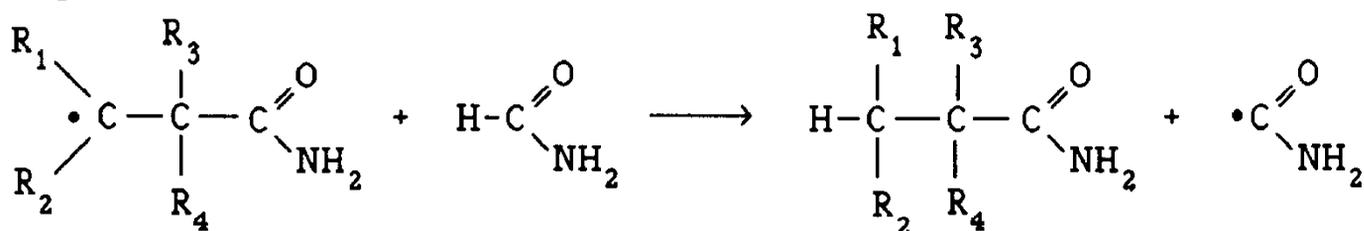
III.2.

Etapes de propagation :

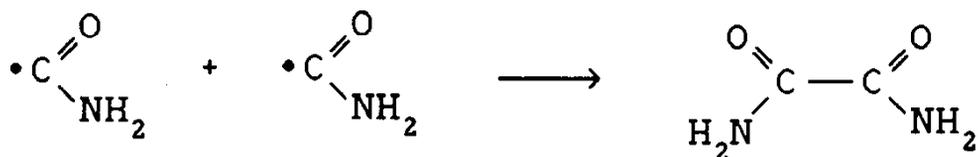
étape 1 :



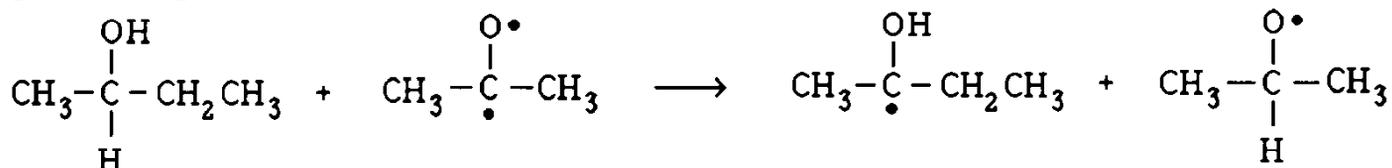
étape 2 :



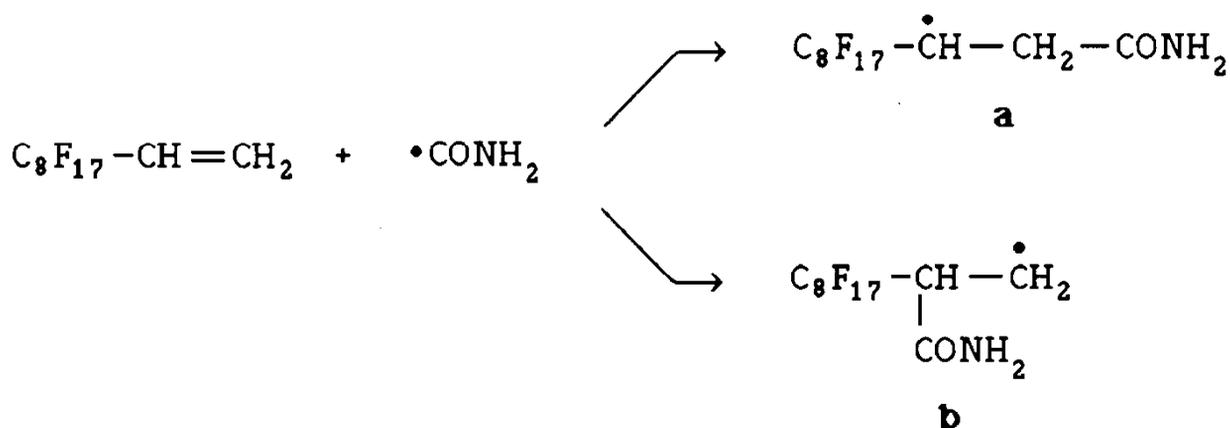
Etape de rupture la plus probable : elle correspond à la recombinaison des radicaux les plus petits et dont la concentration est la plus importante, soit :



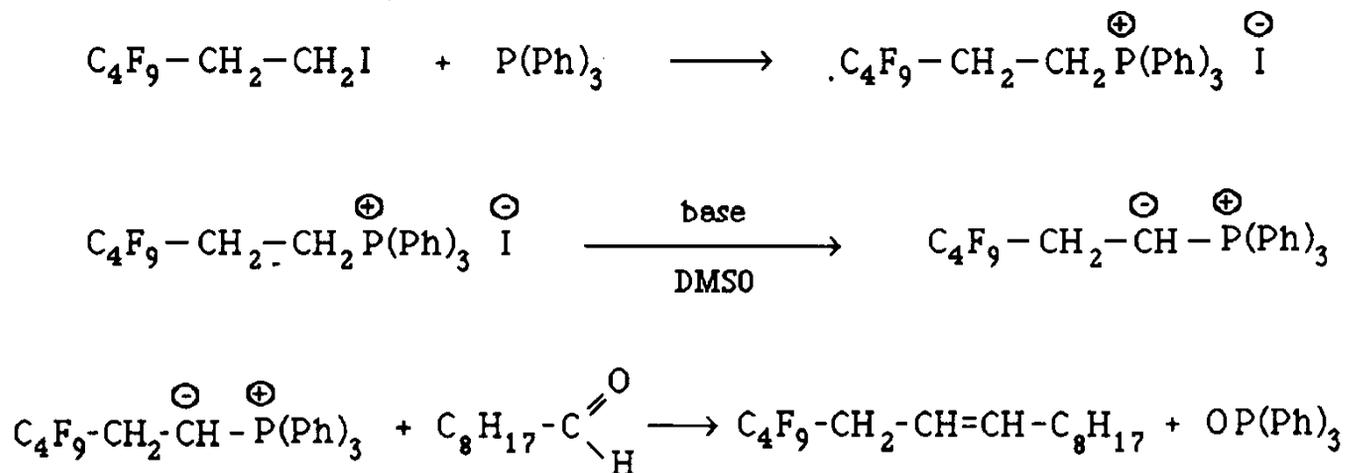
**III.3.** Le tertiobutanol est un cosolvant du formamide et de l'oléfine qui ne sont pas miscibles. Il présente l'avantage d'être transparent dans l'U.V.. De plus, la molécule de tertiobutanol ne possède pas d'atome d'hydrogène susceptible d'être arraché par le photoamorceur ; avec le 2-butanol, par exemple, on pourrait avoir le processus parasite suivant :



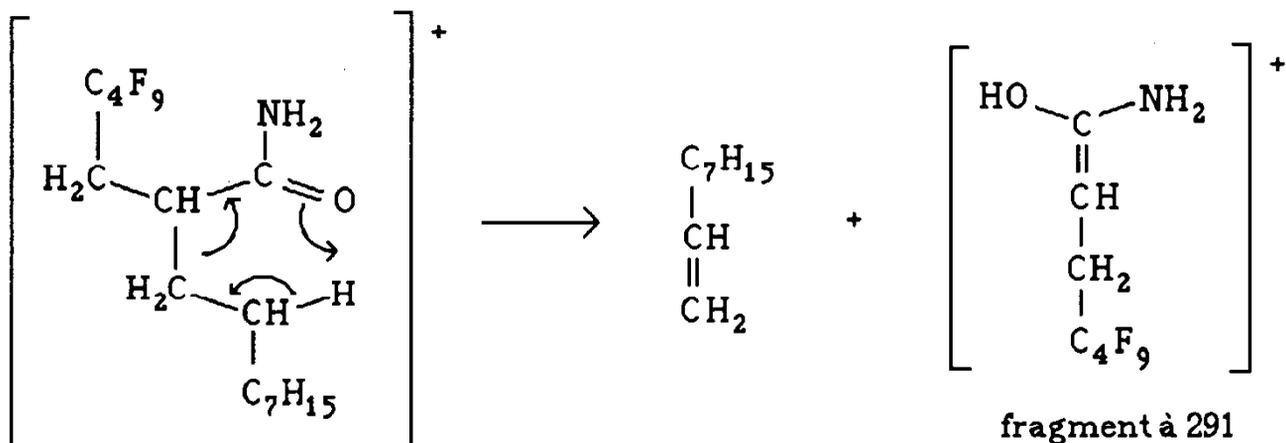
**III.4.** La régiosélectivité est ici essentiellement gouvernée par l'encombrement stérique de la chaîne fluorée qui favorise la fixation du radical carbamoylé sur le carbone portant les hydrogènes. La formation de **a** est plus rapide que celle de **b** :



**III.5.a.** La méthode la plus simple consiste à utiliser la réaction de Wittig. Schématiquement :







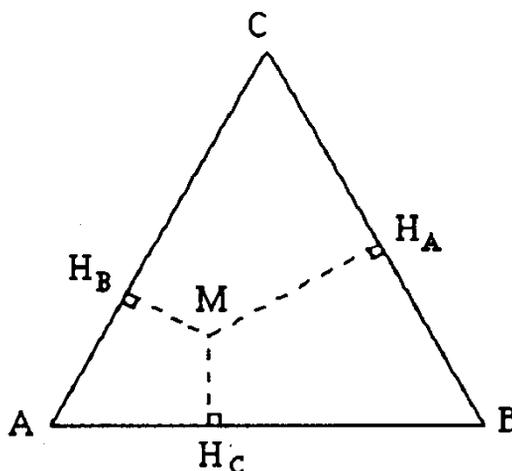
Le mécanisme du réarrangement de Mc Lafferty est parfois décrit à l'aide de flèches à une seule pointe, correspondant à des déplacements monoélectroniques.

**III.6.a.** Un solvant polaire structuré est caractérisé par un moment dipolaire et une constante diélectrique importants (caractère polaire), par une densité d'énergie de cohésion (D.E.C) et une tension superficielle ( $\sigma$ ) élevées (caractère structuré). L'existence de liaisons hydrogène n'est pas indispensable (exemple de la N-méthyl sydnone).

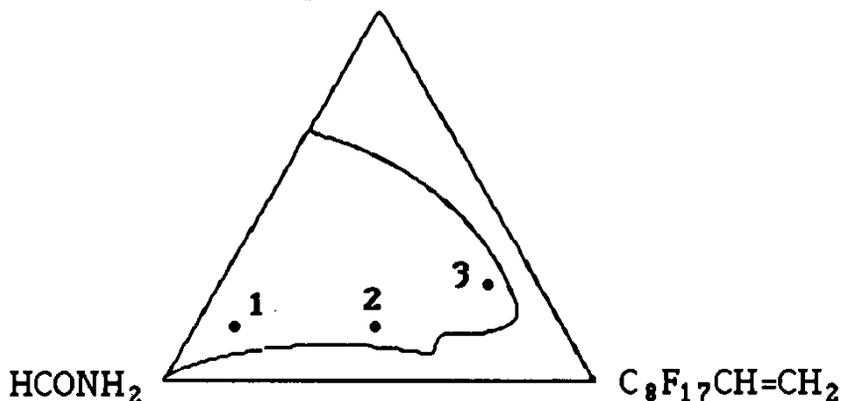
à 25°C	$\epsilon_r$	$\mu$ (debye)	D.E.C ( $J.cm^{-3}$ )	$\sigma$ ( $mN.m^{-1}$ )
eau	78,4	1,5	2302	70
formamide	109,5	3,4	1575	58,5

### III.6.b.

Sur un diagramme ternaire, un point M représente un mélange dont les pourcentages (massiques ou molaires) en A, B et C sont respectivement proportionnels à  $MH_A$ ,  $MH_B$  et  $MH_C$ . La somme  $MH_A + MH_B + MH_C$  est indépendante de la position du point M et égale à la hauteur du triangle.



Dans la figure 10, la hauteur valant 10 cm, le point représentatif du mélange n°1, par exemple, est situé à la distance :  $10\% \times 10 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$  de AC et à la distance :  $78\% \times 10 \text{ cm} = 7,8 \text{ cm}$  de BC.

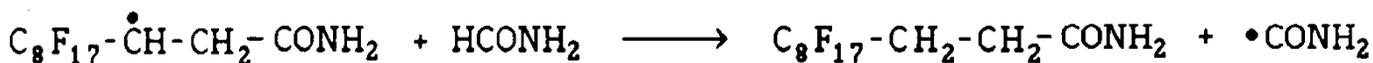


**III.6.c.** Dans les microémulsions 1 et 3, on a des micelles respectivement directes et inverses. Dans la microémulsion 2, on a une structure bicontinue. La photoamidation ne se produit que dans le cas de la structure bicontinue. Ce résultat expérimental peut être interprété à l'aide d'un mécanisme classique de réaction en chaîne :

amorçage :



propagation :



rupture : recombinaison de radicaux, par exemple :



Pour que la réaction puisse avoir lieu avec une vitesse appréciable, il doit exister une surface de contact importante entre le formamide et l'oléfine : ceci est bien réalisé dans le cas de la structure bicontinue, mais non dans celui des micelles.

**ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE****REACTIVITE DANS LES CYCLODEXTRINES :**

- A. K. Colter, S.S.Wang, G.H.Megerle, P. S. Ossip, *J. Am. Chem. Soc.*, **86**, 3106 (1964).
- R. L. Van Etten , J. F. Sebastian, G. A. Clowes, M. L. Bender, *J. Am. Chem. Soc.*, **89**, 3242 (1967).
- M.L. Bender, M.Komiyama : *CYCLODEXTRIN CHEMISTRY*, Springer-Verlag (1978).

**HYDROLYSE DES CARBAMATES EN MILIEU MICELLAIRE**

- H. Matondo, N. Benevides, M. Tissut, M. Bergon, A. de Savignac, J.P. Calmon, A. Lattes : *J. Agric. Food Chem.* **37**, 169 (1989).
- H. Matondo, A. de Savignac, M. Bergon, J.P. Calmon, A. Lattes, *J. Agric. Food Chem.* **38**, 1106 (1990).
- H. Matondo, Synthèse de N-4 pyridylcarbammates à activité herbicide potentielle. Etude cinétique de l'influence des solutions micellaires sur leur hydrolyse ; thèse, université Paul Sabatier de Toulouse (1987).

**REVUES GENERALES SUR LES SOLUTIONS MICELLAIRES :**

- en milieu non aqueux : A.Lattes, I. Rico, *Colloids ans surfaces*, **35**, 221 (1989).
- en milieu aqueux : Y. Chevalier, T. Zemb, *Reports on Prog. Phys.* **53**, 279 (1989).

**MICROEMULSIONS ET DERIVES FLUORES :**

- M.Gautier, I.Rico, A. Lattes, *J. of fluorine chemistry*, **44**, 419 (1989)
- I.Rico, A.Lattes, K.P.Das, B.Lindman, *J. of Am. Chem. Soc.* **111**, 7266 (1989).
- M.Gautier, I.Rico, A. Lattes, *J. org. chem.* **55**, 1500 (1990).

**REVUES GENERALES SUR LES MICROEMULSIONS :**

- en milieu non aqueux : A.Lattes, I. Rico, *Colloids ans surfaces*, **35**, 221 (1989).
- en milieu aqueux : D. Langevin, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **138**, 259 (1986).

# Agrégation

(Concours Interne)

Épreuve Commune : Composition de Physique - Session de 1990

## PREMIÈRE PARTIE

### I. MODÉLISATION

1. L'amplitude complexe de la première onde au point  $\vec{r}$  vaut  $A_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1)}$  avec  $A_1 \in \mathbb{R}^+$  et  $\varphi_1 \in \mathbb{R}$  phase à l'origine ; de façon analogue la deuxième onde est d'amplitude complexe  $A_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2)}$ . L'onde résultante a pour amplitude complexe leur somme, soit  $a$  avec  $a = A_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2)}$ .

L'amplitude réelle vaut  $|a| = (aa^*)^{1/2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2]}$   
 $I(\vec{r}) = \langle (\text{Re } a e^{i\omega t})^2 \rangle$  d'après la définition de l'intensité donnée dans le texte, Re désignant la partie réelle ;  
 soit encore  $I(\vec{r}) = \frac{1}{2} aa^*$  on obtient :  $I(\vec{r}) = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + A_1 A_2 \cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2]$ .

– Les surfaces d'égalité d'intensité sont des plans perpendiculaires à  $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ .

$$I_1(\vec{r}) = \frac{A_1^2}{2} \quad \text{et} \quad I_2(\vec{r}) = \frac{A_2^2}{2}.$$

– On réécrit  $I(\vec{r})$  sous la forme  $I(\vec{r}) = I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2]$ . L'intensité au point courant  $\vec{r}$  n'est pas la somme des intensités des ondes supposées seules mais en diffère par le terme  $2 \sqrt{I_1 I_2} \cos[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + \varphi_1 - \varphi_2]$  qu'on appelle terme d'interférence.

2.

- 2.1. L'onde émise par  $S_1$  est sphérique d'amplitude complexe  $\frac{A}{S_1 P} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} S_1 P}$ , de même pour celle émise par  $S_2$  :  $\frac{A}{S_2 P} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} S_2 P}$ .

L'amplitude complexe de l'onde résultante vaut donc  $\frac{A}{S_2 P} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} S_2 P} + \frac{A}{S_1 P} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} S_1 P}$ .

On en déduit l'intensité résultante au point P :

$$I(P) = \frac{A^2}{2(S_2 P)^2} + \frac{A^2}{2(S_1 P)^2} + \frac{A^2}{(S_1 P)(S_2 P)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(S_2 P - S_1 P)\right].$$

Sur un hyperboloïde de révolution, de foyers  $S_1$  et  $S_2$ , on a  $\delta = S_2 P - S_1 P = \text{constante}$  et loin des sources on peut faire l'approximation :  $\frac{A}{S_1 P} \approx \frac{A}{S_2 P} \approx \mathcal{A} = \text{constante}$ .

$$\text{Alors } I = \mathcal{A}^2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right).$$

Les hyperboloïdes sont des surfaces d'égalité d'intensité.

2.2.a. Soit  $(x, y, O)$  les coordonnées cartésiennes de  $P$  (figure 1). Les coordonnées de  $S_1$  peuvent s'écrire  $(a/2, O, -D)$ , celles de  $S_2$  :  $(-a/2, O, -D)$ .

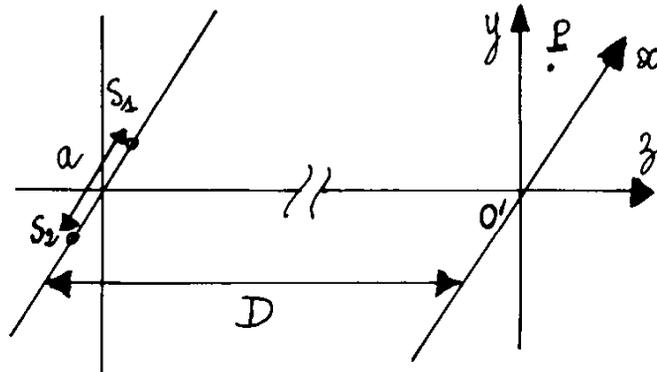


Figure 1

On calcule  $\delta = \left[ (x + a/2)^2 + y^2 + D^2 \right]^{1/2} - \left[ (x - a/2)^2 + y^2 + D^2 \right]^{1/2}$

soit  $\delta = D \left[ \left( 1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} + \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right)^{1/2} - \left( 1 + \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} - \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right)^{1/2} \right]$ .

Le texte donne  $D \gg a$  ; on étudie les interférences au voisinage de  $O'$ , on peut ne garder que les termes du deuxième ordre  $\left( \frac{x^2}{D^2}, \frac{y^2}{D^2}, \frac{ax}{D^2}, \frac{a^2}{4D^2} \right)$  il vient :

$\delta = \frac{ax}{D}$  et  $I(x, y, O) = \mathcal{I}^2 \left[ 1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right]$ . Les franges sont rectilignes et perpendiculaires à la direction  $S_1 S_2$ .

La périodicité spatiale  $i$  de l'intensité dans la direction  $x$  est l'interfrange  $i = \frac{\lambda D}{a}$ .

La valeur moyenne spatiale de l'intensité dans le plan au voisinage de  $O'$  sur une surface dont les dimensions sont très supérieures à  $i$ , vaut  $\mathcal{I}^2$ , c'est-à-dire la somme des intensités des sources seules.

2.2.b. Les franges respectent la symétrie de révolution autour de  $S_1 S_2$ . Dans le plan perpendiculaire à l'axe  $S_1 S_2$  on obtient des anneaux circulaires (figure 2).

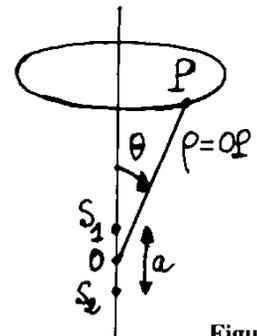


Figure 2

$P$  est toujours supposé loin des sources, on a donc encore  $I = \mathcal{I}^2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right)$  avec cette fois

$\delta = \left[ \left( \rho \cos \theta + \frac{a}{2} \right)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2} - \left[ \left( \rho \cos \theta - \frac{a}{2} \right)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2}$  et  $\rho = OP$ .

Comme  $\rho \gg a$  il reste, en ne conservant que les termes de degré le plus bas,  $\delta = a \cos \theta$ . Quand  $\theta$  croît, les anneaux sont alternativement sombres et brillants. L'ordre d'interférence  $p_k$  est tel que

$$p_k = \frac{\delta k}{\lambda}, \text{ d'où : } a \cos \theta_k = \lambda p_k \text{ et comme } \theta_k \text{ est petit : } a \left( 1 - \frac{\theta_k^2}{2} \right) = \lambda p_k.$$

Finalement  $\theta_k = \sqrt{2} \left( 1 - \frac{\lambda p_k}{a} \right)^{1/2}$ . L'anneau brillant impose  $p_k \in \mathbb{Z}$  et  $\theta_k \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  impose

$$p_k \leq p_o = \frac{a}{\lambda}. \text{ L'ordre d'interférence au centre vaut } p_o = \frac{a}{\lambda}, \text{ on a donc } \theta_k = \left[ 2 \left( 1 - \frac{p_k}{p_o} \right) \right]^{1/2} \text{ soit}$$

$$\theta_k = \left[ 2 \left( p_o - p_k \right) \frac{\lambda}{a} \right]^{1/2}.$$

## II. DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX ET APPLICATIONS

1. Les dispositifs sont trop nombreux pour être tous cités, parmi les plus connus citons les miroirs de Fresnel, les bilentilles de Billet, le biprisme de Fresnel, les trous d'Young, le miroir de Lloyd, ... l'interféromètre de Michelson, de Pérot et Fabry, ...
2. Les applications sont très nombreuses. Mesures de longueurs ou de leurs variations. Exemple : le projet Franco-Italien VIRGO, un projet d'interféromètre de Michelson à bras orthogonaux longs de 3 km, destiné à la détection directe des ondes de gravitation (si elles existent), le prototype réalisé avec des bras de 30 m a déjà une sensibilité  $\Delta L/L = 10^{-18}$  ; l'objectif de VIRGO est d'obtenir une sensibilité de  $10^{-21}$  à  $10^{-22}$ . Mesures d'indices ou de leurs variations ; de vitesses (gyromètre laser, vélocimètre laser). Réalisation de réseaux holographiques (record actuel 6 000 traits par mm). Contrôle des surfaces. ... etc.
3. En dehors de l'optique on peut citer les interférences données par les ondes «de matière» (ondes électroniques, neutroniques, ...). Celles obtenues avec des ondes mécaniques (ondes sonores, ondes à la surface de l'eau), et bien entendu celles données par les ondes électromagnétiques n'appartenant pas au domaine de l'optique.

## III. CAS D'UNE SOURCE PRIMAIRE ÉTENDUE

1. L'avance de phase  $\varphi$  cherchée s'écrit :  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left[ S_2 M + PS_2 - \left( S_1 M + PS_1 \right) \right]$ . Un calcul analogue à celui fait au I.2.2.a. conduit à :  $\varphi \approx \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{ax}{D} + \frac{aX}{d} \right]$ .

2. Un point source P (X, Y) donne seul une intensité  $I_p(M)$  proportionnelle à  $(1 + \cos \varphi)$ .

Les points sources étant incohérents entre eux, l'intensité  $dI_p(M)$  donnée par l'ensemble des points sources appartenant à une aire élémentaire  $dX dY$ , centrée sur P(X, Y), est la somme des intensités données par ces points supposés seuls.  $\delta I_p(M)$  est proportionnel à  $(1 + \cos \varphi) dX dY$  et on peut écrire :

$$\delta I_p = \frac{I(X, Y)}{hb} (1 + \cos \varphi) dX dY.$$

Nous avons écrit le facteur de proportionnalité sous la forme  $\frac{I(X, Y)}{hb}$ , comme la fente source éclaire uniformément,  $I(X, Y) = \text{constante} = K$ .

Pour l'ensemble de la fente on a donc :  $I(M) = \frac{K}{hb} \iint_{\text{fente}} (1 + \cos \varphi) dX dY$ .

$$I = K \left[ 1 + \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{ax}{D} + \frac{aX}{d} \right) \right] dX \right]$$

$$\text{soit } I = K \left[ 1 + \frac{1}{\frac{2\pi ab}{\lambda d}} \left( \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{ax}{D} + \frac{ab}{2d} \right] - \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{ax}{D} - \frac{ab}{2d} \right] \right) \right]$$

$$I = K \left( 1 + \frac{\sin \frac{\pi ab}{\lambda d}}{\frac{\pi ab}{\lambda d}} \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D} \right)$$

Les franges disparaissent pour  $\frac{\pi ab}{\lambda d} = n\pi$  avec  $n \in \mathbb{N}$  \* soit  $b = n \frac{\lambda d}{a}$ .

#### IV. CAS D'UNE SOURCE POLYCHROMATIQUE

1. Les deux radiations, n'étant pas de même longueur d'onde, sont incohérentes entre elles c'est-à-dire que l'intensité résultante est la simple somme des intensités données par chaque radiation, supposée seule, dans la source primaire. La radiation de longueur d'onde  $\lambda_1$  conduit à l'intensité  $I_1 = K \left( 1 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_1} \right)$ , et celle de la longueur d'onde  $\lambda_2$  à  $I_2 = K \left( 1 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_2} \right)$ , on a pris le même facteur de proportionalité  $K$  car les radiations données par la source primaire sont de même intensité.

$$\text{Finalement } I(\delta) = K \left[ 2 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_1} + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_2} \right]$$

$$\text{soit } I(\delta) = 2K \left\{ 1 + \cos \left[ \pi \delta \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \cos \left[ \pi \delta \left( \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \right\}$$

On pose  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda$ . Comme  $\Delta\lambda \ll \lambda$ , on a :  $I(\delta) \approx 2K \left[ 1 + \cos \left( \pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \delta \right) \cos \left( \frac{2\pi \delta}{\lambda} \right) \right]$ .

Ce qui peut se réécrire :  $I(\delta) = I_0 \left[ 1 + V(\delta) \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right]$  avec  $V(\delta) = \cos \left( \frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda^2} \delta \right)$ .

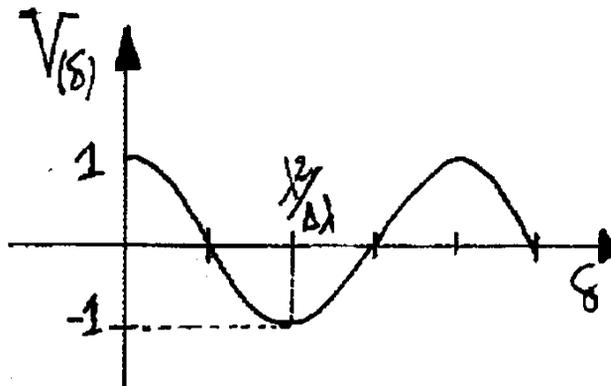


Figure 3

Quand  $\delta$  varie peu  $\left( \Delta \delta \ll \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \text{ mais } \Delta \delta \gg \lambda \right)$ ,  $V(\delta)$  reste sensiblement constant, mais le facteur  $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)$  oscille de façon appréciable. On observe localement des franges. Quand on passe de  $V(\delta) > 0$  à  $V(\delta) < 0$  il y a inversion des franges sombres et brillantes.

$$I_{\max} = I_0 (1 + |V(\delta)|), \quad I_{\min} = I_0 (1 - |V(\delta)|).$$

$$D'où C = |V(\delta)|.$$

2. La périodicité «en  $\delta$ » de disposition des franges est la périodicité de la fonction  $|V(\delta)|$  soit  $\Delta\delta = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ .

On passe d'une frange à la frange suivante homologue lorsque  $\delta = \lambda$ . La périodicité exprimée en nombre de franges vaut  $p = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ . D'où  $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{p}$  numériquement  $\Delta\lambda = \frac{578}{288} = 2 \text{ nm}$ .

Il faut un dispositif qui permet le comptage d'au moins 288 franges on utilisera, par exemple, l'interféromètre de Michelson pour lequel on fera varier la différence de marche  $\delta_0$  au centre, par translation de l'un des miroirs.

### V. CARACTÉRISTIQUE DE LA LUMIÈRE ÉMISE PAR UNE SOURCE PONCTUELLE

1.

- 1.1. L'amplitude  $a(\omega)$  étant nulle en dehors de l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$ .

$$\text{On a : } s(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{A}{\omega_2 - \omega_1} e^{-i\omega t} d\omega.$$

$$\text{D'où : } s(t) = A \frac{e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\omega_1 t}}{-i(\omega_2 - \omega_1)t}.$$

$$\text{En posant } \omega_2 = \omega_0 + \omega' \quad \text{et} \quad \omega_1 = \omega_0 - \omega', \text{ on obtient } s(t) = A e^{i\omega_0 t} \frac{e^{i\omega' t} - e^{-i\omega' t}}{i(\omega_2 - \omega_1)t}.$$

$$\text{Et finalement } s(t) = A \left[ \frac{\sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}}{\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}} \right] e^{-i \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t}.$$

Sur un bref intervalle de temps on voit que la vibration résultante est sinusoïdale d'amplitude :

$$\left| A \sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} / \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2} \right|.$$

Cette amplitude n'a de valeurs appréciables que sur un intervalle de temps  $2\tau$  tel que

$$\frac{(\omega_2 - \omega_1)\tau}{2} \approx \pi \text{ soit : } \tau \approx \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}.$$

- 1.2. Le centre du paquet correspond à la date où l'amplitude est maximale, c'est-à-dire ici, à  $t = 0$  (l'amplitude vaut alors  $|A|$ ).

2.

2.1. L'atome, numéroté  $m$ , qui émet un paquet d'onde dont le centre correspond à la date  $t_m$ , donne à

l'instant  $t$  la vibration  $s_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{-i\omega(t-t_m)} d\omega$ .

Pour les  $n$  atomes  $S(t) = \sum_{m=1}^{m=n} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) e^{-i\omega t} e^{i\omega t_m} d\omega$ .

Soit encore  $S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \left[ \sum_{m=1}^{m=n} e^{i\omega t_m} \right] e^{-i\omega t} d\omega$ .

Il suffit de poser  $\phi(\omega) = \text{Arg} \left( a(\omega) \sum_{m=1}^{m=n} e^{i\omega t_m} \right)$   $c(\omega) = \left| a(\omega) \sum_{m=1}^{m=n} e^{i\omega t_m} \right|$  et on retrouve la forme demandée.

2.2. La durée d'émission de l'atome étant de l'ordre de  $\tau$ , sur des durées inférieures à  $\tau$ , il n'y a pas renouvellement significatif de la population des atomes émetteurs. L'onde émise par la source peut être considérée d'amplitude  $c(\omega)$  et de phase  $\phi(\omega)$  constantes. On a donc  $c(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  constants sur une durée de l'ordre de  $\tau$ .

• On peut obtenir  $c(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  par une construction géométrique en ajoutant dans le plan complexe des vecteurs de module constant (figure 4).

$a(\omega) = \frac{A}{\omega_2 - \omega_1}$  mais dont les orientations sont quelconques, les arguments  $\omega t_m$  pouvant varier de  $2\omega\tau \approx \frac{4\pi\omega}{\omega_2 - \omega_1} \gg 2\pi$ .

Sur un intervalle de durée  $\gg \tau$  la construction géométrique change complètement. On tire donc les conclusions suivantes :  $\phi(\omega)$  varie de manière aléatoire sur l'intervalle  $[0 - 2\pi]$  ainsi que  $c(\omega)$  entre 0 et  $\frac{nA}{\omega_2 - \omega_1}$ .

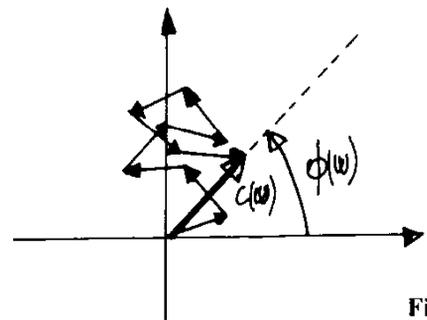


Figure 4

2.3. On retrouve un problème de marche au hasard dans un espace à deux dimensions, chaque pas étant de même longueur mais de direction aléatoire.

Soit  $\vec{\Gamma}_k$  le vecteur représentant le complexe  $\sum_{m=1}^{m=k} e^{i\omega t_m}$ .

On a  $\vec{\Gamma}_{k+1} = \vec{\Gamma}_k + \vec{a}_{k+1}$ ,  $\vec{a}_{k+1}$  représentant le complexe  $e^{i\omega t_{k+1}}$  de module 1 mais d'orientation quelconque. Il en résulte  $\langle \vec{\Gamma}_k \cdot \vec{a}_{k+1} \rangle = 0$ ,  $\langle \rangle$  désignant la valeur moyenne.

Comme  $\vec{\Gamma}_{k+1}^2 = \vec{\Gamma}_k^2 + \vec{a}_{k+1}^2 + 2\vec{\Gamma}_k \cdot \vec{a}_{k+1}$ , on obtient  $\langle \vec{\Gamma}_{k+1}^2 \rangle = \langle \vec{\Gamma}_k^2 \rangle + 1$  et par récurrence  $\langle \vec{\Gamma}_n^2 \rangle = n$ . Finalement  $\langle c^2(\omega) \rangle^{1/2} = \sqrt{n} \frac{A}{\omega_2 - \omega_1}$ . La moyenne quadratique de  $c(\omega)$  est proportionnelle à  $\sqrt{n}$ .

L'intensité moyenne de la source  $J = \langle c^2(\omega) \cos^2 [\omega t - \phi(\omega)] \rangle = \frac{\langle c^2(\omega) \rangle}{2}$ .

L'intensité moyenne donné par un seul atome vaut  $I = \frac{A^2}{2(\omega_2 - \omega_1)^2}$ . On constate que  $J = n I$ .

L'intensité moyenne de la source est la somme des intensités moyennes de chaque atome, cela est en accord avec le bon sens, mais repose sur l'hypothèse que les atomes émettent indépendamment les uns des autres.

2.4. Les résultats précédents ne s'appliquent pas si les émissions des atomes sont corrélées. Ce qui arrive pour des sources intenses comme le laser.

## VI. DIFFRACTION

### A

1.

1.1. D'après la formule de la diffraction à l'infini, une portion élémentaire de fente de surface  $d\Sigma$ , centrée sur le point P, envoie dans la direction de vecteur unitaire  $\vec{u}$  une vibration dont l'amplitude complexe à l'infini est proportionnelle à :  $s(P) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \cdot \vec{OP}}$   $d\Sigma$ ;  $s(P)$  étant l'amplitude complexe de l'onde primaire.

Avec  $\varepsilon = + 1$ , si on note la phase  $\psi$  de l'onde plane progressive harmonique sous la forme  $\psi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$   
 et  $\varepsilon = - 1$  si  $\psi(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$ .

La fente est très haute, la diffraction n'est appréciable que si  $\vec{u}$  est perpendiculaire à la direction de sa hauteur. On a  $\vec{u} \cdot \vec{OP} = \xi \sin \theta$ ,  $\xi$  étant la coordonnée selon l'axe  $O\xi$  qui repère la portion élémentaire de fente de largeur  $d\xi$ . Par ailleurs  $s(P) = \text{constante}$  car la fente est éclairée sous incidence normale par une onde plane. On obtient pour l'amplitude  $dA$  diffractée  $dA \propto e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \xi \sin \theta} d\xi$  ( $\alpha$  signifiant proportionnel).

1.2. Pour la totalité de la fente :  $A(\theta) \propto \int_{-b/2}^{+b/2} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \xi \sin \theta} d\xi$  soit  $A(\theta) \propto b \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)}{\pi b \frac{\sin \theta}{\lambda}}$ , ce qui se

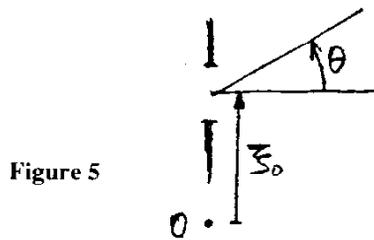
réécrit en désignant par  $A(0)$  l'amplitude diffractée dans la direction  $\theta = 0$

$$A(\theta) = A(0) \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}} \right)$$

Pour l'intensité on trouve  $I(\theta) = I(0) \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta\right)^2}$

1.3.  $A(\alpha) \propto \int_{-b/2}^{+b/2} e^{i2\pi\alpha\xi} d\xi$  qu'on réécrit  $A(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi) e^{i2\pi\alpha\xi} d\xi$   
 avec  $T(\xi) = \text{constante} = A$  pour  $\xi \in [-b/2, +b/2]$   
 $T(\xi) = 0$  en dehors de l'intervalle

2. La nouvelle amplitude diffractée  $A'(\alpha)$  s'écrit  $A'(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} T'(\xi) e^{i2\pi\alpha\xi} d\xi$  avec  $T'(\xi) = T(\xi - \xi_0)$



Il suffit de faire le changement de variable  $\xi' = \xi - \xi_0$

$$A'(\alpha) = e^{i2\pi\alpha\xi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi') e^{i2\pi\alpha\xi'} d\xi', \text{ on a donc } A'(\alpha) = e^{i2\pi\alpha\xi_0} A(\alpha).$$

L'amplitude diffractée est multipliée par le facteur de phase  $e^{i2\pi\alpha\xi_0}$  comme ce facteur est de module 1 :  $I'(\alpha) = I(\alpha)$ . L'intensité diffractée n'est pas changée.

3.

3.1. L'amplitude complexe diffractée par l'ensemble est la somme des amplitudes diffractées par chacune des fentes. En utilisant la propriété précédente on obtient :

$$\mathcal{A}(\alpha) = A(\alpha) \sum_{n=0}^{n=N-1} e^{i2\pi\alpha an}, \quad n = 0 \text{ repère la fente du bas de la figure 3 du texte du problème}$$

et  $A(\alpha)$  est l'amplitude qu'elle diffracte.

Le calcul donne :  $\mathcal{A}(\alpha) = A(\alpha) \frac{\sin \pi b \alpha}{\pi b \alpha} \frac{e^{i2\pi\alpha a N} - 1}{e^{i2\pi\alpha a} - 1}$

finalement  $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{\mathcal{A}_b(0)}{N} \frac{\sin \pi b \alpha}{\pi b \alpha} \frac{\sin (N \pi \alpha a)}{\sin (\pi \alpha a)}$   $\mathcal{A}_b(0)$  amplitude diffractée dans la direction  $\theta = 0$ .

$$I(\alpha) = \frac{I(0)}{N^2} \left( \frac{\sin \pi b \alpha}{\pi b \alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin (N \pi \alpha a)}{\sin \pi \alpha a} \right)^2.$$

3.2. Le plan d'observation est le plan focal image d'une lentille (figure 6).

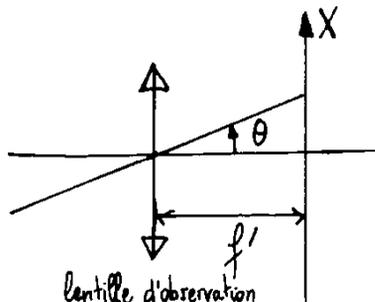


Figure 6

Si  $X$  désigne la coordonnée cartésienne du point d'observation selon la direction  $X$  perpendiculaire à la direction commune des hauteurs des fentes.

$\theta$  est petit (approximation de l'optique paraxiale par la lentille) par suite  $\alpha = \frac{\theta}{\lambda} = \frac{X}{\lambda f'}$

$$\text{et : } I(X) = \frac{I(0)}{N^2} \left( \frac{\sin \frac{\pi bX}{\lambda f'}}{\frac{\pi bX}{\lambda f'}} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{N \pi aX}{\lambda f'}}{\frac{\sin \frac{\pi aX}{\lambda f'}}{\frac{\pi aX}{\lambda f'}}} \right)^2.$$

3.3.  $I(\alpha)$  est le produit d'un terme de diffraction d'une fente seule, par un terme d'interférence donné par des source synchrones placées au centre des fentes.

4.  $N = 2, a = b$

A partir de 3.2. on obtient  $I(\alpha) = \frac{I(0)}{4} \frac{\sin^2 \pi a \alpha}{(\pi a \alpha)^2} \frac{\sin^2 (2 \pi \alpha a)}{\sin^2 \pi \alpha a}$  soit  $I(\alpha) = I(0) \frac{\sin^2 (\pi \alpha 2a)}{(\pi \alpha 2a)^2}$ , ce qui est bien l'expression obtenue pour l'intensité diffractée par une fente de largeur  $2a$ .

5.

5.1. On a obtenu  $I(\alpha) = I(0) \left( \frac{\sin (\pi b \alpha)}{\pi b \alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin (N \pi \alpha a)}{N \sin (\pi \alpha a)} \right)^2$ . On se place, bien sûr, dans le cas du réseau de fentes fines, le terme de diffraction d'une fente varie lentement si on le compare avec le terme

$$\text{d'interférence } T = \left( \frac{\sin (N \pi \alpha a)}{N \sin \pi \alpha a} \right)^2.$$

$T$  est borné supérieurement par 1 et les maximums principaux correspondent à  $T = 1$  obtenu pour  $\pi \alpha a = n \pi$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ , on obtient  $\alpha = \frac{n}{a}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et  $T = 1$ .

$T$  est périodique en  $\alpha$  de période  $\frac{1}{a}$ , il suffit donc d'étudier la variation de  $T$  sur une période, par exemple  $0 < \alpha < 1/a$ . Dans cet intervalle  $T$  s'annule pour  $N \pi \alpha a = p \pi$  soit  $\alpha = \frac{p}{Na}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  et  $0 < p < N$ , il y a donc  $N - 1$  minima nuls. Entre deux minima nuls successifs on trouve un maximum secondaire (soit  $N - 2$  maximums secondaires dans l'intervalle) pour  $N \pi \alpha a \approx (p + 1/2) \pi$  soit  $\alpha = (p + 1/2) \frac{1}{Na}$   $p \in \mathbb{N}$   $0 < p < N$ .

La valeur du terme d'interférence est alors  $T_p = \frac{1}{N^2 \sin^2 \left( \frac{(p + 1/2)}{N} \pi \right)}$ .

• Remarquons que  $T_p = T_{p'}$  avec  $p' = N - p$  (symétrie de  $T$  par rapport au milieu de l'intervalle  $\alpha = 1/2a$ ).

Si  $N$  est grand, pour les petites valeurs de  $p$  ou de  $p'$  :  $T_p = \frac{1}{(p + 1/2)^2 \pi^2}$  pour  $p = 1$  (ou  $p' = 1$ )

$T_1 = \frac{4}{9 \pi^2} \approx \frac{4}{100}$  alors que  $T = 1$  pour le maximum principal. Les autres minima secondaires sont encore plus petits. D'où l'allure classique de la courbe (non demandé).

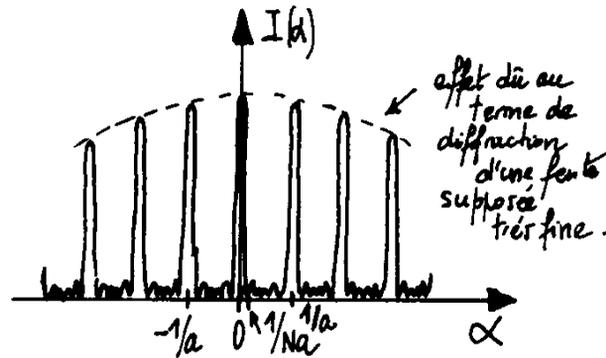


Figure 7

5.2. Lorsque  $N = 2$   $T = \left( \frac{\sin(2\pi\alpha a)}{2\sin\pi\alpha a} \right)^2 = (\cos(\pi\alpha a))^2$

maximum :  $\pi\alpha a = n\pi$  avec  $n \in \mathbb{Z}$  soit  $\alpha = \frac{n}{a}$ , résultat obtenu au 5.1.

La longueur angulaire d'un pic central est de façon évidente  $\Delta\alpha = \frac{2}{Na}$ , ou si l'on veut  $\Delta X = \frac{2f}{Na}$  dans le plan focal image de la lentille d'observation.

On constate que lorsque  $N$  augmente les pics principaux s'affinent. On peut retrouver ce résultat en remarquant qu'au voisinage d'un pic principal, prenons celui pour lequel  $\alpha = 0$ , on a

$T \approx \left( \frac{\sin N\pi\alpha a}{N\pi\alpha a} \right)^2$ . C'est-à-dire la figure de diffraction donnée par une fente de largeur  $Na$  qui s'affine lorsque cette largeur augmente.

### B

A l'exception de xii et xiii il s'agit de pupilles composées obtenues à partir de la translation de vecteur  $\vec{a}$  d'une même pupille, sans qu'il y ait de portions communes à ces pupilles.

On a vu en VI.A.2. que lors d'une translation d'une pupille dans son plan, l'amplitude diffractée à l'infini, d'une onde plane qui l'attaque sous incidence normale, est simplement multipliée par un facteur de phase. Ce facteur de phase s'écrit, si  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de la direction diffractée,  $\vec{a}$  la translation, :  $e^{-i2\frac{\pi}{\lambda}\vec{u}\cdot\vec{a}}$  (on prend  $\varepsilon = -1$ ).

Il en résulte que l'amplitude diffractée par le système de pupilles  $A(\vec{u})$  se met sous la forme :

$$A(\vec{u}) = A_p(\vec{u}) \left( 1 + e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}\cdot\vec{a}} + \dots \right)$$

$A_p(\vec{u})$  étant l'amplitude diffractée par la pupille origine. L'intensité diffractée  $I(\vec{u})$  est le simple produit de l'intensité  $I_p(\vec{u})$  diffractée par une pupille seule, et de l'intensité donnée par les interférences de  $N$  sources ponctuelles identiques placées aux centres des  $N$  pupilles.

- Pour les pupilles simples xii et xiii on reconnaît facilement les figures de diffraction d'une ouverture rectangulaire. On associe :

à xii  $\rightarrow p$

à xiii  $\rightarrow m$  (au plus grand côté correspond des franges plus serrées).

- Pour les autres on utilise les résultats précédemment établis, on reconnaît toujours la figure de diffraction d'un trou circulaire avec une tache centrale d'autant plus large que son diamètre est petit.

Le terme d'interférence a été étudié en VI.A., on reconnaît bien les interférences données par deux sources ponctuelles d'où :

à i → r Tache centrale très large donc petits trous.

à iv → e

à vii → l (interfrange plus petit car centre des trous plus espacés).

Enfin :

à v → 0 figure de diffraction d'un trou assez grand et interférences à 3 sources.

à viii → n tache centrale importante et figure d'interférences à 6 sources (4 maximums secondaires).

### TROISIÈME PARTIE

#### Réflexion de la lumière sur un métal

I.

$$I.1. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$I.2. \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m \frac{\vec{v}}{\tau_0} \text{ en négligeant la force magnétique. } \vec{E} \text{ est le champ où se situe l'électron et } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}. \text{ On fait a priori l'approximation } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -i\omega \vec{v} \text{ alors } \vec{v} = \frac{-e/m}{1/\tau_0 - i\omega} \vec{E}.$$

On constate que cette solution convient car  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \left( \frac{-e/m}{1/\tau_0 - i\omega} \right)^2 (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = 0$ .

Comme  $\vec{j} = -ne\vec{v}$ , il vient  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  avec  $\sigma = \frac{ne^2 \tau_0 / m}{1 - i\omega \tau_0}$ .

$$I.3. \quad \text{La conductivité statique } \sigma_{st} = \frac{ne^2 \tau_0}{m}, \text{ on calcule } \tau_0 = \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot 2,1 \cdot 10^7}{2,65 \cdot 10^{28} (1,6 \cdot 10^{-19})^2}.$$

On obtient  $\tau_0 = 2,8 \cdot 10^{-14}$  s.  $\tau_0$  est un temps de relaxation.

II.

II.1. • Le temps caractéristique d'évolution temporelle du champ de l'ordre de  $\frac{2\pi}{\omega}$ ; est très inférieur au temps de relaxation  $\tau_0$ , l'interaction des électrons avec le réseau ne peut plus être modélisée par une force de freinage du type  $-m \frac{\vec{v}}{\tau_0}$ .

• Sur la durée  $\frac{2\pi}{\omega}$  on peut considérer les électrons comme libres, cela revient à prendre  $\tau_0$  infini et donc  $\sigma = \frac{ne^2}{-i m \omega}$ .

II.2.  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) - \frac{i\omega}{c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  à partir de la dernière équation de Maxwell écrite en I.1.

$$\text{D'où } \left( \frac{\mu_0 n e^2}{-i m \omega} - i \frac{\omega}{c^2} \right) \rho = 0 \quad \text{et si } \omega \neq \left( \frac{n e^2}{m \epsilon_0} \right)^{1/2} = \omega_p \quad \text{on a } \rho = 0.$$

$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = i\omega \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$  à partir de la deuxième équation de Maxwell écrite en I.1.

$$\text{Comme } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 = 0 \text{ on obtient } -\Delta \vec{E} = \left( i\omega \frac{\mu_0 n e^2}{-i m \omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{E} \text{ et enfin } \Delta \vec{E} = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \vec{E}.$$

III.

III.1. L'onde étant plane progressive harmonique de vecteur d'onde  $\vec{k}$ . On a aussi  $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$  et, en tenant compte de II.2.,  $k$  doit satisfaire l'équation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

$$\text{Pour } \omega < \omega_p \text{ on obtient } k = \pm i \left( \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \right)^{1/2} = \pm \frac{i}{\delta}.$$

On cherche l'onde sous la forme  $\vec{E} = \tau E_0 \hat{x} e^{ikz - \omega t}$ , le milieu étant illimité vers  $z > 0$  seule la solution  $k = +\frac{i}{\delta}$  est à retenir, l'autre solution conduisant à un champ  $\|\vec{E}\|$  infini, non physique. On obtient ainsi  $\vec{E} = \tau E_0 \hat{x} e^{-z/\delta} e^{-i\omega t}$ .

Le calcul de  $\vec{B}$  se fait à partir de l'équation de Maxwell  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = +i\omega \vec{B}$  ce qui donne

$\vec{B} = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial E(z)}{\partial z} \hat{y}$  et  $\vec{B} = \frac{-\tau E_0}{i\omega \delta} \hat{y} e^{-z/\delta} e^{-i\omega t}$ . L'onde dans le métal est stationnaire, d'amplitude décroissante lorsque  $z$  croît.

III.2. En  $z = 0$   $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}$  conduit à  $1 + \Gamma = \tau$   
 $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}$  soit encore  $\frac{\hat{z} \wedge \vec{E}_i}{c} + \frac{-\hat{z} \wedge \vec{E}_r}{c} = \vec{B}$  conduit à  $1 - \Gamma = \frac{-\tau c}{i\omega \delta}$ .

$$\text{On en tire : } \tau = \frac{2 i\omega \delta}{i\omega \delta - c} \quad \Gamma = \frac{i\omega \delta + c}{i\omega \delta - c}.$$

Il apparaît un déphasage entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. D'autre part  $\|\Gamma\| = 1$  : le flux d'énergie moyen par unité de surface de l'onde réfléchie est exactement opposé à celui de l'onde incidente. Aucune puissance n'est dissipée dans le métal. Ce résultat se retrouve facilement en calculant la puissance moyenne par unité de volume dans le métal  $\langle P \rangle$ .

$$\text{Celle-ci, exprimée à partir des expressions complexes, s'écrit } \langle P \rangle = \Re \frac{\vec{j}^* \cdot \vec{E}}{2} = \Re \left( \frac{\sigma \vec{E} \vec{E}^*}{2} \right)$$

$\sigma$  étant imaginaire pur, on a bien  $\langle P \rangle = 0$ .

III.3. Il suffit de calculer  $\delta = \frac{c}{(\omega_p^2 - \omega^2)^{1/2}}$  qu'on réexprime en fonction de  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$  et  $\lambda_p = \frac{2\pi c}{\omega_p}$  on obtient  $\delta = \frac{\lambda_p}{2\pi \left(1 - \frac{\lambda_p^2}{\lambda^2}\right)^{1/2}}$ .

Pour le sodium  $\lambda_p = \frac{2\pi c}{(ne^2/m\epsilon_0)^{1/2}} = 2,05 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ , on calcule  $\delta = 3,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$  ou encore

$\delta = 0,035 \mu\text{m}$ . On peut dire que la pénétration s'effectue sur une profondeur inférieure à quelques  $\delta$ , si on prend  $10\delta$  on trouve  $0,35 \mu\text{m}$ .

III.4. Soit  $\vec{E}_M$  et  $\vec{B}_M$  les champs créés par la nappe de courant désignée par M. On applique le théorème de superposition des champs.

• Pour  $z > 0$   $\vec{E}_M(z, t) = -\vec{E}_i(z, t)$  car le champ total est nul en tout point du métal. On a donc :  
 $\vec{E}_M = -E_0 \hat{x} e^{i(k_0 z - \omega t)}$  et  $\vec{B}_M = \frac{\hat{x} \wedge \vec{E}_M}{c}$ .

C'est dire aussi que la nappe de courant crée, du côté  $z > 0$ , une onde électromagnétique plane progressive qui se dirige vers les  $z > 0$ , exactement opposée à l'onde incidente, pour assurer la nullité du champ total dans le métal.

Le plan  $z = 0$  étant un plan de symétrie pour les sources qui forment la nappe de courant, on en déduit que :  $\vec{E}_M(z, t) = \vec{E}_M(-z, t) = -E_0 \hat{x} e^{i(-k_0 z - \omega t)}$  et  $\vec{B}_M(z, t) = -\frac{\hat{x} \wedge \vec{E}_M(z, t)}{c}$ .

Autrement dit, la nappe de courant M crée une onde électromagnétique plane qui se dirige vers les  $z < 0$ , c'est l'onde réfléchi, qui a bien la forme admise en III.2.

• On peut relier  $j_s$  et  $E_0$  en utilisant la relation de continuité pour le champ magnétique, ce qui conduit à :  $\vec{B}(0^+, t) - \vec{B}(0^-, t) = \mu_0 j_s \wedge (-\hat{z})$ . On obtient :  $\frac{2 E_0 e^{-i\omega t}}{c} = \mu_0 j_s$  et le champ  $\vec{E}_M$  créé par la nappe de courant pour  $z > 0$  peut aussi s'écrire :  $\vec{E}_M = -\frac{\mu_0 c}{2} j_s \hat{x} e^{i k_0 z}$ .

IV.

IV.1. Il faut  $l \gg \delta$  pour que l'on puisse considérer que le métal s'étend fictivement jusqu'à l'infini.

Si ce n'est pas le cas, il existe des ondes réfléchies dues à la présence de la face  $z = +l$  de la lame, et il faut prendre en compte la solution correspondant à  $k = -i/\delta$ . Pour résoudre le problème il faut alors écrire les relations de continuité des champs en  $z = 0$  et  $z = l$ .

IV.2. On calcule  $\lambda_p = \frac{2\pi c}{(ne^2/m\epsilon_0)^{1/2}}$  qu'on compare à  $\lambda_c$ .

D'après III.1. si  $\lambda < \lambda_p$  c'est-à-dire si  $\omega > \omega_p$   $k$  est réel et le métal est transparent, alors que si  $\lambda > \lambda_p$   $k$  est imaginaire pur et le métal ne permet pas la propagation.

On établit le tableau de résultats suivant :

	Li	Na	K	Rb
$\lambda_c$ ( $\mu\text{m}$ )	0,155	0,210	0,315	0,340
$\lambda_p$ ( $\mu\text{m}$ )	0,154	0,205	0,282	0,312

Le modèle étudié, rend compte du phénomène mais pas de façon tout à fait satisfaisante.

On sait qu'il faut utiliser la mécanique quantique si on veut expliquer convenablement le comportement des électrons dans un métal. Il faut tenir compte, en particulier, des interactions de l'électron avec le potentiel périodique du cristal et tout se passe comme si l'électron avait une masse apparente  $m^*$  différente de  $m$ . A titre indicatif, une mesure par résonance cyclotron donne  $m^* = 1,24 m$  pour les électrons du potassium et le calcul corrigé de  $\lambda_p$  conduit à  $\lambda_p = 0,3145 \mu\text{m}$ , une valeur très proche de  $\lambda_c$ .

E-R. TANTART  
(Lycée Saint-Louis, Paris)

## Agrégation

### OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve A : Composition de physique - Session de 1990

#### PARTIE I - LIQUÉFACTEUR D'HÉLIUM

##### I.1. PROPRIÉTÉS D'UN GAZ PARFAIT

I.1.a.  $T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{N_i} \cdot 1 \text{ K} = \frac{1}{273,16}$  de la température du point triple de l'eau.

I.1.b. On peut prendre  $PV = nRT$  ou (mieux)  $U(T)$  et  $H(T)$ . On en déduit soit  $\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$  et  $\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = 0$ ,  
soit  $PV = kT$ , puis  $C_p - C_v = k$ ,  $\left( \frac{\partial C_v}{\partial U} \right)_T = 0$ ,  $\left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = 0$  ,  $k = nR$ .

I.1.c.  $TdS = C_p dT - VdP = 0 \Rightarrow \frac{T^{C_p}}{P^{C_p - C_v}} = \text{Cte}$  ou  $\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{Cte}$  .

I.1.d. 3 degrés de translation  $\Rightarrow C_v = \frac{3}{2} nR$  et  $\gamma = \frac{5}{3} = 1,67$ . Pas de degrés supplémentaires quant T augmente  $\Rightarrow \gamma(T) = \text{Cte}$ .

##### I.2. PROPRIÉTÉS DES ÉCOULEMENTS DE FLUIDES

I.2.a.  $D = \frac{\delta m(S)}{dt} = \int_{(S)} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}$ .

I.2.b. intégrale :  $\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau + \int_{(S_G)} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$  (Reynolds).

locale :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$ .

Régime permanent  $\int_{(S_G)} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$  et  $\text{div}(\rho \vec{V}) = 0$ .

I.2.c.  $D > 0$  en sortie  $\rightarrow \Sigma D_i = 0$ .  
 $< 0$  en entrée

I.2.d.  $\frac{dU}{dt} = P + Q - \frac{d(pV)}{dt} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = P + Q; \frac{dH}{dt} = D(H_2 - H_1)$ .

## I.3. ÉTUDE DES DEUX PREMIERS ÉTAGES DE RÉFRIGÉRATION

$$I.3.a. \quad \frac{T_2}{T_1} = k = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 0,321.$$

$$I.3.b. \quad m_1 - \mu_1 = m_2 - \mu_2.$$

I.3.c. Pour l'ensemble des deux échangeurs 1 et 1',  $P = 0, Q = 0,$

$$\frac{dH}{dt} = C_p [m_2 T_2 + (m_1 - m_2) T'_1 + \mu_1 T_1 - m_1 T_1 - \mu_1 T_2].$$

$$\Rightarrow T'_1 = \frac{(m_1 - \mu_1) T_1 - (m_2 - \mu_1) T_2}{m_1 - m_2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{m_1 - m_2} [(m_2 - \mu_2) T_1 - (m_2 - \mu_1) T_2].$$

$$I.3.d. \quad 3^{\text{eb}} \Rightarrow m_1 x_1 = m_2 x_2 = m_3 x_3.$$

I.3.e. Rendement en masse au-delà de l'étage i.

$$I.3.f. \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{x_i} = \frac{1}{x_{i+1}} + \frac{k}{1-k} \frac{T_i - T_{i+1}}{T_{i+1}}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} + 1,37 \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3} + 1,35$$

## I.4. PROPRIÉTÉS D'UN GAZ NON PARFAIT

$$I.4.a. \quad h = -T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \frac{RT(V-b)}{RT - \frac{2a}{V^3}(V-b)^2} = - \frac{RTV^3}{PV^3 - aV + 2ab}.$$

$$dH = C_p dT + (h + v) dP, \quad h + v = \frac{bRT - 2a \left( V - \frac{b}{V} \right)^2}{RT - \frac{2a}{V^3}(V-b)^2}$$

$$I.4.b. \quad h + v = 0 \Rightarrow T_i = \frac{2a}{bR} \left( \frac{V-b}{V} \right)^2.$$

I.4.c.  $T_i$  solutions de  $RT = \frac{2a}{b} \left( \frac{V-b}{V} \right)^2 = \left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V-b)$ . On résout le système, soit par une méthode itérative, soit en résolvant d'abord l'équation en  $V$  :  $bPV^2 - 2aV + 3ab = 0$ . On obtient :

$$\text{à 17 bars : } T_i = 9,6 \text{ K} \quad \text{et} \quad T_i = 23,3 \text{ K}$$

$$\text{à 1 bar : } T_i = 4,1 \text{ K} \quad \text{et} \quad T_i = 34,8 \text{ K}.$$

I.4.d. La température s'abaisse au cours de la détente si  $h + v < 0$ . Pour  $T \rightarrow 0$  et pour  $T \rightarrow \infty, h + v > 0$ . Il faut donc que la température soit comprise entre les deux valeurs de  $T_i$  obtenues :  $9,6 < T_0 < 23,3 \text{ K}$ .

I.4.e. En fin de détente,  $P \approx 1$  bar. Pour que  $h + V < 0$  il faut alors que  $T > 4,1$  K.

I.5. ÉTUDE DU TROISIÈME ÉTAGE DE RÉFRIGÉRATION

I.5.a. On applique à l'ensemble {échangeur 3, vanne, réservoir} le raisonnement de I.3.c. :  
 $m H_1 + \mu_3 H_{(P,T_3)} - m_3 H_{(P_0, T_3)} = 0$ . Comme en I.3.b.,  $m + \mu_3 = m_3$  (ici  $\mu_4 = 0$ ).

I.5.b. Des relations précédentes on déduit  $\frac{m}{m_3} = \frac{H(P,T_3) - H(P_0, T_3)}{H(P,T_3) - H_1} = 0,073$ .

I.6. BILAN DU LIQUÉFACTEUR

La conservation de la masse pour l'ensemble de l'enceinte se traduit par  $m + \mu_1 = m_1$ , d'où  $x = \frac{m}{m_1} = x_1$ .

Les relations établies en I.5.b. et I.3.f. permettent de calculer  $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{0,073} + 1,37 + 1,35$

d'où  $x = 0,061 : 6,1 \%$  de l'hélium introduit dans le liquéfacteur est effectivement liquéfié.

PARTIE II - STABILITÉ MÉCANIQUE D'UNE BOBINE SUPRACONDUCTRICE

II.1. CHAMP MAGNÉTIQUE D'UN SOLÉNOÏDE

II.1.a.  $d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$  ou  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  ; 1 tesla = 1 weber/m<sup>2</sup>.

II.1.b.  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i d\vec{l} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$  ; courants permanents ou quasi-permanents.

-  $i d\vec{l}$  permanent n'existe pas seul  $\Rightarrow$  on pourrait rajouter  $d\vec{B}'$  tel que  $\int d\vec{B}' = \vec{0}$ .  
 -  $i d\vec{l}$  avec  $i = Cte$  existe en électrodynamique.

II.1.c. Avec  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ ,  $\int_{(S)} r \vec{\otimes} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(C)$ .

II.1.d.  $\Phi_p = Li \Rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$  e en sens contraire de  $\Delta i$ .

Travail échangé par le courant pour créer le champ  $W = \int e i dt = -L \int_0^i i di = -\frac{1}{2} Li^2 \rightarrow$

énergie du champ  $W = -\Delta E_m \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} Li^2$ .

II.1.e.  $\vec{B}(M) = \mu_0 \frac{N}{l} i \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{2}$

$$\frac{N}{l} = n.$$

II.1.f. Sur l'axe  $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z \rightarrow$  idem à l'intérieur (Ampère ou symétrie). A l'extérieur  $\vec{B} = \vec{0}$  (Ampère).

$$\text{II.1.g. } L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 S l. \quad E_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} S l.$$

$$\text{II.1.h. } d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{j}_s \wedge d\vec{S} \wedge \vec{B} \quad p = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}.$$

## II.2. BOBINES À SPIRES CIRCULAIRES

$$\text{II.2.a. } \lambda = n_1 l \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r n_2 dr = \pi n_1 n_2 l (R_2^2 - R_1^2).$$

$$\text{II.2.b. } \begin{aligned} r \leq R_1 \quad B_0 &= \mu_0 n_1 n_2 (R_2 - R_1) i \\ r \geq R_2 \quad B &= 0 \end{aligned}$$

$$R_1 \leq r \leq R_2 \quad B(r) = \mu_0 n_1 n_2 (R_2 - r) i = B_0 \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}.$$

$$\begin{aligned} \text{II.2.c. } L &= \frac{1}{\mu_0 i^2} \int B^2 d\tau = \frac{B_0^2}{\mu_0 i^2} = l\pi \left[ R_1^2 + \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \right)^2 2r dr \right] \\ &= \frac{B_0^2}{\mu_0 i^2} \frac{\pi}{6} l (3R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2). \end{aligned}$$

$$R_2 = R_1 = R : L = \frac{B_0^2}{\mu_0 i^2} \pi R_2 l \quad (\text{idem II.1.g.}).$$

$$\text{II.2.d. } \frac{d\vec{f}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{B_0^2}{\mu_0 (R_2 - R_1)} \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \vec{u}_r.$$

$$\text{II.2.e. } p' = \frac{B_0^2}{\mu_0 (R_2 - R_1)^2} \frac{1}{R_2} \int_{R_1}^{R_2} (R_2 - r) r dr = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{R_2 + 2R_1}{3R_2}.$$

On peut également raisonner sur l'énergie (comme en II.2.f.). Pour une variation  $dR_2$  de tous les rayons

$$p' 2\pi R_2 l dR_2 = \frac{1}{2} i^2 \left( \frac{dL}{dR_2} + \frac{dL}{dR_1} \right) dR_2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{\pi}{6} l (8R_1 + 4R_2) dR_2.$$

II.2.f.  $\vec{d}f = \vec{j} \wedge \vec{B} \rightarrow$  contraction. Au total  $\vec{F} // \vec{u}_z$  par symétrie.

En supposant la force  $\vec{F}$  appliquée aux extrémités, une variation élémentaire  $dl$  de la longueur fournit le travail  $-F dl$ . Comme  $L \sim n_1^2 l = \frac{N_1^2}{l}$ , la variation de l'énergie magnétique est  $\frac{1}{2} i^2 dL = -\frac{1}{2} i^2 \frac{L}{l} dl$ . Le travail électrique reçu par le circuit est  $e i dt = -i^2 dL = i^2 \frac{L}{l} dl$ . La conservation de l'énergie impose  $-F dl - \frac{1}{2} i^2 \frac{L}{l} dl + i^2 \frac{L}{l} dl = 0 \Rightarrow F = \frac{Li^2}{2l} = p'' \pi R_2^2$ , d'où  $p'' = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{3R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2}{6R_2^2}$   $K' = \frac{5}{9}, K'' = \frac{1}{3}$ .

On peut également effectuer le calcul direct (comme en II.2.e.) :  $F = \int j B_r 2\pi r dz dr$ . Or, d'après II.1.c. et la conservativité du flux,  $\int_{1/2 \text{ solénoïde}} B_r 2\pi r dz = \frac{1}{2} \int_{\text{section}} B_r 2\pi r dz = \frac{\Phi(r)}{2}$  avec  $Li = \int \Phi(r) n_1 n_2 l dr$ .

On en déduit :  $F = \frac{1}{2} \frac{Li^2}{l}$ .

II.2.g. On obtient  $B_0 = 7,48 \text{ T}$ ,  $p' = 124 \text{ bars}$ ,  $p'' = 74 \text{ bars}$  ( $K' = \frac{5}{9}, K'' = 1/3$ ).  $p'$  et  $p''$  sont bien plus fortes que la pression atmosphérique (1 bar) et peuvent avoir des effets mécaniques.

II.2.h. Considérons une variation  $dR_2$  du rayon de toutes les spires ; la variation de longueur du câble est  $d\lambda = n_1 n_2 l (R_2 - R_1) 2\pi dR_2$ . Le travail des forces appliquées au câble est dans ces conditions  $p' l 2\pi R_2 dR_2 = T' d\lambda \Rightarrow T' = p' \frac{R_2}{n_1 n_2 (R_2 - R_1)} = 29 \text{ N}$ .

II.2.i.  $C' = \frac{T'}{d^2}$  ;  $C'' = p'' = \frac{R_2^2}{2\mu_0 (R_2^2 - R_1^2)}$  ;  $C = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{R_2}{R_2 - R_1} \left( K' + K'' \frac{R_2}{R_2 + R_1} \right)$ .  
 $K = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \left( K' + K'' \frac{R_2}{R_2 + R_1} \right) = \frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{29}{24}$ .

II.2.j.  $C = 2,7 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 2,7 \text{ da N} \cdot \text{mm}^{-2} < 100$ . Il n'y aura pas de déformation permanente du câble, mais l'allongement peut déformer la bobine de façon permanente.

### II.3. BOBINE À SPIRES INCLINÉES

II.3.a.  $\vec{j} = j_0 (\cos \alpha \vec{u}_\theta + \sin \alpha \vec{u}_z)$  ;  $\alpha(r) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{R_2 - R_1} r$ .

II.3.b. Pour  $\vec{j}_z$ :  $\vec{B}$  est orthoradial (symétrie par rapport au plan (oz, M)). Théorème d'Ampère  $\Rightarrow$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi r} \int_{R_1}^r j_0 \sin \alpha(r) 2\pi r dr = \frac{\mu_0 j_0}{r} \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \times \left[ R_1 \cos \alpha_1 - r \cos \alpha + \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\sin \alpha - \sin \alpha_1) \right].$$

$$\text{Pour } \vec{j}_\theta$$
:  $\vec{B}$  est axial  $B_z = \mu_0 \int_r^{R_2} j_0 \cos \alpha(r) dr = \mu_0 j_0 \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$ ;  $B_r = 0$ .

$$\text{II.3.c. } \frac{d\vec{f}}{d\tau} = \vec{j}_\wedge \vec{B} = \vec{u}_r \mu_0 j_0^2 \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[ \cos \alpha \sin \alpha_2 - \frac{\sin \alpha}{r} \left( R_1 \cos \alpha_1 + \frac{R_2 - R_1}{\alpha_2 - \alpha_1} (\sin \alpha - \sin \alpha_1) \right) \right].$$

$$\text{II.3.d. En } R_1 : (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \cos \alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{En } R_2 : \sin \alpha_2 \left[ \cos \alpha_2 + \frac{R_2 - R_1}{R_2} \frac{\sin \alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \frac{\pi}{2}} \right] = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0. B'_0 = \frac{2}{\pi} \mu_0 j_0 (R_2 - R_1) = \frac{2}{\pi} B_0.$$

$$\text{II.3.e. } \frac{d\vec{f}}{d\tau} = \vec{u}_r \mu_0 j_0^2 \left( \frac{R_2 - R_1}{\frac{\pi}{2}} \right)^2 (1 - \sin \alpha) \frac{\sin \alpha}{r} \cdot p'_1 = \frac{1}{R_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{df}{d\tau} r dr = \frac{B_0'^2}{2 \mu_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right).$$

$$\text{II.3.f. } \frac{p'_1}{p} = \frac{3(R_2 - R_1)}{R_2 + 2R_1} \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right) = 0,33. \text{ Une diminution des contraintes de } \frac{2}{3} \text{ est une trop faible amélioration pour la complexité de la bobine.}$$

## II.4. UTILISATIONS

Électro-aimants supraconducteurs dans les synchrotrons. Bobine en imagerie médicale à RMN.

## PARTIE III - DÉTERMINATION DES GRANDEURS CRITIQUES D'UN SUPRACONDUCTEUR

### III.1. MESURE DE LA TENSION ET DE L'INTENSITÉ

$$\text{III.1.a. } R = \rho \frac{4l}{\pi d^2} \Rightarrow \rho = \frac{U}{I} \frac{\pi d^2}{4l} = 9,4 \cdot 10^{-15} \Omega m.$$

III.1.b.  $\vec{B} n$  n'est pas uniforme à cause du champ propre  $\Rightarrow$  problème de la valeur à retenir.

### III.2. MESURE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

$$\text{III.2.a. } L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 \frac{1}{d^2} \pi R_s^2 \quad \text{longueur } \lambda = \frac{1}{d} 2 \pi R_s = \sqrt{\frac{4 \pi}{\mu_0}} lL = 1,26 \text{ m.}$$

III.2.b. Courant dans le cuivre :  $\Delta i = I \frac{R}{r+R} = \frac{I}{B} \Delta B$ .

Si  $R \ll r$ , on peut en déduire  $R = r \frac{\Delta B}{B} = 10^{-9} \Omega$  et une résistivité  $\rho = R \frac{\pi d^2}{4 \lambda} = 2,5 \cdot 10^{-17} \Omega \cdot m$ .

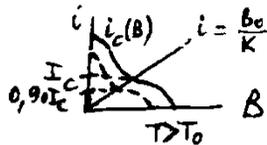
III.2.c. L'intensité dans la bobine supraconductrice en parallèle avec  $r$ , est solution de  $\frac{L}{r} \frac{di}{dt} + i = I$  soit  $i = I \left( 1 - e^{-\frac{r}{L} t} \right)$ . On ne détectera plus sa variation à partir de  $\frac{I-i}{I} = 1\% = e^{-\frac{r}{L} t}$ , d'où  $t = \frac{L}{r} \ln 100 = 366 \text{ s} = 6 \text{ min } 6 \text{ s}$ .

III.2.d.  $\rho$  mesurable diminue si  $r$  diminue et  $\lambda$  augmente (ce qui augmente  $L = \mu_0 \frac{\lambda^2}{4 \pi l}$ ).

Mais alors la constante de temps de mise en courant augmente : c'est la durée de cette phase qui limite la sensibilité.

III.3. MISE EN COURANT D'UNE BOBINE SHUNTÉE

III.3.a.



III.3.b. Quand  $i$  atteint  $I_c$ , l'effet Joule fait augmenter la température, ce qui entraîne le déplacement vers le bas de la limite supraconductrice, qui ne pourra alors être franchie dans l'autre sens que pour une intensité inférieure à  $I_c$ .

III.3.c. Entre  $I$  et  $I_c$ , la bobine est résistive si  $i$  décroît et supraconductrice si  $i$  croît.

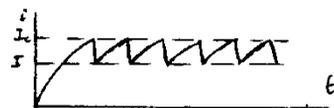
- si  $i$  croît, d'après 2°C,  $i = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{r}{L} t} \right)$

- si  $i$  décroît, l'équation différentielle  $L \frac{di}{dt} + (R+r) i = r I_0$  a pour solution

$$i = \frac{r I_0}{R+r} + \left( I_c - \frac{r I_0}{r+R} \right) e^{-\frac{R+r}{L} t}$$

Comme  $R$  est très grand,  $i \approx I_c \left[ 1 - \left( \frac{R}{L} - \frac{r}{L} \frac{I_0 - I_c}{I_c} \right) t \right]$ .

III.3.d. Pour la décroissance la constante de temps  $\frac{L}{R+r}$  est bien plus faible que  $\frac{L}{r}$  pour la croissance, d'où l'allure de la courbe :



Ce sont des oscillations de relaxation.

III.3.e. La période se réduit pratiquement au temps de croissance entre  $I$  et  $I_c$ , correspondant aux instants

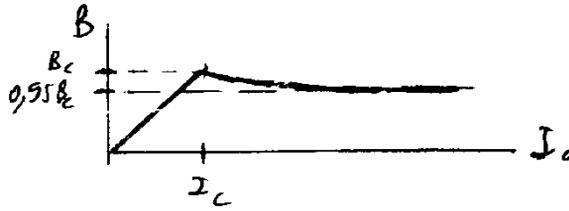
$$t_1 = \frac{L}{r} \ln \frac{I_0}{I_0 - 0,90 I_c} \text{ et } t_2 = \frac{L}{r} \ln \frac{I_0}{I_0 - I_c}, \text{ d'où } T = t_2 - t_1 = \frac{L}{r} \ln \frac{I_0 - 0,9 I_c}{I_0 - I_c}. T = 95 \text{ ms}.$$

III.3.f.  $-I_0 \gg I_c$  : la portion d'exponentielle entre I et  $I_c$  est pratiquement rectiligne. La courbe a l'allure d'une dent de scie de valeur moyenne  $\langle i \rangle = \frac{I + I_i}{2} = 0,95 I_c$ .

$-I_0 \approx I_c$ . Il faut calculer la moyenne entre  $t_1$  et  $t_2$ .

$$\langle e^{-\frac{r}{L}t} \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{r}{L}t} dt = \frac{0,10 I_c}{I_0 \ln \left( 1 + \frac{0,10 I_c}{I_0 - I_c} \right)} \text{ d'où } \langle i \rangle = I_0 - \frac{0,10 I_c}{\ln \left( 1 + \frac{0,10 I_c}{I_0 - I_c} \right)}$$

III.3.g. La valeur moyenne B est proportionnelle à  $\langle i \rangle$ . Pour  $I_0 < I_c$  la caractéristique est une droite. Pour  $I_0 > I_c$ ,  $\langle i \rangle$  est fonction décroissante de  $I_0$ , de  $I_c$  à  $0,95 I_c$ . D'où la courbe :



III.3.h. Dans une bobine épaisse le champ est plus grand vers le centre que vers la périphérie et la rupture de la supraconductivité est progressive, ainsi que l'apparition de la résistance dans la bobine.

## PARTIE IV - STABILITÉ THERMIQUE D'UN SUPRACONDUCTEUR

### IV.1. EFFET THERMIQUE AU PASSAGE À L'ÉTAT NORMAL

IV.1.a.  $K = c_1 l \frac{\pi d^2}{4} = 3,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .  $R = \rho_1 \frac{4l}{\pi d^2} = 508 \Omega$ .

IV.1.b. L'équation du circuit  $L \frac{di}{dt} + Ri = E$  a pour solution  $i = \frac{E}{R} + \left( i_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t}$ .  $\tau = \frac{L}{R} = 5,5 \text{ ms}$ .

IV.1.c. En l'absence d'échanges thermiques  $K \frac{dT}{dt} = Ri^2 = \frac{E^2}{R} + 2E \left( i_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + R \left( i_0 - \frac{E}{R} \right)^2 e^{-\frac{2R}{L}t}$ .

Compte-tenu de  $\frac{E}{R} \ll i_0$  et  $t \approx 2\tau$ , on obtient :

$$\Delta T = \frac{Ri_0^2}{K} \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{Li_0^2}{2K} \left( 1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right) = 1,0 \cdot 10^4 \text{ K. La température croît très vite, ce qui entraîne la destruction du dispositif.}$$

IV.1.d.  $\frac{R_{Cu}}{R_{Nb-Ti}} = \frac{d_l^2}{d^2 - d_l^2} \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Nb-Ti}} = \frac{1}{2400}$ . Le courant passe dans le cuivre et non dans l'alliage Nb Ti. Pour

le calcul de l'ordre de grandeur de  $\Delta T'$  on peut reprendre l'expression approchée de IV.1.c. en remplaçant R par  $R_{Cu} = \frac{4R}{2400}$ , ce qui conduit à  $\Delta T' \approx \Delta T \frac{2t}{600\tau} = 60 \text{ K}$ . L'augmentation de température est suffisamment lente pour que les échanges de chaleur aient le temps de s'établir.

IV.2. CONDUCTION THERMIQUE

IV.2.a. Champ vectoriel  $\vec{j}_Q$  lié à la puissance thermique P traversant la surface S par

$$P = \int_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \text{ ou } dP = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}.$$

IV.2.b. Premier principe  $\Rightarrow \frac{d^2U}{dt d\tau} \equiv \rho j^2 - \text{div } \vec{j}_Q$  avec  $d^2U = c dT d\tau$ , soit  $c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q = \rho j^2$ . Pour un

volume  $\tau$ , de capacité  $K = c\tau$  et de résistance R,  $K \frac{\partial T}{\partial t} + \int_{(S_G)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = Ri^2$ , où  $(S_G)$  limite le

volume ( $\tau$ ). En régime permanent :  $\text{div } \vec{j}_Q = \rho j^2$  ou  $\int_{(S_G)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = Ri^2$ .

IV.2.c.  $\vec{j}_Q = -k \text{ grad } T$ ; k en  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ .

IV.2.d.  $\Delta T + \frac{\rho}{k} j^2 = 0$ .

IV.3. CRITÈRES DE STABILITÉ

IV.3.a.  $[\alpha_1] = \frac{[P] [L]}{[P] [L]^{-2} [T]^{-1} [L]^3 [T]}$  est sans dimension.

L'équation du IV.2.b. conduit à  $h_1 (T - T_0) P_1 = \rho_1 \frac{i_0^2}{S_1}$ . La condition de stabilité  $T - T_0 < T_c - T_0$  impose  $\alpha_1 < 1$ .

IV.3.b. La même équation du IV.2.b., appliquée à un cylindre de rayon r donne  $\frac{dT}{dr} = -\frac{\rho_1 j^2}{k_1} \frac{\pi r^2}{2\pi r}$  qui

s'intègre en  $T = T_1 \approx \frac{\rho_1 j^2}{4 k_1} r^2 = T_1 - \frac{\rho_1 i_0^2}{4 k_1 S_1^2} r^2$ .

IV.3.c. A la limite du conducteur  $h_1 \left( T_1 - T_0 - \frac{\rho_1 i_0^2}{4 k_1} \frac{r_1^2}{S_1^2} \right) P_1 = \frac{\rho_1 i_0^2}{S_1}$ , d'où

$T_1 - T_0 = \frac{\rho_1 i_0^2}{h_1 S_1 P_1} \left( 1 + \frac{h_1 r_1}{2 k_1} \right) < T_c - T_0$  qui entraîne  $\alpha_1 < \frac{1}{1 + \frac{h_1 r_1}{2 k_1}}$ , condition plus contraignante

qu'en IV.3.a.

IV.3.d. Il n'y a pas de courant appréciable dans l'alliage (d'après IV.1.d.), ce qui entraîne une température constante et égale à  $T_1$ , et un saut de température nul au passage dans le cuivre. Dans le cuivre, le

même raisonnement qu'en IV.3.b., conduit à  $\frac{dT}{dr} = -\frac{\rho_2 j^2}{2 k_2} \left( r - \frac{r_1^2}{r} \right)$  qui s'intègre en

$$T = T_1 - \frac{\rho_2 j^2}{2 k_2} \left( \frac{r^2 - r_1^2}{2} - r_1^2 \ln \frac{r}{r_1} \right)$$

IV.3.e. La puissance linéique perdue par le câble est

$$h_2 \left( T_1 - T_0 - \frac{\rho_2 i_0^2}{2 k_2 (S_2 - S_1)} \left( \frac{1}{2\pi} - \frac{r_1^2}{S_2 - S_1} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \right) P_2 = \frac{\rho_2 i_0^2}{S_2 - S_1}$$

On en déduit la condition  $(T_c - T_0) \left[ 1 - \alpha_2 \frac{h_2 \rho_2}{2 k_2 2\pi} \left( 1 - \frac{2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) \right] > \alpha_2 (T_c - T_0)$  soit

$$\alpha_2 < \frac{1}{1 + \frac{h_2}{2 k_2} r_2 \left( 1 - \frac{2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right)}$$

Pour comparer les conditions sur  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , on peut prendre  $S_2 \approx 2 S_1 (r_2 \approx r_1 \sqrt{2})$  et  $h_2 \approx h_1$ .

1 - Influence sur les valeurs maximales de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  : elle est due essentiellement au rapport des conductivités thermiques  $\frac{k_2}{k_1} \approx 6000$ , ce qui permet de rapprocher  $\alpha_{2 \text{ maxi}}$  de 1 (valeur du IV.3.a.).

2 - Pour une valeur donnée de  $\alpha$ ,  $i_0$  varie essentiellement en  $\rho^{-1/2}$ , ce qui conduit à un facteur multiplicatif pour  $i_0$ , égal à  $\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \approx 28$ . Le gain est énorme.

#### IV.4. AMÉLIORATION DE LA STABILITÉ

On l'obtient en divisant le supraconducteur en brins minces dispersés dans la matrice de cuivre : à intensité donnée, la température du supraconducteur est, en moyenne, plus faible.

**C.A.P.E.S.****(Concours Externe)****COMPOSITION DE PHYSIQUE AVEC APPLICATIONS**Épreuve commune aux options : Physique et Chimie,  
Physique et Électricité appliquée - Session : 1990

par Daval

A

A.1. Lors d'un choc, il y a conservation de la quantité de mouvement totale du système.  
Lorsque ce choc est élastique l'énergie cinétique du système est aussi conservée.

A.2.1. Dans un référentiel galiléen le principe de l'inertie est vérifié : tout point isolé a une vitesse constante.

A.2.2. R1 sera galiléen si son mouvement par rapport à R, autre référentiel galiléen, est en translation rectiligne et uniforme.

A.2.3. Loi de composition des vitesses :

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_l$$

A.2.4. dans R  $\frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$

dans R', en utilisant la composition des vitesses :

$$\frac{1}{2} m_A (\vec{v}_0 - \vec{v}_e)^2 + \frac{1}{2} m_B (-\vec{v}_e)^2 = \frac{1}{2} m_A (\vec{v}_A' - \vec{v}_e)^2 + \frac{1}{2} m_B (\vec{v}_B' - \vec{v}_e)^2$$

on obtient alors :

$$\frac{1}{2} m_A v_e^2 - m_A \vec{v}_0 \vec{v}_e + \frac{1}{2} m_B v_e^2 = \frac{1}{2} m_A v_e^2 - m_A \vec{v}_A' \vec{v}_e + \frac{1}{2} m_B v_e^2 - m_B \vec{v}_B' \vec{v}_e$$

$$\text{soit } -\vec{v}_e (m_A \vec{v}_0) = -\vec{v}_e (m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B')$$

$$m_A \vec{v}_0 = m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B' \quad \text{on retrouve la conservation de la quantité de mouvement.}$$

A.3.1.  $m_A v_0 = m_A v_A' + m_B v_B'$

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$$

$$\text{soit } v_0 = v_A' + v_B'$$

$$v_0^2 = v_A'^2 + \alpha v_B'^2$$

$$\text{d'où } v_0^2 = (v_0 - \alpha v_B')^2 + \alpha v_B'^2$$

$$0 = -2 \alpha v_B' v_0 + v_B'^2 (\alpha^2 + \alpha)$$

on obtient  $v'_B = 0$  ou  $v'_B = \frac{2v_0}{1+\alpha}$

et  $v'_A = v_0$  ou  $v'_A = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}v_0$

la première solution ;  $v'_A = v_0$  et  $v'_B = 0$  est physiquement impossible

$$\Rightarrow v'_A = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}v_0 \quad \text{et} \quad v'_B = \frac{2v_0}{1+\alpha}$$

A.3.2. si  $m_A = m_B \Rightarrow \alpha = 1$   
 $v'_A = 0$  et  $v'_B = v_0$  il y a échange des vitesses.

A.4. Les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= \vec{v}'_A + \vec{v}'_B \\ \text{et } v_0^2 &= v'^2_A + v'^2_B \end{aligned} \quad \text{d'où } \vec{v}'_A \cdot \vec{v}'_B = 0$$

il y a 3 solutions

$v'_A = 0$  on retrouve le cas précédent  
 $v'_B = 0$  est physiquement impossible  
 $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$  sont orthogonaux.

Dans le plan du choc, il y a 4 inconnues (les coordonnées des vitesses  $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$ ) et 3 équations.

Le système ne peut être complètement déterminé.

$$\text{A.5.1. } \vec{v}_G = \frac{m_A \vec{v}_0}{m_A + m_B} = \frac{\vec{v}_0}{1+\alpha}$$

Le mouvement du centre de masse est rectiligne et uniforme d'après le principe de l'inertie puisque le système A + B est isolé.

Sa vitesse n'est pas affectée par le choc.

A.5.2.a. R\* doit être en translation rectiligne et uniforme. La vitesse du centre de masse doit être constante, il faut donc que le système soit isolé.

A.5.2.b. La loi de composition des vitesses permet d'écrire :

$$\vec{v}'_A = \vec{v}_0 - \vec{v}_G = \frac{\alpha}{1+\alpha} \vec{v}_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}'_B = -\vec{v}_G = -\frac{\vec{v}_0}{1+\alpha}$$

$$\text{d'où : } \vec{p}'_A = m_A \vec{v}'_A = \frac{m_A \alpha}{1+\alpha} \vec{v}_0 \quad \text{et} \quad \vec{p}'_B = m_B \vec{v}'_B = -\frac{m_A \alpha}{1+\alpha} \vec{v}_0$$

$$E^*_{CA} = \frac{1}{2} m_A v'^2_A = \frac{1}{2} m_A \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} v_0^2 \quad \text{et} \quad E^*_{CB} = \frac{1}{2} m_B v'^2_B = \frac{1}{2} m_A \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} v_0^2$$

A.5.3.

A.5.3.a. La quantité de mouvement totale est conservée :

$$\vec{p}'_A + \vec{p}'_B = \vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{0}$$

$$\text{d'où } \vec{p}'_A = -\vec{p}'_B$$

A.5.3.b. Avant le choc  $\vec{E}_c = \vec{E}_{cA} + \vec{E}_{cB} = \frac{1}{2} m_A \frac{v_0^2}{(1+\alpha)^2} (\alpha^2 + \alpha)$

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_A \frac{\alpha}{1+\alpha} v_0^2$$

Après le choc :  $E_c^* = \frac{p'^*_A{}^2}{2m_A} + \frac{p'^*_B{}^2}{2m_B} = \frac{p'^*_A{}^2}{2m_A} = \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) = \frac{p'^*_A{}^2}{2m_A} \frac{\alpha+1}{\alpha}$

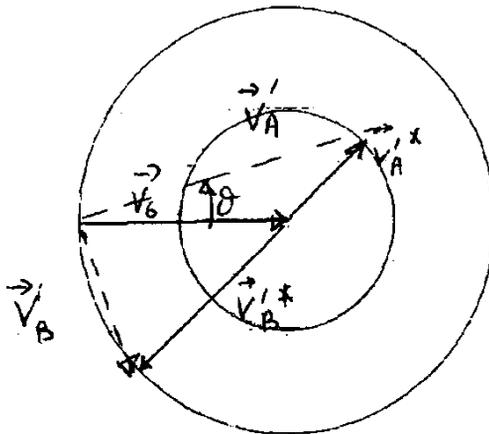
d'où :  $p'^*_A{}^2 = \left(\frac{m_A \alpha}{1+\alpha} v_0\right)^2 = p_A^2$  le choc ne change pas les modules des quantités de mouvement.

A.5.3.c. Dans  $R^*$ , le choc conserve aussi le module des vitesses.

$$\text{d'où } \|\vec{v}'_A\| = \|\vec{v}_A\| = \frac{\alpha v_0}{1+\alpha}$$

$$\text{et } \|\vec{v}'_B\| = \|\vec{v}_B\| = \|\vec{v}_G\| = \frac{\alpha v_0}{1+\alpha}$$

$$\text{et } \vec{v}'_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_G; \quad \vec{v}'_B = \vec{v}'_B + \vec{v}_G$$



dans  $R^*$  les vecteurs  $\vec{v}'_A$  et  $\vec{v}'_B$  sont de sens contraires et  $\frac{\|\vec{v}'_B\|}{\|\vec{v}'_A\|} = \alpha$

l'angle  $\theta$  est maximal lorsque la direction de  $\vec{v}'_A$  est tangente au cercle de rayon  $\|\vec{v}'_A\|$

$$\text{d'où } \sin \theta_m = \frac{\|\vec{v}'_A\|}{\|\vec{v}_G\|} = \alpha \quad \text{numériquement : } \theta_m = 30^\circ$$

## B - RESSORT

$$B.1.1. \quad \vec{f} = -k x \vec{i} = -\text{grad } E_p$$

$$\text{et } dE_p = -\vec{f} \cdot d\vec{l} = kx dx$$

d'où  $E_p = \frac{1}{2} kx^2$  en prenant comme état de référence le ressort détendu.

l'énergie mécanique  $\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m_A v^2$  est constante. La longueur minimale est obtenue lorsque la vitesse est nulle.

$$D'où : \quad \frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{1}{2} k x_m^2$$

$$x_m = \sqrt{\frac{m_A}{k}} v_0 \quad \text{et } l_m = l_0 - \sqrt{\frac{m_A}{k}} v_0$$

B.1.2.

a. le solide est soumis : à son poids  $\vec{p} = m_A \vec{g}$ , à l'action de la table  $\vec{R}$  verticale en absence de frottement, et à la tension du ressort  $\vec{T}$

b.  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m_A \vec{a}$  d'après la relation fondamentale de la dynamique. En projetant sur  $x' x$  :

$$-kx = m_A \ddot{x}$$

en posant  $\omega_0^2 = \frac{k}{m_A}$ , on obtient :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

c. c'est un oscillateur harmonique dont la solution générale est de la forme :

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$v(t) = -A \omega_0 \sin \omega_0 t + B \omega_0 \cos \omega_0 t$$

d'après les conditions initiales :

$$x(0) = A = 0$$

$$v(0) = B \omega_0$$

$$\text{on obtient : } x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

d. le contact cesse lorsque  $x(\tau) = 0$

$$\Rightarrow \sin \omega_0 \tau = 0$$

$$\omega_0 \tau = k \pi \quad \text{avec ici } k = 1$$

$$d'où : \quad \tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m_A}{k}}$$

Application numérique :

$$x(t) = 5 \cdot 10^{-2} \sin 5t \quad (\text{en m})$$

$$\tau = 0,0628 \text{ s}$$

$$l_m = 0,1 \text{ m}$$

B.2.1. La quantité de mouvement totale n'est pas nulle. Les deux solides ne peuvent être immobiles simultanément. Par conséquent il y aura toujours une énergie cinétique.

B.2.2. dans  $R^*$  :  $\vec{P}_A^* + \vec{P}_B^* = \vec{0}$

on peut avoir  $\|\vec{P}_A^*\| = \|\vec{P}_B^*\| = 0$

Les deux solides peuvent être simultanément au repos. Toute l'énergie cinétique initiale aura été transférée en énergie potentielle.

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_A \frac{\alpha}{1+\alpha} v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_0^2$$

$$\text{d'où : } \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_0^2 = \frac{1}{2} k x_m^2$$

$$x_m = \sqrt{\frac{m_A m_B}{k(m_A + m_B)}} v_0$$

longueur minimale :

$$l_m = l_0 - x_m$$

$$l_m = l_0 - \sqrt{\frac{m_A m_B}{k(m_A + m_B)}} v_0$$

Application numérique :  $E_c^* = 9,73 \cdot 10^{-3} \text{ J}$  ;  $l_m = 0,115 \text{ m}$

B.2.3.a.

Cette vitesse a été calculée précédemment (A.5.1.)  $\vec{v}_G = \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{v}_0 = \frac{v_0}{1+\alpha}$

La somme des forces extérieures, appliquées au système, est nulle.

D'après la relation fondamentale de la dynamique, l'accélération du centre de masse est nulle. La vitesse du centre de masse est constante et n'est pas affectée par l'interaction.

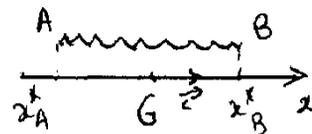
Le référentiel du centre de masse, ayant par conséquent un mouvement de translation rectiligne et uniforme, est galiléen. Dans ce référentiel, il n'y aura pas de force d'inertie.

B.2.3.b. G est immobile, écrivons la relation fondamentale de la dynamique successivement pour les solides A et B

$$A : \vec{P}_A + \vec{R}_A + \vec{T}_A = m_A \vec{a}_A^*$$

$$B : \vec{P}_B + \vec{R}_B + \vec{T}_B = m_B \vec{a}_B^*$$

où  $\vec{T}_A$  et  $\vec{T}_B$ , forces de tensions du ressort en A et B, sont opposées.



$$\vec{T}_A = k(x_B^* - x_A^* - l_0) \vec{i}$$

d'où en projetant sur l'axe Gx

$$k(x_B^* - x_A^* - l_0) = m_A a_A^*$$

$$\text{et } -k(x_B^* - x_A^* - l_0) = m_B a_B^*$$

Soit :

$$\ddot{x}_A^* + \frac{k}{m_A} (x_A^* - x_B^*) = -\frac{k}{m_A} l_0$$

$$\ddot{x}_B^* + \frac{k}{m_B} (x_B^* - x_A^*) = -\frac{k}{m_B} l_0$$

en retranchant ces deux équations et en posant  $x = x_B^* - x_A^*$  où  $x$  est la longueur du ressort, on obtient :

$$\ddot{x} + k \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_A} \right) x = k l_0 \left( \frac{1}{m_B} + \frac{1}{m_A} \right)$$

on peut remarquer que  $\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} = \frac{1}{\mu}$  où  $\mu$  est la masse réduite du système d'où :

$$\ddot{x} + \frac{k}{\mu} x = \frac{k l_0}{\mu}$$

en posant  $\omega^2 = \frac{k}{\mu} = k \frac{m_A + m_B}{m_A m_B}$  on trouve l'équation différentielle:

$\ddot{x} + \omega^2 x + \omega^2 l_0$  dont la solution la plus générale est :

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + l_0$$

A et B sont deux constantes déterminés par les conditions initiales

$$\text{à } t = 0 \quad x = A + l_0 = l_0 \Rightarrow A = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_B^* - v_A^* = -v_0 = B \omega$$

$$2(t) = l_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$x(t) = l_0 - v_0 \sqrt{\frac{m_A m_B}{k(m_A + m_B)}} \sin \left( \sqrt{\frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}} t \right)$$

B.2.3.c. Lorsque  $x(\tau') = 0$ ;  $\sin(\omega \tau') = 0$

$$\tau' = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{m_A m_B}{k(m_A + m_B)}}$$

$$v_B^* - v_A^* = \dot{x} = -v_0 \cos \omega t$$

lorsque  $t = \tau' \Rightarrow \cos \omega \tau' = -1$

$$\text{d'où } v_B^* - v_A^* = v_0$$

de plus G étant le centre de masse

$$m_A x_A^* + m_B x_B^* = 0$$

d'où  $m_A v_A^* + m_B v_B^* = 0$  (ce qui vérifie que la quantité de mouvement est nulle dans  $R^*$ )

on obtient le système :

$$m_A v_A^* + m_B v_B^* = 0$$

$$-v_A^* + v_B^* = v_0$$

dont les solutions sont :

$$v_B^* = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_0 \quad \text{et} \quad v_A^* = -\frac{m_B}{m_A + m_B} v_0$$

$$v_B^* = \frac{1}{1 + \alpha} v_0 \quad \text{et} \quad v_A^* = -\frac{\alpha}{1 + \alpha} v_0$$

la loi de composition des vitesses permet de déterminer les vitesses dans le référentiel du laboratoire

$$\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}_G \quad \text{avec} \quad \vec{v}_G = \frac{\vec{v}_0}{1 + \alpha}$$

$$\text{d'où} \quad v_B = \frac{2}{1 + \alpha} v_0 \quad \text{et} \quad v_A = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} v_0$$

on retrouve les résultats du choc élastique.

*Application numérique* : si  $\alpha = 1$   $v_B = v_0$  et  $v_A = v_0$

$$\underline{\omega = 7,07 \text{ rad.s}^{-1}} \quad \underline{\tau' = 0,44 \text{ s.}}$$

### C - INTERACTION DE DEUX PROTONS

C.1.1. La masse, la charge, l'énergie totale et la quantité de mouvement sont conservées au cours de l'interaction.

C.1.2. Les raisons sont les mêmes qu'au B.2.1. la quantité de mouvement totale n'est nulle que dans le référentiel du centre de masse.

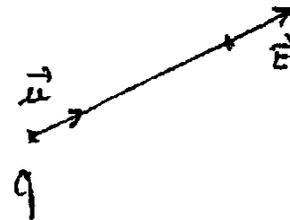
C.1.3.  $\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$  le champ est radial.

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad \text{et} \quad dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{on obtient} \quad V = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

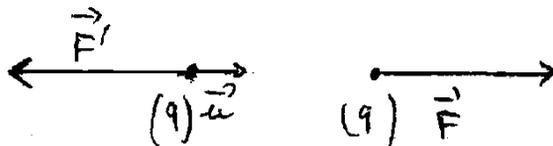
- les surfaces équipotentielles sont des sphères de centre 0.

- les lignes de champs, orthogonales aux surfaces équipotentielles, sont les rayons.



C.1.4. Les forces sont opposées

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{u}$$



$$E_p = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 r} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

C.1.5. D'après les calculs précédents :

$$E_c^* = \frac{1}{4} m v_0^2$$

$$\text{l'énergie totale vaut : } E = \frac{1}{4} m v_0^2 + \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r_0}$$

$E = E_c^* + E_p$  l'énergie potentielle est maximale lorsque l'énergie cinétique est minimale ; celle-ci est alors nulle dans le référentiel du centre de masse d'où :

$$E_{p_{\max}} = \frac{1}{4} m v_0^2 + \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r_0}$$

$$\text{d'autre part } E_{p_{\max}} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 r_{\min}}$$

ce qui permet de déterminer la distance minimale entre les deux protons (leur trajectoire étant la même droite).

$$r_{\min} = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 E_{p_{\max}}}$$

lorsque leur distance est minimale, leur vitesse est nulle dans le référentiel du centre de masse.

$$v_1^* = v_2^* = 0$$

$$\text{on en déduit } v_1 = v_2 = v_G = \frac{v_0}{2}$$

$$\text{si } r_0 \rightarrow \infty ; \quad r_{\min} = \frac{e^2}{\pi \epsilon_0 m v_0^2}$$

$$\text{Application numérique : } r_{\min} = 1,38 \cdot 10^{-13} \text{ m}$$

C.2.1.  $p + p \rightarrow p + p + p + p$

ce choc n'est pas élastique car la masse n'est pas conservée.

C.2.2. Il y a conservation de la charge, de l'énergie totale, de la quantité de mouvement ... etc.

C.2.3. Les quatre particules ne pouvant être simultanément immobiles que dans le référentiel du centre de masse  $R^*$ .

$$\text{alors } E^* = 4 m c^2$$

$$\text{l'énergie cinétique minimale est alors } E_c^* = 2 m c^2$$

par changement de référentiel il y a invariance de la norme du quadrivecteur quantité de mouvement,

$$\text{énergie } \hat{E} \left( p ; \frac{E}{c} \right)$$

$$E^{*2} = E^2 - p^2 c^2$$

$$\text{dans } R^* : p^* = 0$$

$$(4 mc^2)^2 = (2 mc^2 + Ec)^2 - p^2 c^2$$

$$\text{et } p^2 c^2 = (mc^2 + Ec)^2 - m^2 c^4$$

$$p^2 c^2 = Ec^2 + 2 mc^2 Ec$$

$$\text{on en déduit : } 16 m^2 c^4 = 4 m^2 c^4 + Ec^2 + 4 mc^2 Ec - (Ec^2 + 2 mc^2 Ec)$$

$$12 m^2 c^4 = 2 mc^2 Ec$$

$$Ec = 6 mc^2 \quad \text{dans le référentiel du laboratoire.}$$

$$Ec = (\gamma - 1) mc^2 \quad \text{avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{facteur de Lorentz.}$$

$$\gamma = \frac{Ec}{mc^2} + 1 = 7$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

$$\text{numériquement : } \beta = \frac{v}{c} = 0,9897 ; \quad v = 2,967 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

C.2.4. Le référentiel du laboratoire est barycentrique.

Chaque proton a une énergie cinétique :

$$E_{c_1}^* = E_{c_2}^* = mc^2$$

$$\gamma = \frac{Ec}{mc^2} + 1 = 2$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,866 \quad \text{et } v = 2,596 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

## D - ÉLECTRICITÉ

D.1. D'après la relation fondamentale de la dynamique

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

$$\vec{v}_{(t)} = -\frac{e}{m} \vec{E} t + \vec{v}_0$$

D.2. si  $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$ , c'est à dire si toutes les directions des vitesses sont équiprobables après le choc.

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e}{m} \vec{E} \langle t \rangle = -\frac{e}{m} \vec{E} \tau,$$

$\tau$  représente la durée moyenne entre deux chocs.

$$\text{D.3.1. } -e \vec{E} - h \nu = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{h}{m} \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

$$D.3.2. \quad \vec{v}_{(t)} = -\frac{e}{h} \vec{E} + \vec{A} e^{-h/m t}$$

quand  $t \rightarrow \infty$   $\vec{v} \rightarrow -\frac{e}{h} \vec{E}$ . Lorsque la vitesse limite est atteinte, l'accélération est nulle.

$$\text{en identifiant : } \tau = \frac{m}{h}$$

$$D.4.1. \quad \vec{j} = -n e \vec{v} \quad \text{où } -ne \text{ représente la charge volumique des électrons libres.}$$

$$\vec{j} = -ne \left( -\frac{e}{m} \tau \vec{E} \right) = \frac{n e^2}{m} \tau \vec{E}$$

cette relation est la loi d'Ohm locale. Son expression macroscopique est  $U = RI$

$$D.4.2. \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\sigma = \frac{n e^2}{m} \tau$$

D.5. Le nombre d'électrons libres par unité de volume étant égal au nombre d'atomes

$$n = N \frac{\mu}{A} \quad \text{où } N \text{ est le nombre d'Avogadro, .}$$

$$\text{d'où : } \tau = \frac{N \mu e^2}{A m} \tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m \tau A}{N e^2 \mu}$$

$$\text{Application numérique : } \tau = 2,52 \cdot 10^{-14} \text{ s.}$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{j}\|}{ne} = \frac{I}{ne S}$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{I A}{N \mu e S}$$

$$\text{Application numérique : } \|\vec{v}\| = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$$

## E - ELECTRICITÉ

E.1.1. A l'instant initial ( $t = 0$ ) la charge du condensateur est nulle  $q = 0 \Rightarrow V_s = 0$  ; il se comporte comme un court circuit.

Lorsque  $t \rightarrow \infty$   $i \rightarrow 0$  le condensateur se comporte comme un coupe circuit.

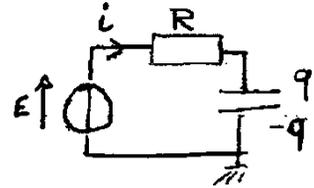
$$\text{à } t = 0 \quad v_s = 0 ; \quad i = \frac{E}{R} ; \quad w_c = 0$$

$$\text{à } t \rightarrow \infty \quad v_s = E ; \quad i = 0 ; \quad w_c = \frac{1}{2} CE^2$$

E.1.2.a.  $-E + Ri + v_s = 0$  avec  $v_s = \frac{q}{c}$  et  $i = \frac{dq}{dt} = c \frac{dv_s}{dt}$

l'équation différentielle devient :

$$RC \frac{dv_s}{dt} + v_s = E \Rightarrow \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$



E.1.2.b.  $\tau$  étant homogène à un temps est exprimé en seconde.

E.1.2.c.  $v_s(t) = E + A e^{-t/\tau}$

$v_s$  est une fonction continue.

à  $t = 0$   $0 = E + A$

d'où :  $v_s(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$

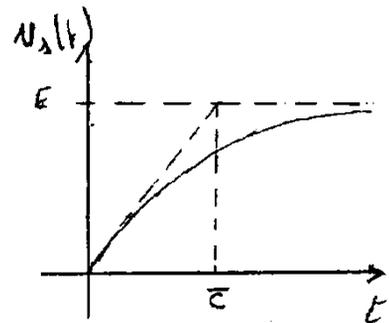
asymptote :  $t \rightarrow \infty \Rightarrow v_s \rightarrow E$  pente initiale  $\left(\frac{dv_s}{dt}\right)_0 = \frac{E}{\tau}$

- l'intersection de la tangente à l'origine et de l'asymptote est réalisée lorsque :

$$\frac{E}{\tau} t = E \Rightarrow t = \tau$$

Applications numériques :

$\tau = 10^{-3}$  s, pente initiale  $\left(\frac{dv_s}{dt}\right)_0 = 10$  V.s.<sup>-1</sup>



E.2.1.a. On peut utiliser les vecteurs de Fresnel :

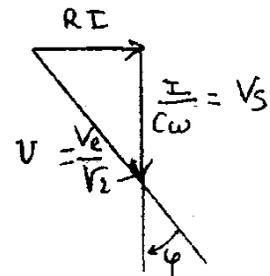
$v_s(t) \Rightarrow$  Voie II

$v_e(t) \Rightarrow$  Voie I

$v_s(t)$  est en retard sur  $v_e(t)$  la courbe  $\alpha$  est en retard sur  $\beta$

d'où :  $\alpha \Rightarrow v_s \Rightarrow$  Voie II

$\beta \Rightarrow v_e \Rightarrow$  Voie I



E.2.1.b.  $\frac{|\phi|}{2\pi} = \frac{\theta}{T}$  et  $\frac{\theta}{T} = \frac{1}{8}$  (mesuré graphiquement)

on obtient :  $|\phi| = \frac{\pi}{4}$  rad

$$E.2.1.c. \quad \tan \varphi = R C \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\tan \varphi}{R C}$$

$$\omega = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}; \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 159 \text{ Hz}; \quad T = \frac{1}{f} = 6,28 \text{ m.s}$$

$$E.2.1.d. \quad \text{Aux bornes du condensateur : } v_c = \frac{I}{C \omega} = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad U = \frac{v_e}{\sqrt{2}}$$

$$\text{d'où : } v_c = \frac{v_e}{2} = \underline{100 \text{ V}}$$

$$E.2.1.e. \quad v_s(t) = v_c \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\text{soit } v_s(t) = 100 \sqrt{2} \cos(1000 t - \frac{\pi}{4})$$

E.2.2. Calculons l'impédance de l'ensemble :

$$z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}$$

$$I = \frac{v_e}{\sqrt{2} \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}}$$

la tension efficace aux bornes du condensateur est :

$$v_c = \frac{I}{C \omega} = \frac{v_e}{\sqrt{2} \sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

lorsque  $\omega' = 2\omega$

$$v'_c = \frac{v_e}{\sqrt{2} \sqrt{1 + 4 R^2 C^2 \omega^2}} = \frac{v_e}{\sqrt{10}}; \quad v'_c = 63,2 \text{ V}$$

$$E.2.3.a. \quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (R C \omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}$$

$$\text{quand } \omega \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad G \rightarrow 1 \quad \text{et } H \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad G \rightarrow 1 \quad \text{et } H \rightarrow -\infty$$

(asymptote de pente  $-20 \text{ dB / décade}$ )

c'est un filtre passe bas.

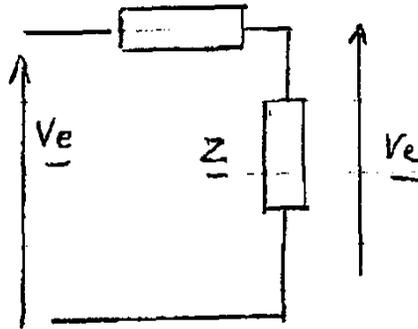
$$E.2.3.b. \quad H_{\max} = 0 \quad \text{et} \quad H_{(\omega_c)} = -3 \text{ dB}$$

$$\text{d'où : } -3 = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_c^2 \tau^2}}$$

$$\log(1 + \omega_c^2 \tau^2) = 0,3 \quad \Rightarrow \quad 1 + \omega_c^2 \tau^2 = 2$$

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R C}$$

E.2.4.a. en utilisant la notation complexe, le gain complexe est :



$$\underline{G} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_c}} = \frac{\underline{z}}{\underline{z} + \underline{z}'}$$

avec  $\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{R} + j\omega C$

$$\underline{z} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \quad \text{et} \quad \underline{z}' = \frac{R'}{1 + j\omega R' C'}$$

$$\underline{G} = \frac{\frac{R}{1 + j\omega RC}}{\frac{R}{1 + j\omega RC} + \frac{R'}{1 + j\omega R' C'}}$$

$$\underline{G} = \frac{R(1 + j\omega R' C')}{R + R' + j\omega RR'(C + C')}$$

$$\underline{G} = \frac{R}{R + R'} \frac{1 + j\omega R' C'}{1 + j\omega \frac{RR'}{R + R'}(C + C')}$$

le gain est le module du gain complexe

$$G = |\underline{G}| = \frac{R}{R + R'} \frac{|1 + j\omega R' C'|}{|1 + j\omega \frac{RR'}{R + R'}(C + C')|}$$

$$G = \frac{R}{R + R'} \sqrt{\frac{1 + (\omega R' C')^2}{1 + \left[\frac{\omega RR'}{R + R'}(C + C')\right]^2}}$$

E.2.4.b. G est indépendant de  $\omega$  si  $R' C' = \frac{RR'}{R + R'}(C + C')$

$$\Rightarrow (R + R') R' C' = RR' (C + C')$$

$$\Rightarrow R' C' = RC$$

E.2.4.c. Le diviseur de tension ne dépend pas la fréquence, R et C pouvant représenter l'entrée d'un oscillographe.

# C.A.P.E.S.

(Concours Externe)

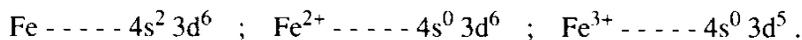
COMPOSITION DE CHIMIE

Épreuve commune aux options - Session : 1990

par Odile DURUPHTY

## A. CHIMIE MINÉRALE ET GÉNÉRALE : LE FER

### A.1. Structure électronique

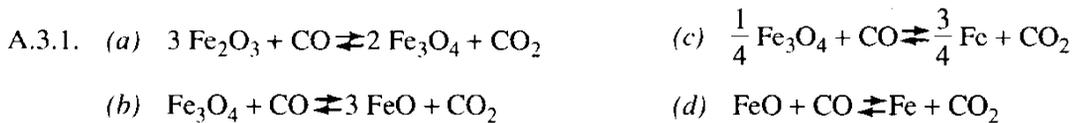


### A.2. Variétés allotropiques du fer

A.2.1. Deux schémas cc et cfc.

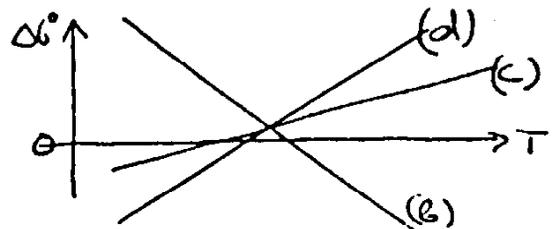
A.2.2.  $\rho_\alpha = \frac{2 M}{Na^3} = 7600 \text{ kg/m}^3$        $\rho_\gamma = \frac{4 M}{Na^3} = 7630 \text{ kg/m}^3$ .

### A.3. Réduction des oxydes de fer - Sidérurgie

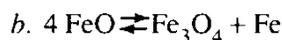


A.3.2.  $\forall T \quad \Delta_a G^\circ \ll 0 \quad K \gg 1$  (a) quasi totale dans le sens réduction de  $Fe_2O_3$ .

A.3.3. (l'échelle doit être respectée et pas plus de 3 points calculés par droite).



A.3.4. a. concourantes à  $T = 835 \text{ K} \Rightarrow (\Delta G^\circ = 1630 \text{ J/mol})$



c.  $v = \begin{matrix} 5 & - & 2 & + & 2 & - & 4 & = & 1 & \text{ou} & v_{\text{réduite}} = 0 \\ \text{(Fe, FeO)} & & \text{(2 équil.)} & & \text{(T, P)} & & \text{(1 gaz)} & & & & \text{car } \Delta v_{\text{gaz}} = 0 \\ Fe_3O_4, CO & \text{indép.)} & & & & & \text{3 solides)} & & & & \end{matrix}$

$\forall P$  la coexistence des 5 corps n'est possible qu'à 835 K.

# Agrégation

## COMPOSITION DE CHIMIE

Épreuve A : Composition de Chimie - Session de 1990

par D. DANION, J.P. FOULON, M. GOLFIER et G. VILLE

### Parties Polymères

#### A. Généralités.

$$I - 1. \quad \overline{Mn} = \frac{n_1.M_1 + n_2.M_2}{n_1 + n_2} \quad \overline{Mm} = \frac{n_1.M_1^2 + n_2.M_2^2}{n_1.M_1 + n_2.M_2}$$

	Mn	Mm	I
a	25000	25160	1,01
b	-	29000	1,16
c	-	46160	1,85

On constate donc que I augmente quand le polymère devient hétérogène.

I - 2. La diffusion du solvant 1 est l'osmose, en raison de l'inégalité des potentiels chimiques du solvant 1 entre le solvant pur et la solution.

Il vient à l'équilibre :

$$\mu_1(T, P + \Pi) = \mu_1(T, P) + \int_P^{P+\Pi} (\delta\mu/\delta P) dp$$

si solution diluée, il vient :

$$\Pi.V_1^* = n_2/n_1 . RT$$

soit  $\Pi.V = n_2RT$  d'où  $\Pi = RT.C_2$

Application :

$$\Pi_i = RT. C_i/M_i \text{ (massique)}$$

$$\Pi = \sum_i \Pi_i = RT. \sum_i C_i/M_i$$

mais  $\Pi = RT \sum_i C_i/\overline{M}$  par définition générale.

Explicitons  $\overline{M}$ :

$$\Sigma C_i / \overline{M} = \Sigma C_i / M_i : \text{ donc } \overline{M} = \frac{\Sigma C_i}{\Sigma \frac{C_i}{M_i}} = \frac{\Sigma n_i M_i / V}{\Sigma \frac{n_i M_i / V}{M_i}}$$

Soit  $\overline{M} = \Sigma n_i M_i / \Sigma n_i = \overline{M}_n !$

Le tracé de  $\Pi/C = f(c)$  avec  $\Pi = \rho g \cdot h$  donne :

$$\overline{M}_n = 54 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

II - 1. : l'état vitreux évoluait vers un écoulement visqueux via l'état caoutchoutique.

II - 2 : la tacticité est la régularité de l'arrangement de la chaîne polymérique ; la chaîne isotactique donne le plus fort taux de cristallinité.

II - 3. : la réticulation est la création de ponts intermoléculaires qui augmentent le module de Young ( $\tau$ ).

II - 4. : La nature de la copolymérisation permet d'améliorer  $\tau$ .

III - 1. : polymères d'origine animale (laine, soie ...)  
polymères d'origine végétale (lin, coton, jute ...)

III - 2. :	poly-addition :	poly-condensation :
. monomère à 1 fonction	. monomère à 2 fonctions	
. chaînes amorcées et longues	. chaînes courtes et non amorcées	
. quelques secondes	. quelques heures	

III - 3.1.  $\Delta_r G < 0$

III - 3.2  $\Delta_r H_p = \Delta_i H_{pr.} + i \Delta_{pr.} H + \Delta_t H \approx \Delta_{pr.} H$  (chaîne longue).

III - 3.3  $\Delta_r H_p = n E_{C=C} - 2n E_{C-H} + E_{C-C}$   
donc :  $\Delta_r H_p / n = - 84 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  (exothermique)

III - 3.4  $\Delta_r S_p < 0$

III - 3.5  $\Delta G = \Delta H_p - T \Delta S_p$  en général, d'où :  
 $T_{pf} = \Delta H_p / \Delta \delta p = 456 \text{ K}$

III - 4 : seule la bakélite était thermodurcissable.

## B - Polycondensation.

I - 1. L'éthylène et le propène proviennent du vapocraquage et du réformage des coupes pétrolières.

I - 2.1.  $\text{FeCl}_3$  est un acide de Lewis qui active  $\text{Cl}_2$ , et on a une addition électrophile classique suivie d'une régénération de  $\text{FeCl}_3$ . on obtient le dichloroéthane A.

La déshydratation thermique de A est un mécanisme radicalaire :

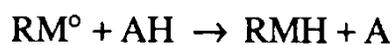
- $\text{Cl-CH}_2\text{-CH}_2\text{-Cl} \longrightarrow \text{Cl} + \text{CH}_2\text{-CH}_2\text{-Cl}$  (amorçage)
- $\text{Cl} + \text{CH}_2\text{-CH}_2\text{-Cl} \longrightarrow \text{HCl} + \text{ClCH}_2\text{-CH}_2\text{-Cl}$
- $\text{CHCl-CH}_2\text{Cl} \longrightarrow \text{Cl-CH}=\text{CH}_2 + \text{Cl}$
- recombinaison des radicaux.

I - 2.2. 
$$\text{CH}_2 = \text{CH}_2 + 2\text{HCl} + 1/2 \text{O}_2 \xrightarrow{(\text{CuCl}_2)} \text{CH}_2\text{Cl} - \text{CH}_2\text{-Cl} + \text{H}_2\text{O}$$

I - 3  $\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$  en présence de  $\text{AlCl}_3$  donne  $\text{C}_2\text{H}_5^+$  qui conduit à une S.E. sur le benzène en libérant  $\text{HCl}$  qui, à son tour, réagit avec l'éthylène pour régénérer  $\text{C}_2\text{H}_5^+$  : le processus est catalytique.

II - 1.1. Les initiateurs de polymérisation sont : par exemple le peroxyde de benzoyle et le bis-isoazobutyronitrile.

II - 1.2. Les réactions de transfert sont :



$\text{AH}$  : monomère, polymère.

II - 1.3. Les transferts augmentent la ramification des chaînes, donc le degré de polymérisation diminue

II - 2.1.  $V_a = 2f \cdot k_d (A)$

II - 2.2.  $V_p = k_p (M) \Sigma (R_i^\ominus)$

$V_a = V_t$  par hypothèse des chaînes longues.

donc :  $V_p = k_p \underbrace{\sqrt{2f k_d / k_t}}_K (A)^{1/2} (M)$

II - 2.3.  $K = 1,4 \cdot 10^{-3}$  numériquement.

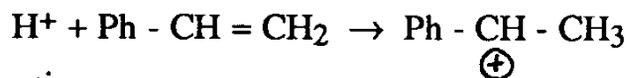
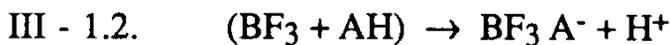
II - 2.4.  $m_0 - m = m_0 (1 - e^{-k_d \cdot t}) = 1,379 \text{ mg.}$

Or, dans le polymère il y a 0,7067 mg.

Donc  $f = 0,7067 / 1,379 = 51\%$ .

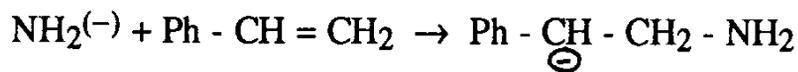
II - 3. L'isomérisation de la chaîne (transfert) entraîne un polymère de basse densité.

III - 1.1. Seuls les substituants "donneurs" donnent des polymérisations cationiques (éther vinylique et isobutène).



puis polymérisation ...

III - 2.1. La polymérisation anionique du styrène est :



qui sert de nucléophile vis à vis du styrène.

III - 2.2. Un solvant protique risquerait de bloquer la charge (-) de la chaîne.

III - 2.3. et II - 2.4  $\overline{DP_n} = (M)/(A)$

III - 2.5. La vitesse augmente dans le THF à cause de la plus grande dissociation de la paire d'ions : charge négative + cation  $Li^+$ .

III - 2.6. Il a été montré l'existence d'un complexe de type  $\Pi$  entre le diène et le  $\text{Li}^{(+)}$ , qui bloque l'alcadiène dans la configuration s-cis.

III - 3.1. Les catalyseurs de type Ziegler-Natt sont :  $\text{TiCl}_3$ ,  $\text{Et}_3\text{Al}$  ou  $\text{VCl}_4$ ,  $\text{Et}_2\text{Zn}$ .

III - 3.2. Une haute stéréospécificité de polymérisation augmente la densité par ajout d'héxène-1 (p. ex.), la copolymérisation obtenue permet de contrôler la ramification.

### C - Polycondensation.

I - 1. C'est :  $-(\text{S} - \text{CH}_2 - \underset{\text{O}}{\underset{||}{\text{C}}} -)_n$

I - 2. Thio ester cyclique  $\rightarrow$   $-(\text{S} - \text{CH}_2 - \underset{\text{O}}{\underset{||}{\text{C}}} - \text{S} - \text{CH}_2 - \underset{\text{O}}{\underset{||}{\text{C}}} -)_n$

I - 3 C'est le même motif.

I - 4. Mais  $M$  est plus grande dans le second cas.

II - 1. Polycondensation & élimination : polyamide ( $-\text{HCl}$ ,  $-\text{H}_2\text{O}$ )

II - 2. Sans élimination : diisocyanate + diol  $\rightarrow$  polyméthane.

III - 1.	Polyester	:	diacide + dialcool
	Polyamide	:	diacide + diamine
	Polyméthane :		dialcool + diisocyanate
	Polyépoxy	:	époxyde + dialcool.

III - 2.  $\text{PA}_6$  : acide aminé  $\rightarrow$  lactame  $\rightarrow$  "nylon"

$\text{PA}_{pq}$  : diamone p + diacide q

III - 3.  $M_n = 2/(0,056 + 0,022) \cdot 10^{-3}$  (= 25600  $\text{g} \cdot \text{mole}^{-1}$ )

Cette méthode ne permet pas de voir les ramifications éventuelles.



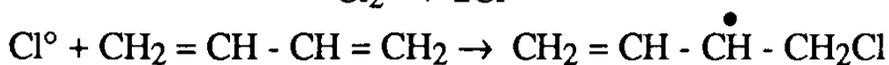
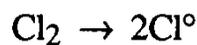
III - 4.2.  $p = N_0 - N/N_0 = 1/1 - p$

III - 4.3.  $\overline{\text{DP}}_n = N.kt + 1$  par intégration.

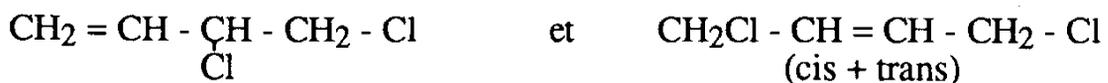
III - 4.4. et 4.5.  $\overline{\text{DP}}_n$  tend vers une limite quand le temps augmente, cela est dû au caractère réversible de la réaction ( $\text{PA}_{11} + \text{H}_2\text{O}$ ).

III - 4.6. Si  $\overline{\text{DP}}_n$  varie avec  $\sqrt{t}$ , alors la cinétique du troisième ordre peut l'interpréter car :  $\overline{\text{DP}}_n^2 = 1/(1 - p)^2$  !

IV - 1.1. L'addition du chlore est un mécanisme radicalaire à 300°C, sur le butadiène (réaction en chaîne) :



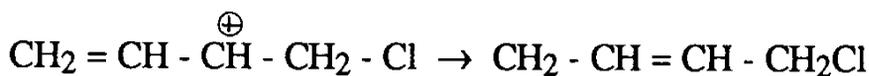
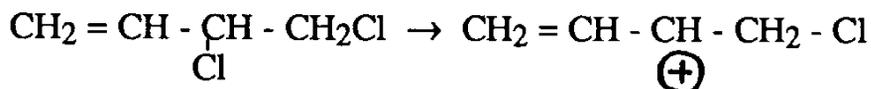
qui peut s'écrire :  $\overset{\bullet}{\text{C}}\text{H}_2 - \text{CH} = \text{CH} - \text{CH}_2\text{Cl}$  par mésomérie, donc on obtient finalement trois produits :



qui donnent alors par substitution nucléophile d'ion cyanure deux isomères cyanés :



grâce à la transposition "allylique" suivante du dérivé chloré ( $\text{S}_{\text{N}}1$ ) suivant :



suivie de la cyanation aux deux extrémités !

L'hydrogénation conduit au HMDA cherché.

IV - 1.2. on a :  $2 \text{CH}_2 = \text{CH} - \text{CN} \rightarrow \text{CN} - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CN}$

En effet :  $\text{CH}_2 = \text{CH} - \text{CN} + 2e^- \rightarrow \overset{\ominus}{\text{C}}\text{H}_2 - \overset{\ominus}{\text{C}}\text{H} - \text{CN}$

(par réduction cathodique)

puis  $\overset{\ominus}{\text{C}}\text{H}_2 - \overset{\ominus}{\text{C}}\text{H} - \text{CN} + \text{CH}_2 = \text{CH} - \text{CN}$

donne :  $\text{NC} - \overset{\ominus}{\text{C}}\text{H} - \overset{\ominus}{\text{C}}\text{H}_2 - \overset{\ominus}{\text{C}}\text{H}_2 - \overset{\ominus}{\text{C}}\text{H} - \text{CN}$  susceptible de se protoner ultérieurement.

L'ammonium quaternaire ajouté peut être attiré par la cathode lors de l'électrolyse, cela augmente la conductibilité de la solution et en raison de son caractère hydrophobe, évite la réduction de l'eau en hydrogène.

Le propane nitrile provient de l'hydrogénation résiduelle (l'eau) et l'oxyde de diacyano-éthyle s'explique par une hydratation sélective de la double liaison de  $\text{CH}_2 = \text{CH} - \text{CN}$  pour conduire à  $\text{CH}_2\text{OH} - \text{CH}_2 - \text{CN}$  qui peut donner un éther par déshydratation intermoléculaire.

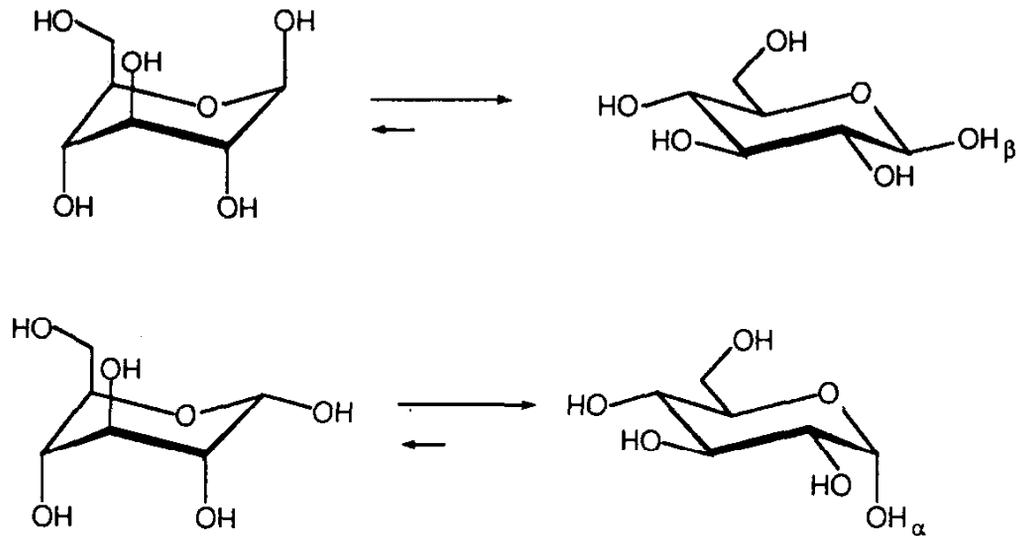
IV - 2. Le méthanol conduit à l'ester. HBr s'additionne selon l'effet Kharash classique ; puis on a hydrolyse de l'ester en acide.. Ce dernier, par  $\text{NH}_3$  conduit au sel d'ammonium puis à l'acide amino-11-undécanoïque cherché, qui donne par chauffage, le rilsan.

IV - 3. Le phénol s'hydrogénolyse en cyclohexanone B, cette dernière avec  $(\text{NH}_2\text{OH})$  conduit à l'(oxime C (signalons que  $\text{NH}_3$  utilisé capte  $\text{H}_2\text{SO}_4$  réactionnel), C se transpose (Beckmann) en caprolactame. ( $\text{NH}_3$  neutralise encore l'acidité réactionnelle). Le caprolactame donne, sous l'action de la chaleur, le perlon.

Correction de la seconde partie:

I.1. Les formes stables sont cycliques; la forme ouverte représente moins de 0,005% dans l'eau.

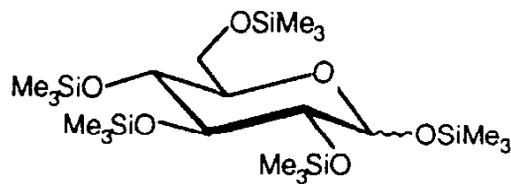
I.2.1



I.2.2. La distinction est aisée par RMN  $^1\text{H}$ :

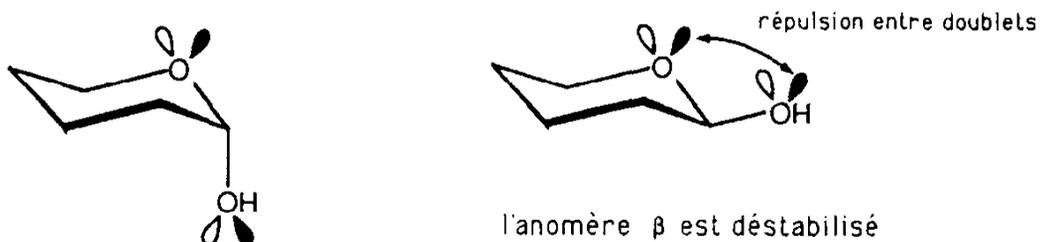
- anomère  $\alpha$ : constante de couplage  $J_{1,2} = 5 \text{ Hz}$  (axial-équatorial),
- anomère  $\beta$ :  $J_{1,2} = 10 \text{ Hz}$  (axial-axial).

I.2.3. La silylation des OH permet une analyse par chromatographie en phase gazeuse; on peut ainsi connaître la composition  $\alpha/\beta$ .



I.2.4. La forme la plus stable est l'anomère  $\beta$  car tous les OH sont équatoriaux.

I.2.5. L'effet anomère déstabilise cet anomère par effet de répulsion électronique des doublets libres des atomes d'oxygène portés par le carbone C-1.

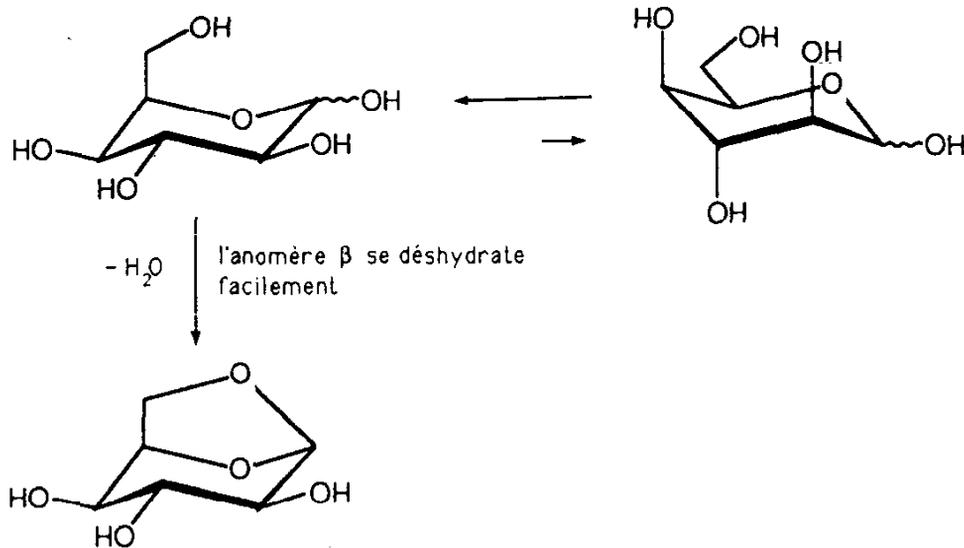


I.2.6. Le solvant peut influencer l'équilibre  $\alpha \rightleftharpoons \beta$  notamment par des effets de solubilité. Par exemple lorsqu'on concentre une solution de D-glucose dans l'éthanol, c'est l'anomère  $\alpha$  qui précipite alors que la même opération dans la pyridine provoque la cristallisation de l'anomère  $\beta$ .

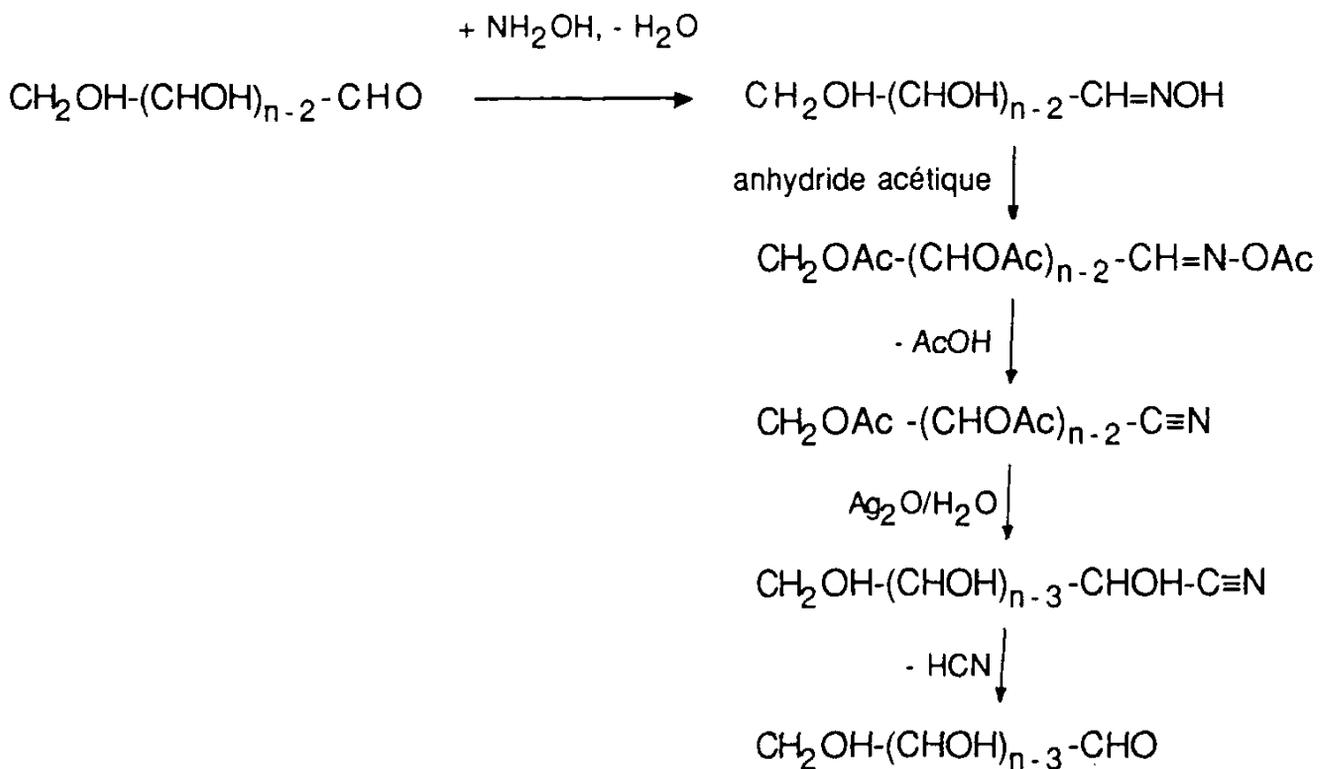
I.3.1 La mutarotation concerne l'équilibre  $\alpha \rightleftharpoons$  forme ouverte  $\rightleftharpoons \beta$ .

I.3.2.  $0,66x + 112 \times 0,34 = 52,7$  soit  $x = 22,15^\circ$

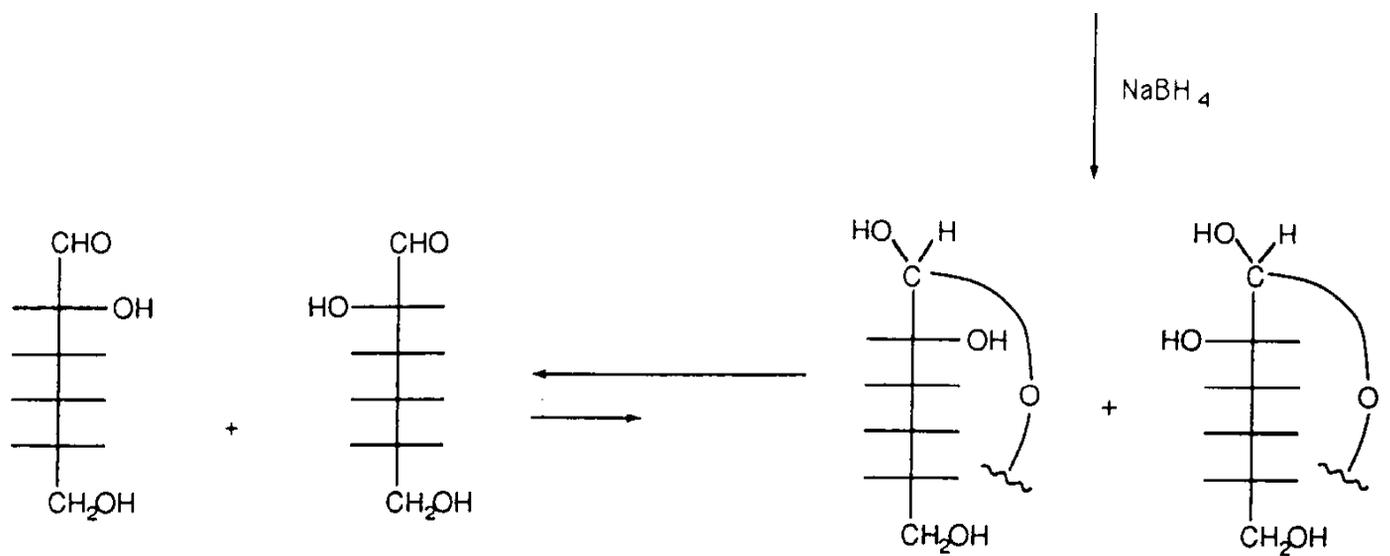
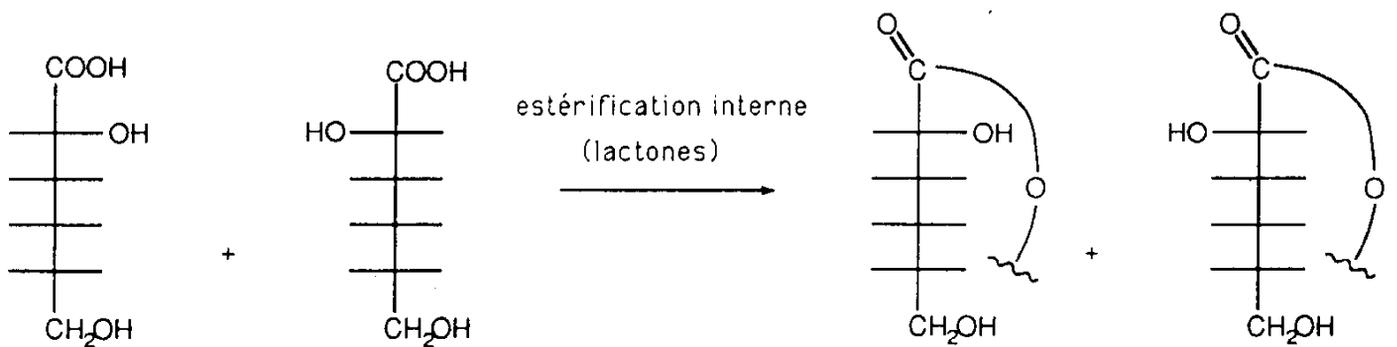
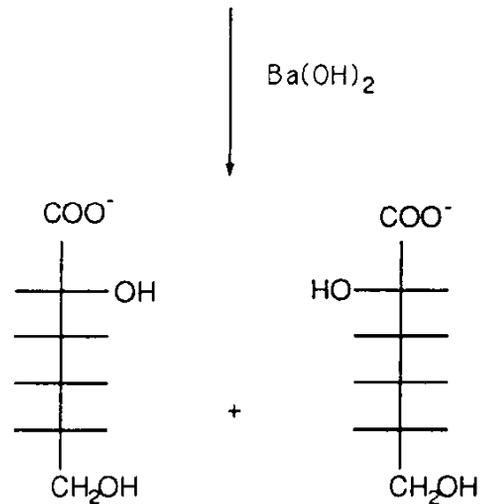
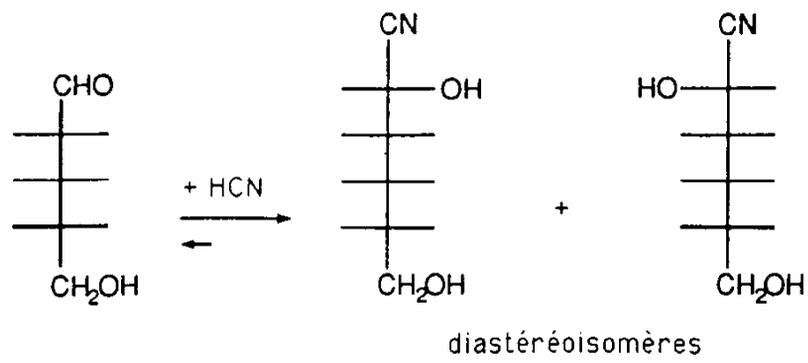
I.4.



II.1. Dégradation de Wöhler

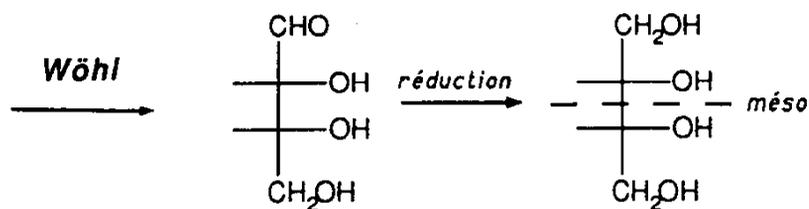


## II.2.

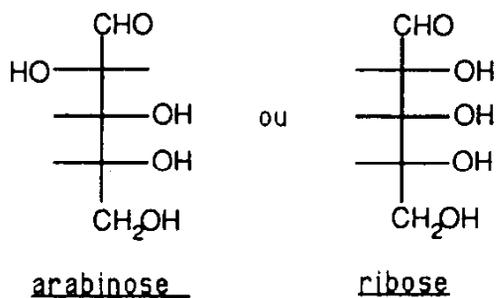


diastéréoisomères

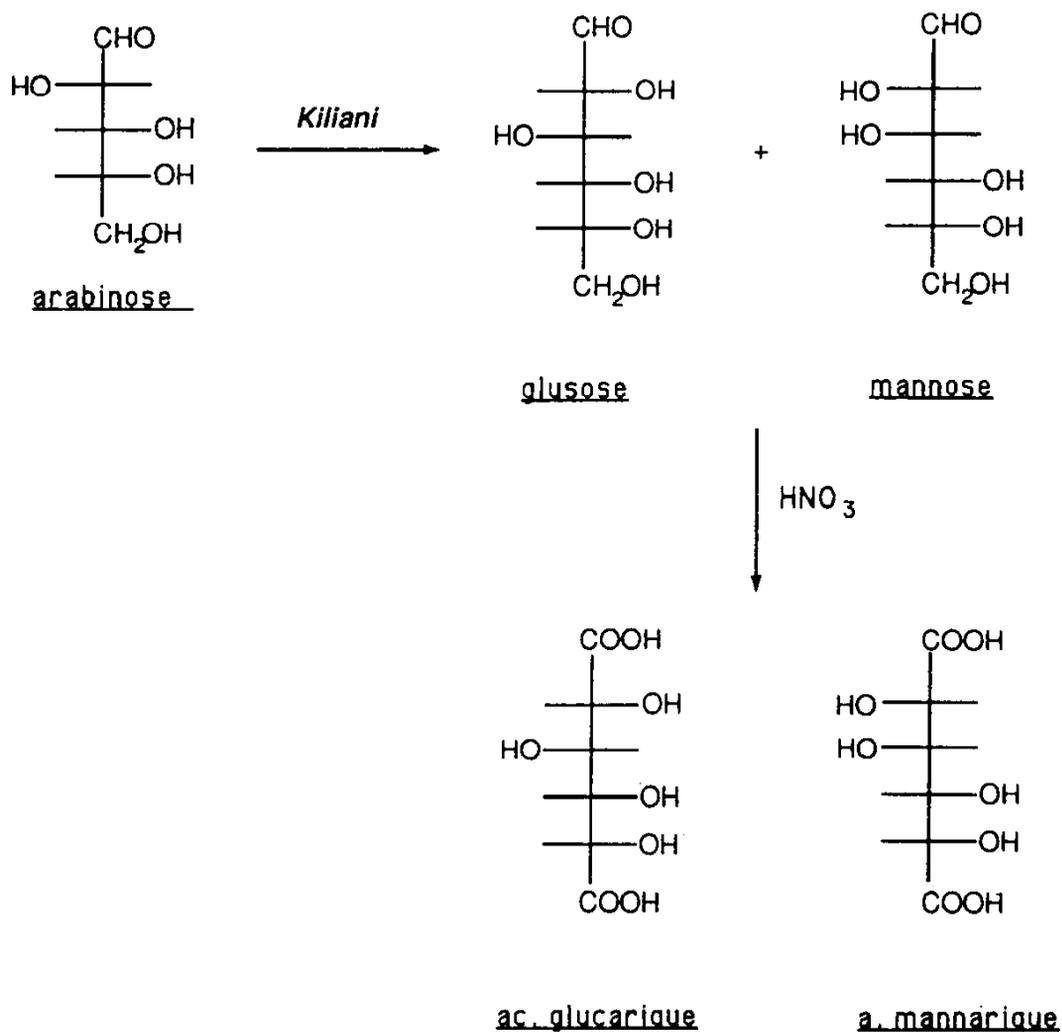
II.3 Dégradation de Wöhl suivie de réduction:

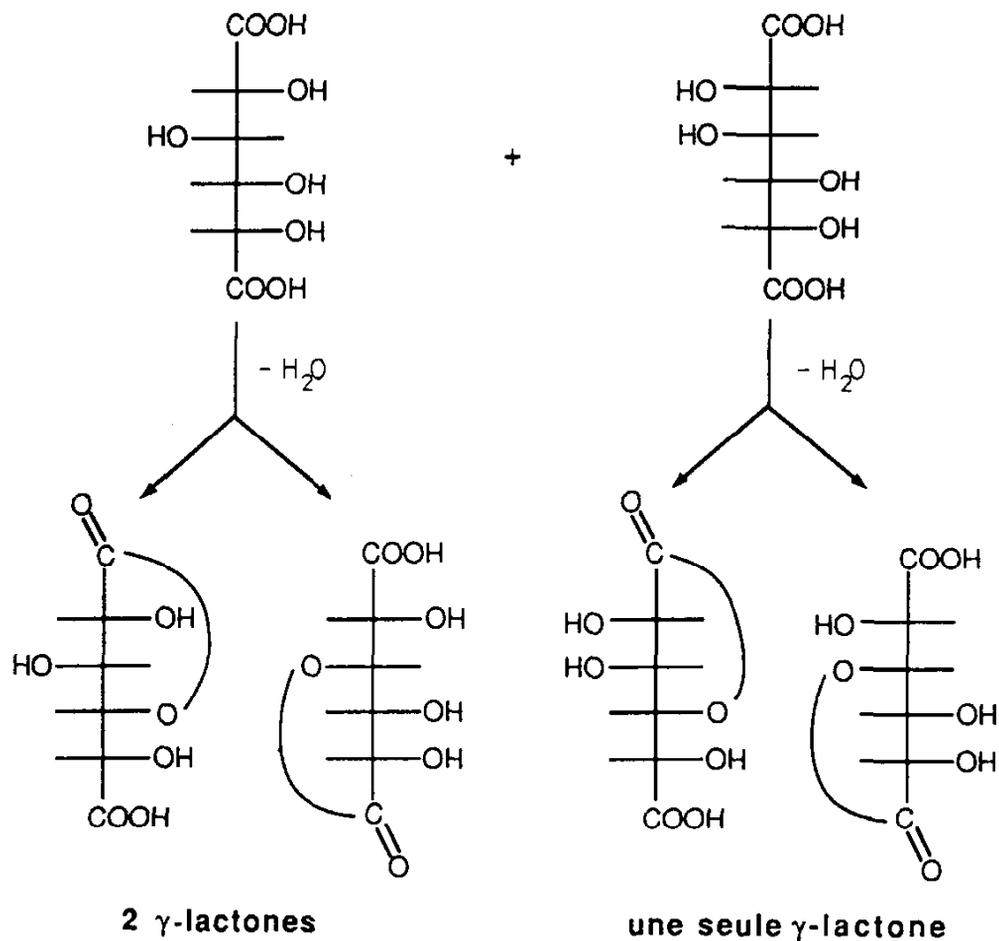


donc le pentose cherché peut être:



Synthèse de Kiliani suivie d'oxydation:

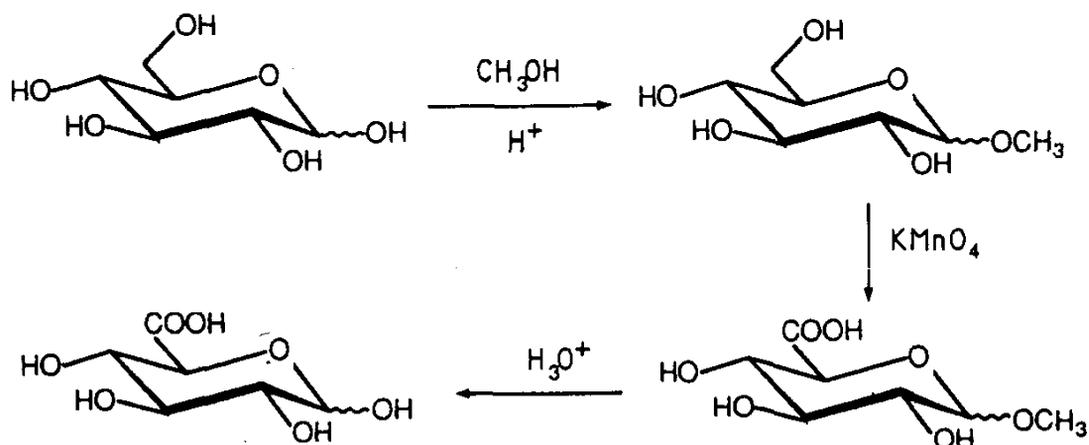




avec le ribose on obtient 2  $\gamma$ -lactones dans chaque cas.

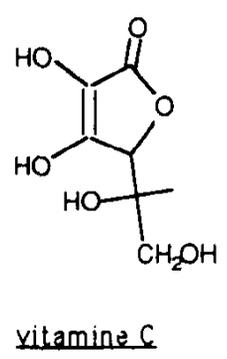
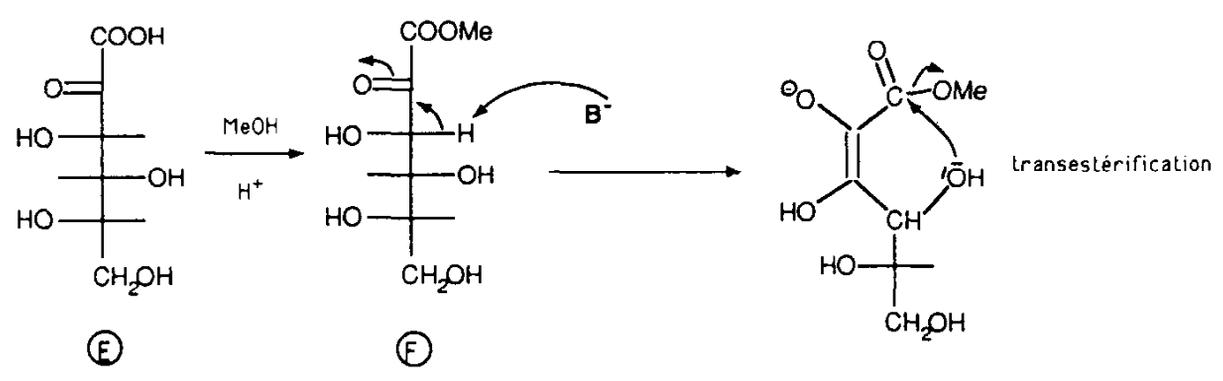
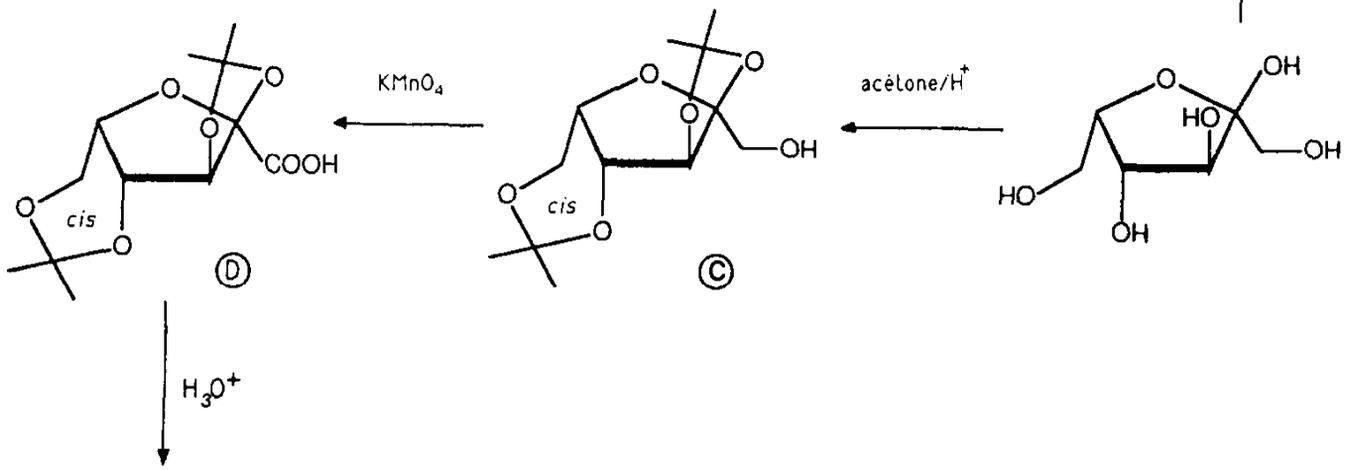
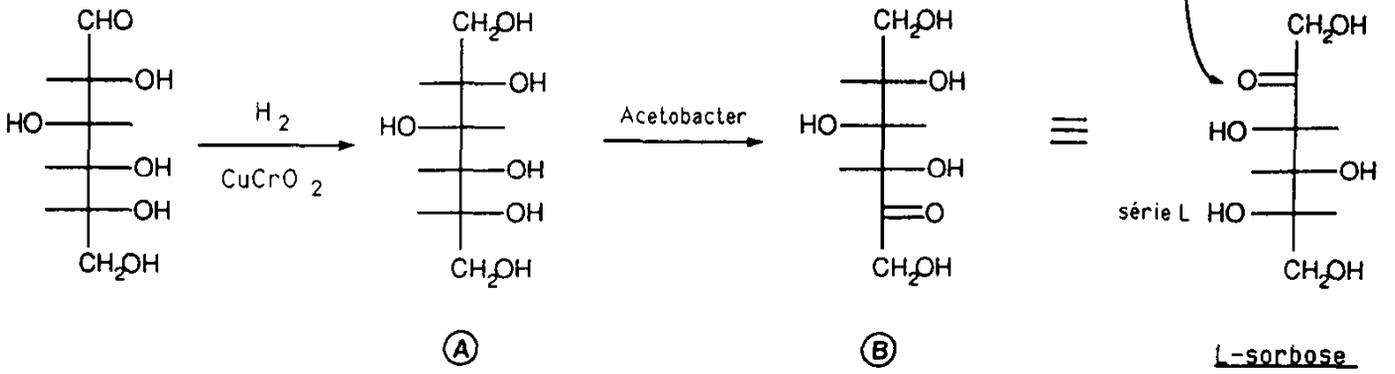
II.3.2. aldose traité par  $HNO_3$  conduit à un diacide (aldarique).

II.3.3. La transformation nécessite la protection préalable du OH anomérique suivie d'une oxydation et d'une déprotection



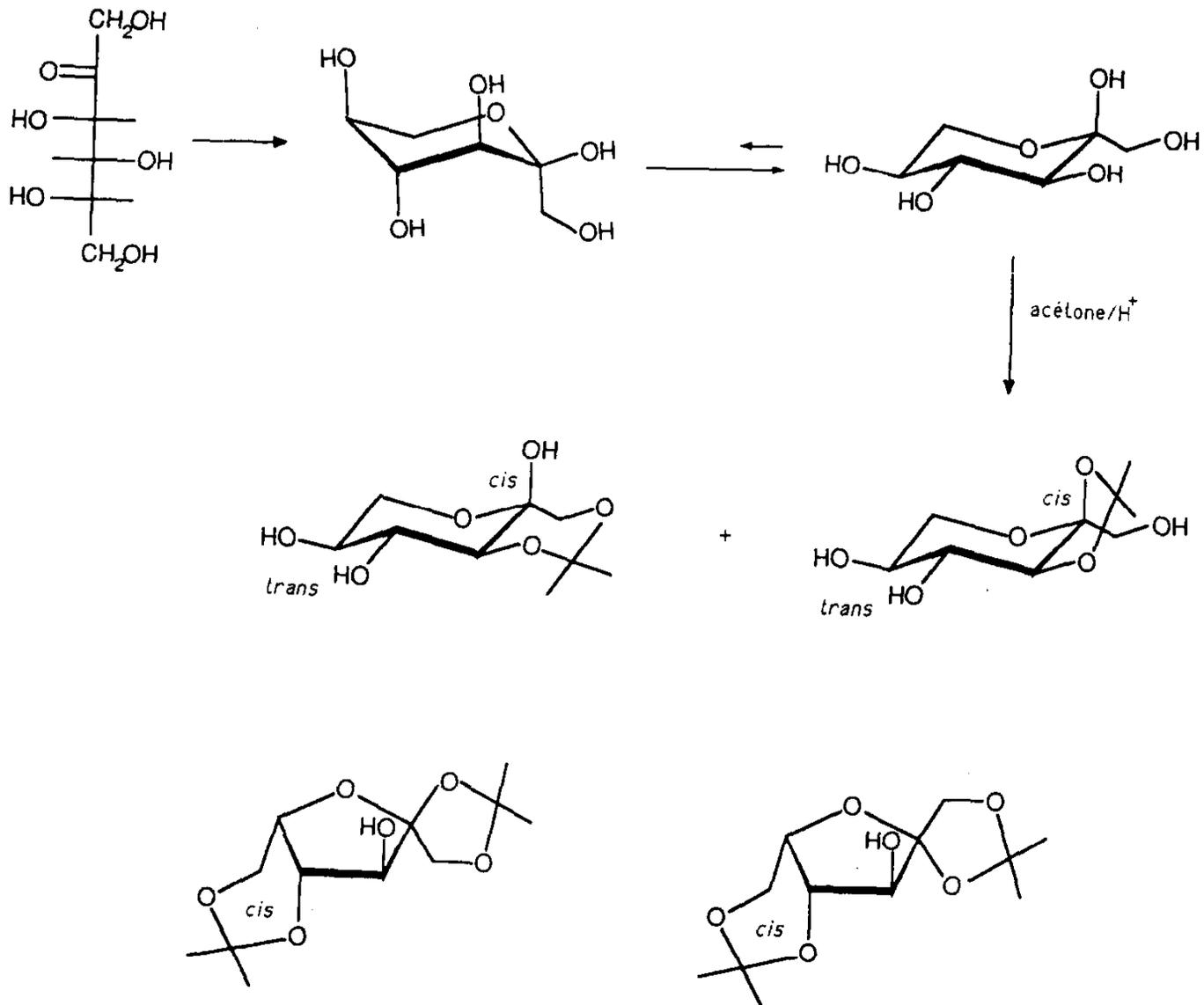
II.3.4. La synthèse de Kiliani-Fischer peut servir à préparer des sucres marqués au  $^{13}C$  ou  $^{14}C$  pour des études de mécanisme biochimique.

III.1.1.



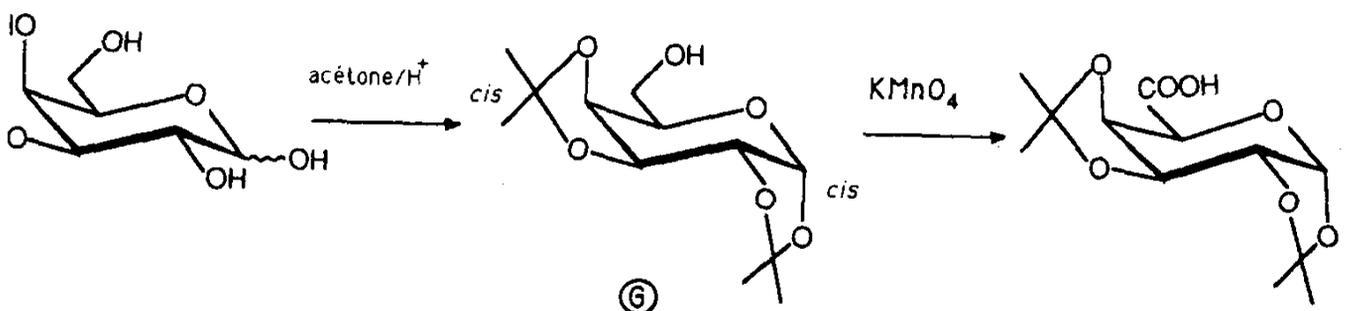
III.1.2. le composé B appartient à la série L.

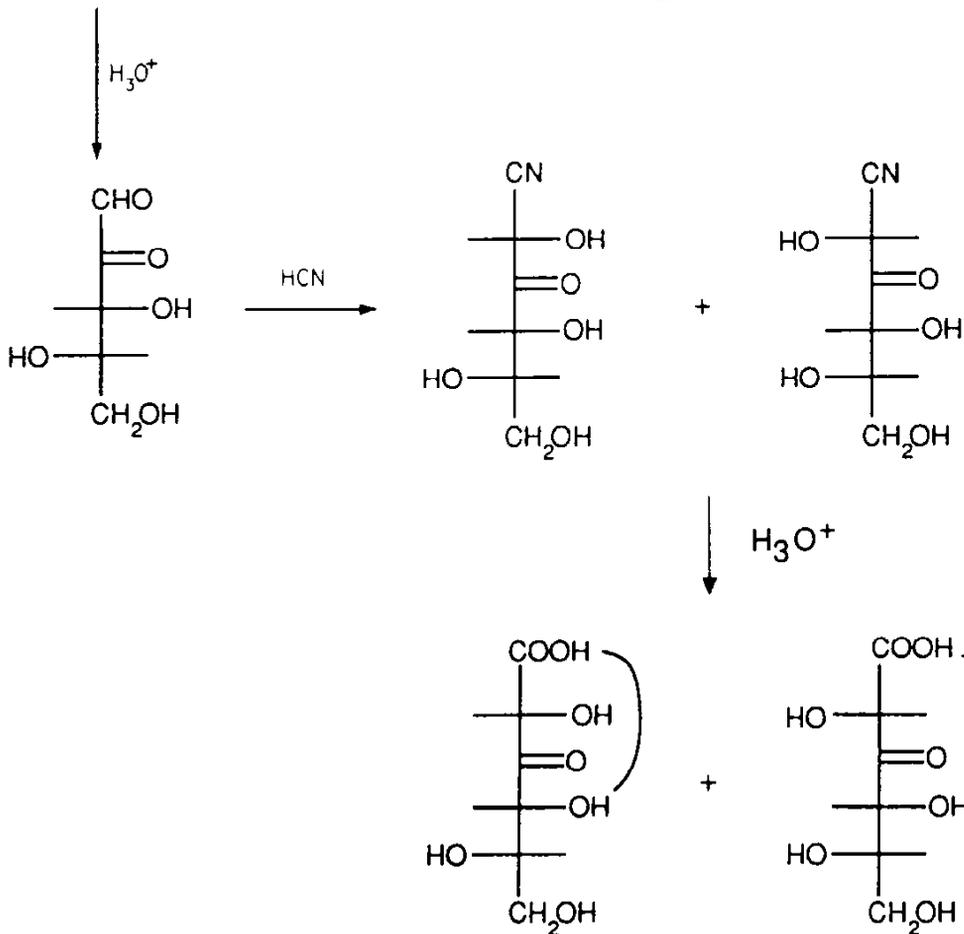
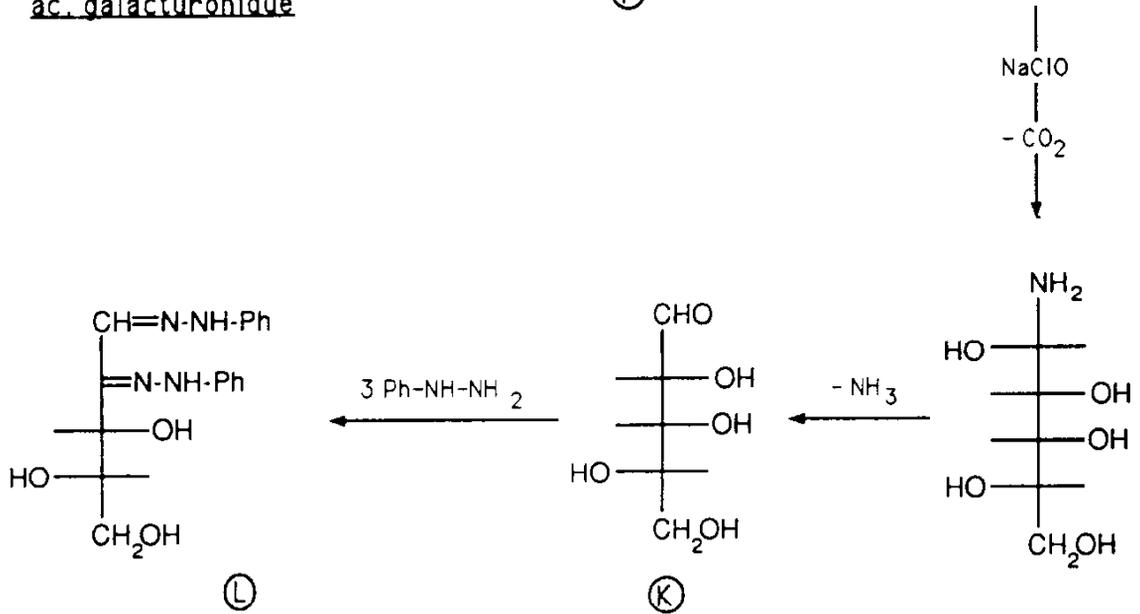
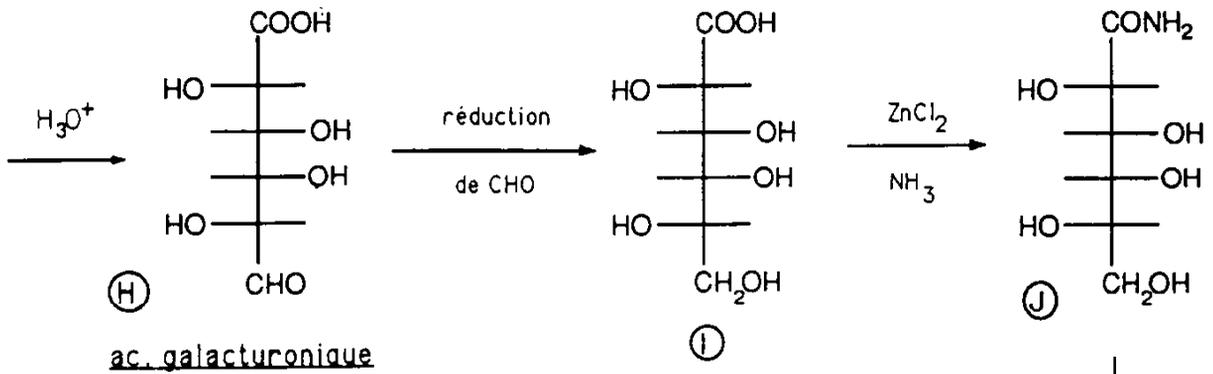
III.1.3. le sorbose peut également se mettre sous forme pyranique, mais la protection sous forme de cétal ne se fait bien que si les 2 groupes OH sont en cis l'un de l'autre.

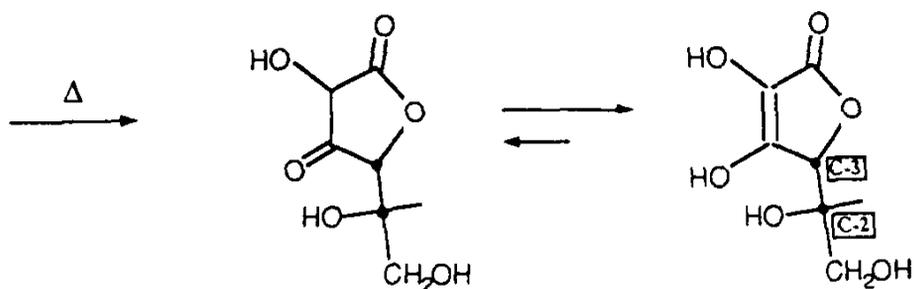


III.1.4. Même remarque.

(II.2.

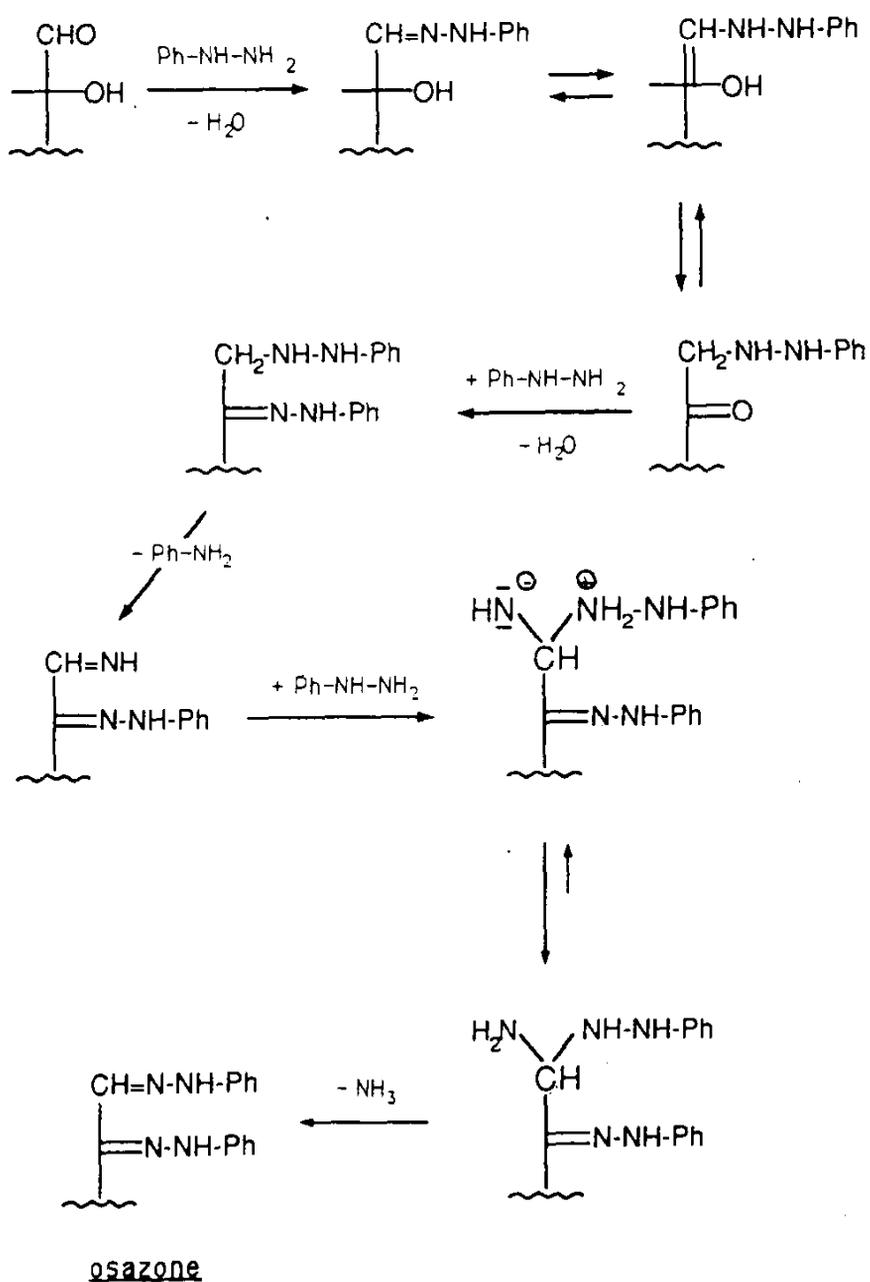




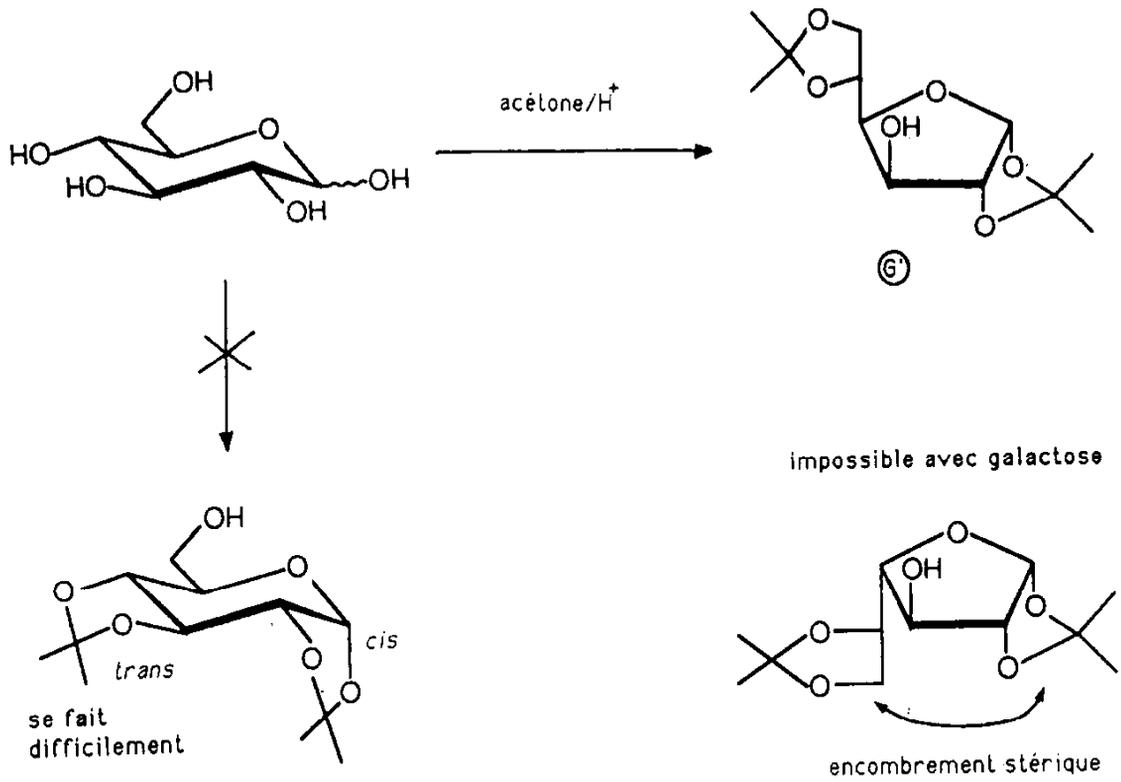


III.2.2 seuls sont conservés les C-2 et C-3 du galactose.

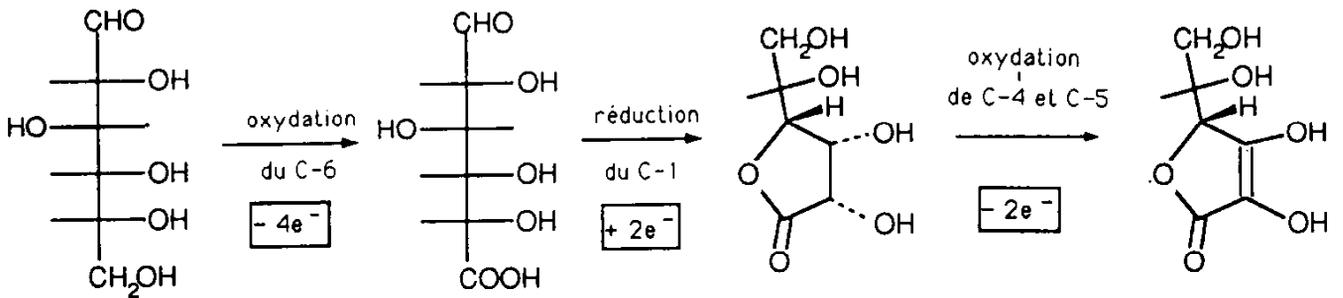
III.2.3.



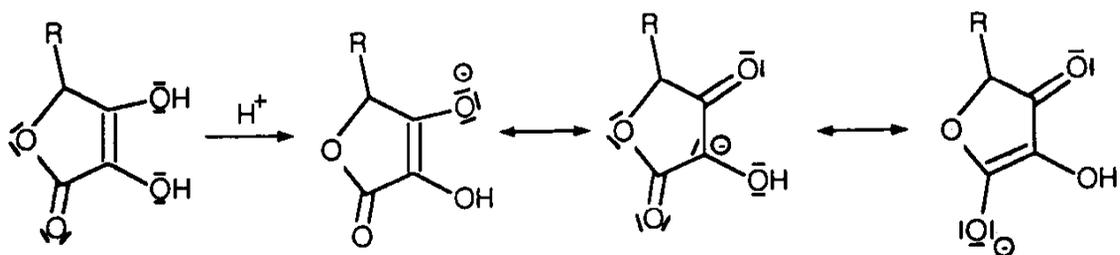
III.3.



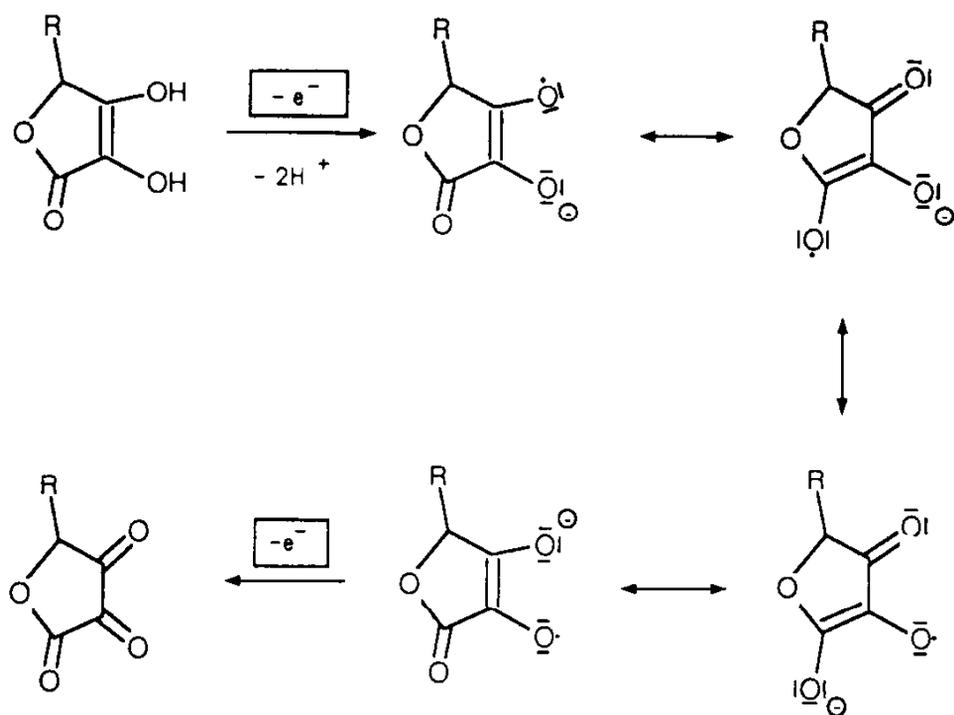
III.4. 1.



III.4.2. propriétés acides dues à la formation s'un anion stabilisé par résonance.



III.4.3. propriétés antioxydantes car la capture d'un électron conduit à un radical-anion également stabilisé par résonance. La capture d'un second électron conduit à la formation d'une espèce stable.



## Agrégation

### OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve C : Problème d'Électricité, d'électronique,  
d'électrotechnique et d'automatique - Session de 1989

#### PREMIÈRE PARTIE

I.1.1.1.  $I_{C1} = I_{S1} \exp \frac{V_{BE1}}{U_T}, I_{C2} = I_{S2} \exp \frac{V_{BE2}}{U_T}$  ( $Q_1, Q_2$  isothermes  $\rightarrow \hat{m} U_T$ )

$V_S = R(I_{C2} - I_{C1})$ . Si  $V_{BE1} = V_{BE2} = V_{BE}$  alors  $V_S = R (I_{S2} - I_{S1}) \exp \frac{V_{BE}}{U_T}$   $V_S \neq 0$   
pour  $I_{S1} \neq I_{S2}$ .

I.1.1.2.  $V_S = 0 \rightarrow I_{C1} = I_{C2}$  c à d  $I_{S1} \exp \frac{V_{BE1}}{U_T} = I_{S2} \exp \frac{V_{BE2}}{U_T}$   $V_{BE1} - V_{BE2} = U_T \log \frac{I_{S2}}{I_{S1}}$

I.1.1.3. *Application numérique :*

$$\frac{\Delta I_S}{I_S} = 10\% \Rightarrow \frac{I_{S2} - I_{S1}}{I_{S1}} = 0,1 \text{ (a), } I_{S2} = 1,1 I_{S1} \rightarrow \frac{I_{S2}}{I_{S1}} = 1,1 \Delta V_{BE} = 25 \cdot 10^{-3}$$

$\log 1,1 = 2,38 \text{ mV.}$

\* Au lieu de (a) on peut écrire (b)  $\frac{I_{S1} - I_{S2}}{I_{S2}} = 0,1 \rightarrow \Delta V_{BE} = 2,38 \text{ mV.}$

I.1.1.4.  $Q_1, Q_2, R_1, R_2$  isothermes mais T varie.

$$\Delta V_{BE} = U_T \log \frac{I_{S2}}{I_{S1}} = U_T \log \left[ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} T^{n_2 - n_1} \right]$$

$$d\Delta V_{BE} = U_T d \log [ ] + d(U_T) \log [ ] = \frac{kT}{q} \left( \frac{n_2 - n_1}{T} \right) dT + \frac{kT}{q} \left[ \frac{d\gamma_2}{\gamma_2} - \frac{d\gamma_1}{\gamma_1} \right] \text{ (les } \gamma \text{ sont constants mais } \neq \text{ a priori } \equiv \text{ dispersion).}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} (\Delta V_{BE}) = \frac{kT}{q} \cdot \frac{n_2 - n_1}{T} + \frac{1}{T} \cdot \frac{kT}{q} \cdot \log \frac{\gamma_2}{\gamma_1} T^{n_2 - n_1}$$

$\Delta V_{BE}$

$\frac{\partial}{\partial T} (\Delta V_{BE}) = U_T \frac{\Delta n}{T} + \frac{1}{T} \Delta V_{BE}$  c'est la variation thermique de la tension de décalage - ou d'offset.

I.1.1.5. *Application numérique.*

I.1.1.5.α. 10% sur les  $I_S$  entraîne un  $\Delta V_{BE}$  de 2,38 mV.

$$\frac{dI_s}{I_s} = dn \log T \rightarrow dn = \frac{1}{\log T} \cdot \frac{dI_s}{I_s} \text{ on a } \Delta n = \frac{1}{\log T} \cdot \frac{\Delta I_s}{I_s}$$

$$\log T = \log 300 = 5,703 \text{ d'où } \Delta n = 0,0175.$$

$$\log I_s = \log \gamma + n \log T - \frac{V_I}{U_T} \rightarrow \frac{dI_s}{I_s} = \frac{d\gamma}{\gamma} + dn \log T.$$

Cette expression faite d'informations sur les  $\gamma$  se simplifie après la remarque suivante :

$\frac{dI_s}{I_s} = \frac{d\gamma}{\gamma} dn \log T$  ;  $\frac{d\gamma}{\gamma} =$  « valeur relative » négligée devant une « valeur absolue »  $dn$  multipliée par  $\log T$ . D'où l'expression simplifiée plus haut.

$$\frac{\partial}{\partial T} (\Delta V_{BE}) = \frac{2,38}{300} \cdot 10^{-3} + 25 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0,0175}{300}$$

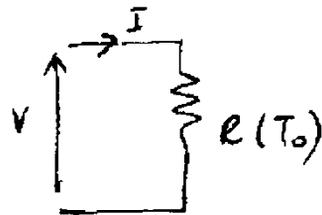
$\frac{\partial}{\partial T} (\Delta V_{BE}) \approx 9,4 \mu V/K$  c'est le terme  $\frac{\Delta V_{BE}}{T}$  qui est dominant. Ne connaissant pas le signe de  $\Delta n$  on doit écrire :

$$\frac{\Delta}{\Delta T} (\Delta V_{BE}) = \pm 9,4 \mu V/K = \text{variation de la tension d'offset avec } T.$$

I.1.1.5.β. Si  $\Delta T = 1K$  il faut faire varier la tension d'entrée de  $9,4 \mu V$  (avec le bon signe) pour maintenir à zéro la tension de sortie de l'étage différentiel.

I.1.2.1.α. T n'est plus homogène.

$$dT = T - T_0 \text{ Posons } dR = R(T) - R(T_0) = R(T_0) \alpha_R dT \text{ par def.}$$



$$V = R(T_0) I \text{ pour } dT$$

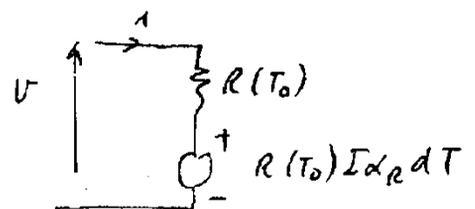
$$v = dV = \frac{\partial V}{\partial R} dR + \frac{\partial V}{\partial I} dI \quad \text{ou } v = Id R + R dI$$

Avec  $R = R(T_0)$ ,  $dI = i$  et  $dR$  écrit ci dessus :

$$v = IR(T_0) \alpha_R dT + Ri$$

I.1.2.1.β. Schéma avec variations

$$v = Ri + e \text{ avec } e = R(T_0) \alpha_R Id T.$$



I.1.2.2. Étage différentiel alimenté en courant  $\rightarrow$  les variations de courants ont lieu en sens inverses.

$$I_{c1} + I_{c2} = 2I$$

$$i_{c1} + i_{c2} = 0 \text{ (si g\u00e9n\u00e9 courant insensible \u00e0 dT).}$$

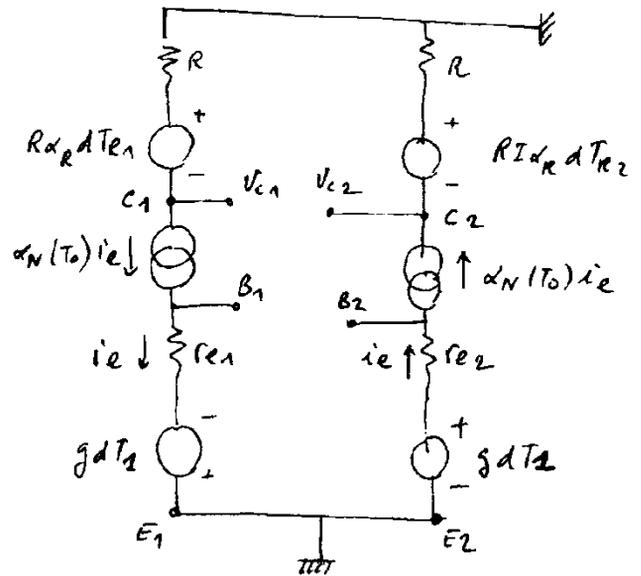
$$i_{E1} + i_{E2} = 0 \rightarrow i_{E1} = -i_{E2}$$

Les temp\u00e9ratures sont d\u00e9finies par rapport \u00e0  $T_0$  :

$Q_1$  \u00e0  $T_0 + dT$ ,  $Q_2$  \u00e0  $T_0 - dT$  d'o\u00f9 les sens oppos\u00e9s des g\u00e9n\u00e9rateurs  $g dT$  sur le sch\u00e9ma ci-dessous.

Dans le texte on prend  $i_c = \alpha_N i_e$

\(\Rightarrow r\_{ce}\) est suppos\u00e9e  $\infty$ .



Les r\u00e9sistances  $r_{e1}$  et  $r_{e2}$  diff\u00e8rent de  $\frac{k}{q I_E} dT$  avec  $I_{E1} \neq I_{E2} = I_E$  en r\u00e9gime statique.

I.1.2.3. En parcourant la maille dessin\u00e9e ci-dessous on d\u00e9duit :

$$v_s = v_{c2} - v_{c1} = R I \alpha_R (dT_{R1} - dT_{R2}) + 2R \alpha_N i_e$$

I.1.2.3. En parcourant la maille dessin\u00e9e ci-dessous on d\u00e9duit :

$$v_s = v_{c2} - v_{c1} = R I \alpha_R (dT_{R1} - dT_{R2}) + 2R \alpha_N i_e$$

I.1.2.4. En parcourant la maille  $B_1 E_1 E_2 B_2$

$$2r_e i_e - 2g dT_1 = 0$$

$$i_e = \frac{g dT_1}{r_e}, r_e = \frac{kT}{q I_E}, \text{ ici } I_E = I \text{ courant de repos.}$$

$$\text{Pour } dT_1 \text{ faible } T \neq T_0 \text{ d'o\u00f9 } r_{e1} = r_{e2} = \frac{k T_0}{q I_E}$$

La valeur de la tension max. de sortie est (somme des val. absolues).

$$v_s = v_{c2} - v_{c1} = R I |\alpha_R| |dT_{R1} - dT_{R2}| + 2R \alpha_N |g| |dT_1| \frac{q I_E}{k T_0}$$

## I.1.2.5. Applications numériques :

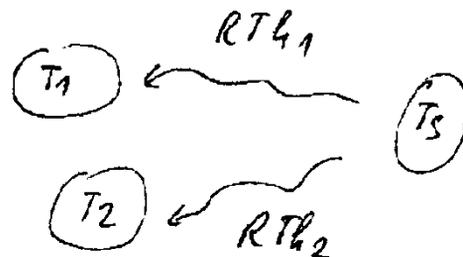
$$\Delta v_C = 10^4 \cdot \frac{10^{-3}}{2} | 2.0 - 1.0 | 0,2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^4 \times 0,955 \cdot \frac{2,2 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{10^{-3}}{2} \times 0,25$$

$$\Delta V_C = 10 \cdot 10^{-3} + 218 \cdot 10^{-3} = 238 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

résistances

Transistors

$$\Delta V_C = 238 \text{ mV.}$$



## I.1.3.1. C.R. Thermique

$$T_2 - T_s = R_{th2} P_d$$

$$T_1 - T_s = R_{th1} P_d$$

$$T_2 - T_1 = (R_{th2} - R_{th1}) P_d = \pm K_T P_d$$

\* Pour  $P_d$  donnée on ne connaît pas la répartition des températures.

\* Durant la variation de la tension de sortie la source de chaleur «se déplace» car elle est l'un ou l'autre des Transistors de l'étage Push-Pull de l'étage de sortie.

## I.1.3.2. Puissance dissipée par le Push-Pull de sortie charge résistive.

Hypothèse  $I_C \approx I_E$ 

PNP conduit, NPN bloqué

NPN conduit, PNP bloqué.

 $P_d$  pour le transistor NPN :

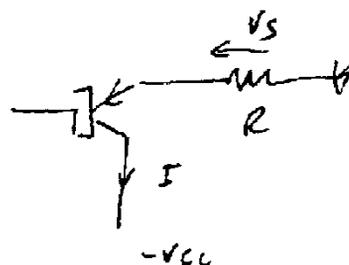
$$P_d = V_{CE} I; V_{CE} = V_{CC} - V_S \text{ avec } I = \frac{V_S}{R}$$

$$P_d = (V_{CC} - V_S) \left( \frac{V_S}{R} \right) \text{ ici on prendra } V_{CC} \text{ et } V_S > 0.$$

 $P_d$  pour PNP

$$P_d = V_{EC} I \quad I = -V_S/R$$

$$V_{EC} = V_S - V_{CC}$$

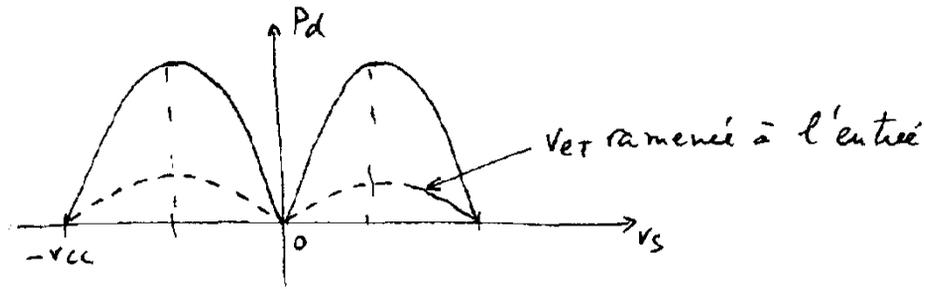


$$P_d = (V_{CC} - V_S) \left( \frac{V_S}{R} \right) \quad V_{CC} = - | V_{CC} | \quad V_S < 0$$

I.1.3.3.  $P_d = f(V_S)$ 

2 paraboles avec concavité vers le bas. Max. obtenue pour  $\frac{\partial P_d}{\partial V_S} = 0$

$$V_S = \frac{V_{CC}}{2} \text{ pour NPN, } V_S = -\frac{V_{CC}}{2} \text{ pour PNP}$$

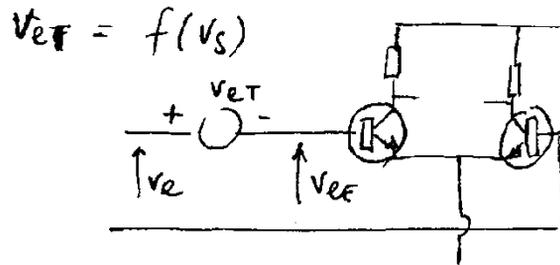


I.1.3.4. A une tension d'entrée électrique  $V_{eE}$  correspond :

I.1.3.4.a. l'amplification électrique de la tension d'entrée représentée par une droite dans la région d'amplification linéaire :  $V_S = A_0 V_{eE}$  où  $A_0$  = amplification statique.

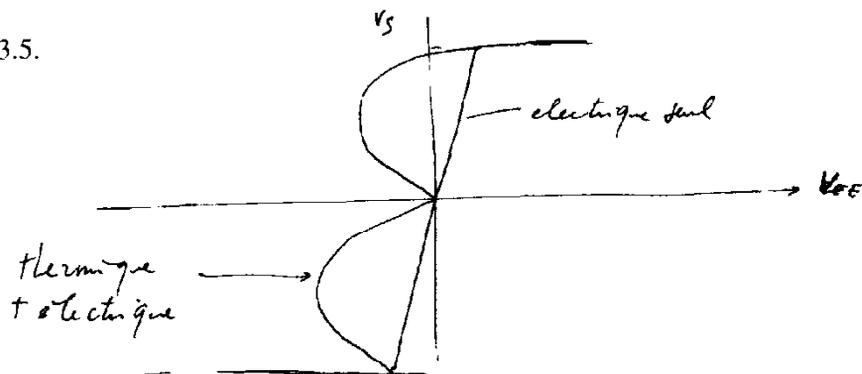
I.1.3.4.b. Un effet thermique qui par rétroaction fait apparaître un générateur équivalent en série avec l'une ou l'autre des entrées  $V_{eT} = f(V_S)$ .

Tout se passe comme si on appliquait une tension  $V_e = V_{eE} + V_{eT}$ . La caractéristique de transfert globale s'obtient en additionnant horizontalement les 2 courbes correspondant aux effets électriques et thermique, pour chaque valeur de  $V_S$ . D'où la réponse globale  $V_S = f(V_{eE})$



téristique de transfert globale s'obtient en additionnant horizontalement les 2 courbes correspondant aux effets électriques et thermique, pour chaque valeur de  $V_S$ . D'où la réponse globale  $V_S = f(V_{eE})$

I.1.3.5.



$$V_{eT} = \gamma_T P_d \text{ avec } P_d = (V_{CC} - V_S) \left( \frac{V_S}{R} \right)$$

La tension ramené à l'entrée est une fraction  $\beta_T$  de la tension de sortie.  $\beta_T$  doit être définie aux variations.  $\Delta v_e = \beta_T \Delta v_s$

$$\beta_T = \frac{\partial V_{eT}}{\partial V_S} = \frac{\partial}{\partial V_S} \gamma_T (V_{CC} - V_S) \left( \frac{V_S}{R} \right)$$

$$\beta_T = \frac{\gamma_T}{R} (V_{CC} - 2 V_S) \quad \beta_T = + \frac{\gamma_T}{R} (V_{CC} - 2 V_S) \text{ pour } V_{CC} > 0, V_S > 0$$

$$\beta_T = -\frac{\gamma_T}{R} (V_{CC} - 2 V_S) \text{ pour } V_{CC} < 0 \text{ et } V_S < 0$$

I.1.3.6. Calcul de A

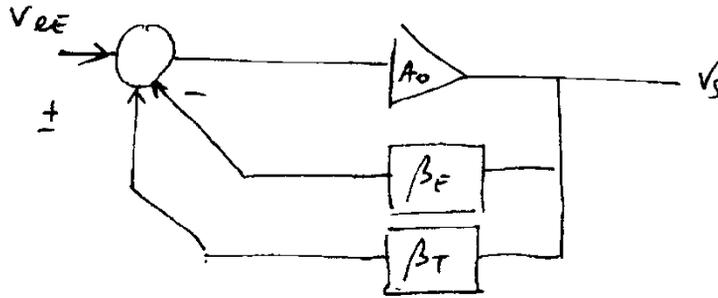


Schéma synoptique permettant le calcul de A.

$$A = \frac{V_S}{V_{cE}} = \frac{A_0}{1 + A_0 [\beta_E + \epsilon \beta_T]}, \epsilon = \pm 1$$

I.1.3.7. 
$$A = \frac{A_0}{1 + A_0 [\beta_E + \epsilon \frac{\gamma_T}{R} (V_{CC} - 2 V_S)]}$$

I.1.3.8. 
$$\beta_E = 0 \rightarrow A = \frac{A_0}{1 + \epsilon A_0 \frac{\gamma_T}{R} (V_{CC} - 2 V_S)}$$

A dépend de  $V_S$  à  $V_{CC}$  fixée.

Normal. On vient d'écrire la dépendance avec la température (gradient) Pas de dérivée nulle. Il faut chercher la valeur minimale du dénominateur. On sait que lorsque les transistors de sortie ne dissipent pas le gain est plus affecté ! Ceci se produit pour :

$$V_S = \pm V_{CC}$$

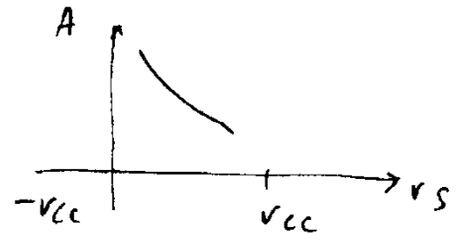
$$V_{CE} = 0$$

On a  $V_S = 0$

$$I_c = 0 \rightarrow P_d = 0. \text{ évident.}$$

Pour  $V_S = V_{CC}$  ou  $V_S = 0$  on a :

$$A = \frac{A_0}{1 + \epsilon A_0 \frac{\gamma_T}{R} V_{CC}}$$



I.1.3.9.

Si  $A_0 \frac{\gamma_T}{R} V_{CC} \gg 1$  alors  $A = \frac{A_0}{\epsilon A_0 \frac{\gamma_T}{R} V_{CC}}$

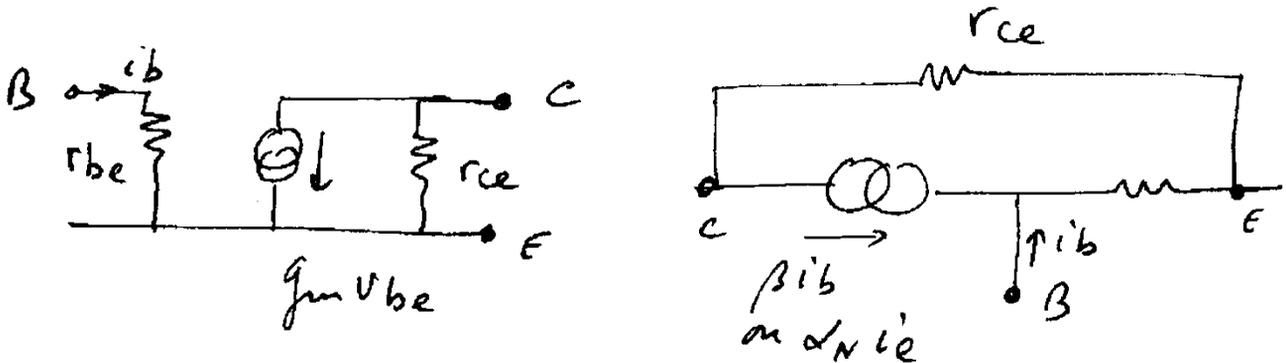
$A_M = \epsilon \frac{R}{\gamma_T V_{CC}}$ . Ceci est le gain maximum disponible (obtenu avec un modèle simple et des hypothèses simplificatives). On voit que  $A_M$  peut être  $> 0$  ou  $< 0$ .

Pour assurer une bonne stabilité du montage il faudra donc  $\beta_E \gg \beta_T$  ce qui suppose ne pas être trop exigeant quant à l'amplification en tension maximum à obtenir de l'A.O.P. contre réactionné.

I.1.3.10. Application numérique

$$A_M = \frac{2000}{2 \cdot 10^{-3} \times 0,3 \times 15} \approx 220 \cdot 10^3.$$

I.1.4. Étage d'entrée (c'est celui d'un 741) l'étude est faite en régime permanent statique donc les modèles au 1<sup>er</sup> ordre sont suffisants pour décrire le fonctionnement du transistor.



$$g_m = \frac{q I_E}{k T} \quad r_e = \frac{1}{\beta + 1} r_{be}$$

I.1.4.1. Tous les transistors de même type identiques. Les NPN ayant un fort  $\beta$ , on néglige les courants de base.

La symétrie du montage impose  $I_{E7} = I_{E8}$

$I_{C6} = 2 I_{E7}$  (en négligeant  $I_{B7}$  et  $I_{B8}$ )

$Q_5$  et  $Q_6$  identiques  $\rightarrow$  même courant de collecteur

$$I_{C6} = I_{C5} + 2 I_{B5} \rightarrow I_{C6} = I_{C5} \left( 1 + \frac{2}{\beta_p} \right) \text{ (transistors latéraux)}$$

$$2 I_{E7} = I_{C5} \left( 1 + \frac{2}{\beta_p} \right) = I_{C5} \frac{\beta_p + 2}{\beta_p}$$

$Q_9$  et  $Q_{10}$  : même courants de base par symétrie (au repos).

$$I_{B9} = I_{B10} = \frac{I_{E7}}{1 + \beta_p} \quad \text{d'où} \quad I_{10} = \frac{2 I_{E7}}{1 + \beta_p}$$



$$I_{C9} = I_{C11} + \frac{2I_B}{\beta} \text{ or } I_{C11} = \beta I_B$$

$$I_{C9} = I_{C11} + \frac{2}{\beta+1} \cdot \frac{I_{C11}}{\beta} = I_{C11} \left( 1 + \frac{2}{\beta(\beta+1)} \right)$$

$$I_{C11} = I_{C12} = \frac{\beta(\beta+1)}{2 + \beta(\beta+1)} I_{C9}$$

On a ici un «super miroir» de courant.

Pour  $\beta \geq 100$  on a  $I_{C11} = I_{C12} = 9998 \cdot 10^{-4} I_{C9}$ . C'est-à-dire que  $I_{C11}$  et  $I_{C12}$  «ressemblent» à  $I_{C9}$  à mieux que  $10^{-3}$ .

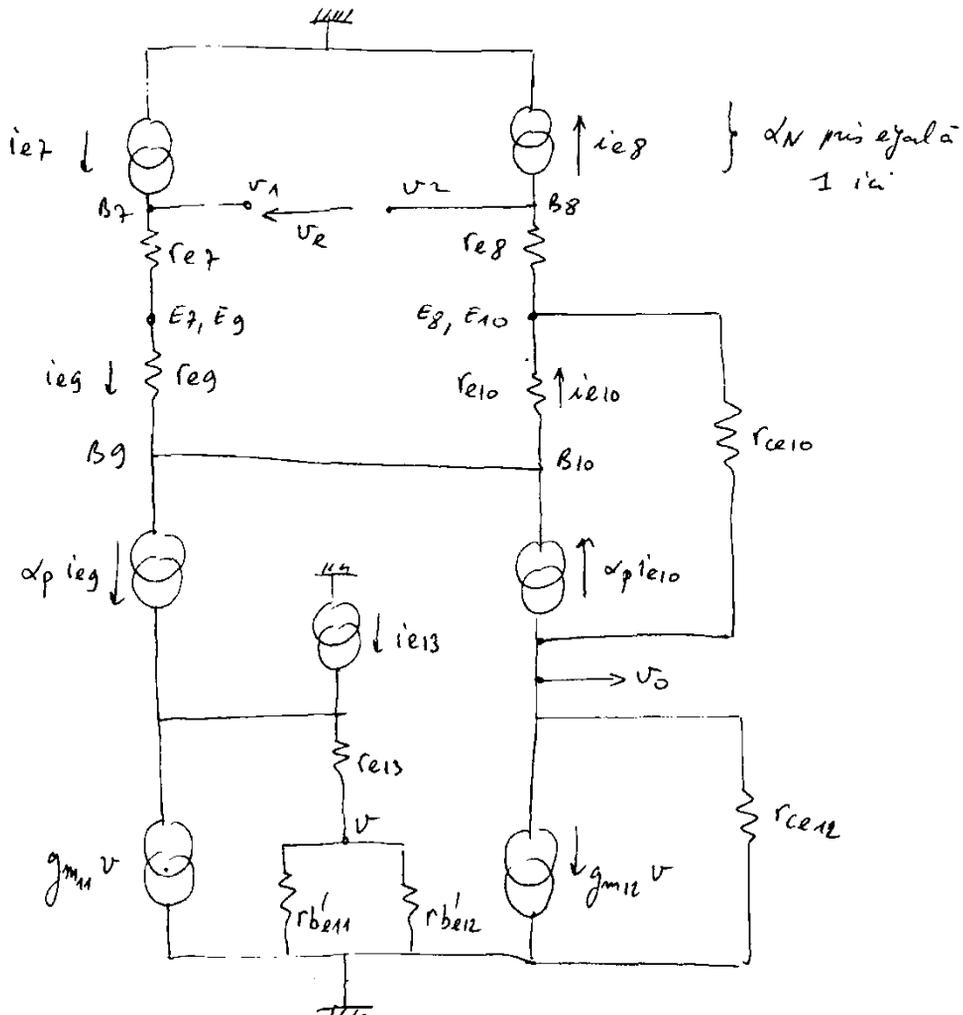
I.1.4.5. Schéma équivalent aux variations.

Négliger  $R_3$  et  $R_5$  en série revient à faire  $R_3 = R_5 = 0$  négliger  $R_4$  en // sur les entrées revient à faire  $R_4 = \infty$ .

$Q_7$  et  $Q_8$  sont «collecteurs communs»  $Q_9$  et  $Q_{10}$  ont leur bases reliées. Ils sont parcourus par  $I_{E7}$  et  $I_{E8}$  égaux en statique mais leurs variations sont opposées.  $i_{e7} = -i_{e8}$ .

On a également  $i_{e9} = -i_{e10}$  en négligeant le courant dans  $r_{ce10}$ .

D'où le schéma aux variations qui ne fait intervenir que les transistors strictement utiles pour l'étude de l'amplification, de l'impédance d'entrée etc... et du comportement fréquentiel en ajoutant les éléments capacitifs.



I.1.4.6. Calcul de la transconductance

\* Faire  $v_0 = 0$  (ou cte) c'est-à-dire imposer à  $v_0$  une valeur constante. Ici on fera  $v_0 = 0$  donc  $\equiv$  à c. c. de la sortie.

\* Appliquer la tension d'entrée  $v_e$ .

\* Mesurer  $i_s$  le courant de sortie (courant de court-circuit).

$$* G_m = -\frac{i_s}{v_e}$$

I.1.4.7. Si  $i_{e7} = i_{e8} = i_{e9} = i_{e10} \rightarrow$  le courant qui circule dans  $g_{ce10}$  est supposé nul.

Hypothèse  $g_{ce10} = 0$ .

$i_{e7} = \frac{v_e}{r_{e7} + r_{e8} + r_{e9} + r_{e10}}$ . Sachant que les courants de polarisation de  $Q_7, Q_9$  d'une part

et de  $Q_8, Q_{10}$  d'autre part sont égaux (aux variations près) soit  $I_{E7}$  cette valeur commune

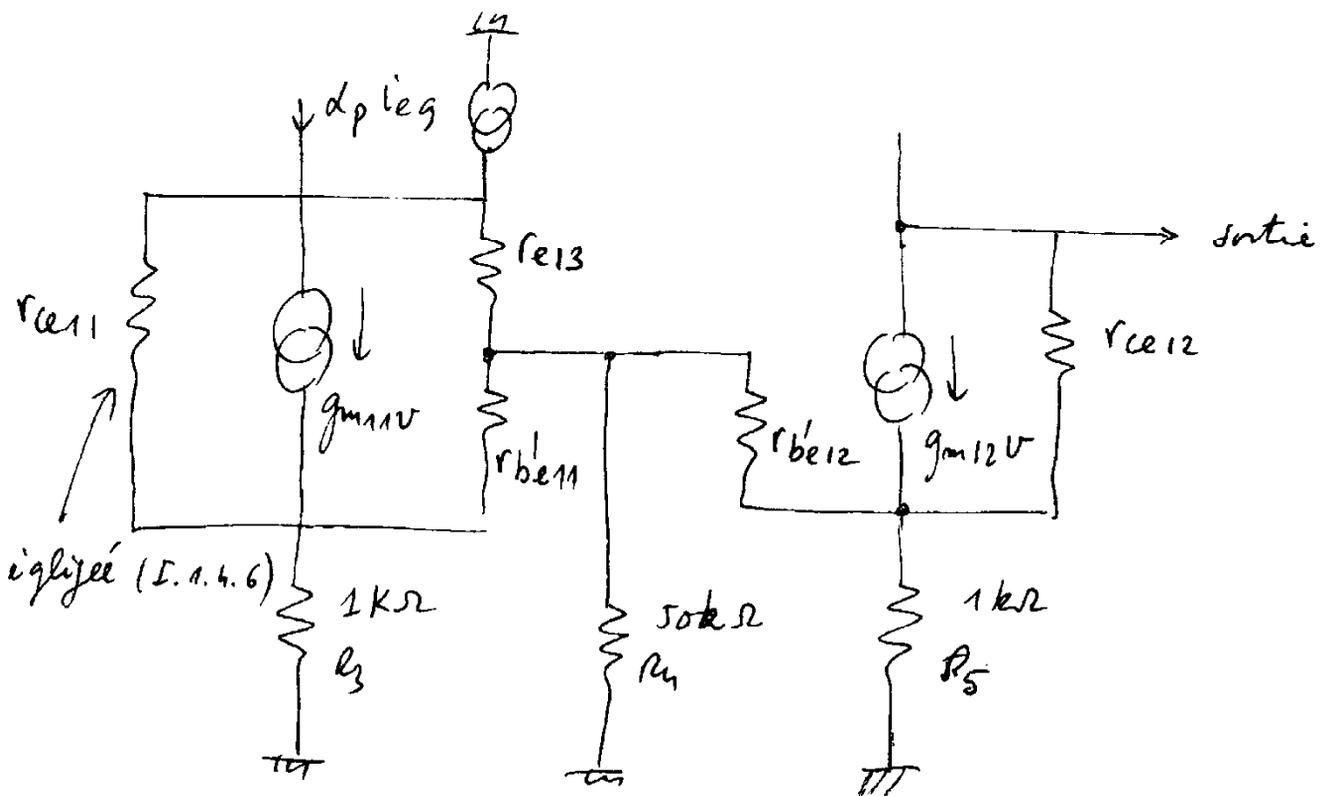
$$\rightarrow r_{e7} = r_{e8} = r_{e9} = r_{e10}$$

$$i_{e7} = \frac{v_e}{4 r_{e7}} = \frac{v_e}{4} \cdot \frac{q I_{E7}}{k T} \text{ ou } i_{e7} = \frac{v_e}{4 U_T} \cdot I_{E7}$$

I.1.4.8.  $g_{ce10}$  et  $g_{ce12}$  ont une extrémité commune qui est la sortie, laquelle est à la masse dans le cas de cette recherche.

Les 2 autres extrémités sont presque à la masse : on peut considérer dans une première approximation que le courant circulant dans ces 2 admittances est nul.

I.1.4.9.  $g_{m11} v \approx \alpha_p i_{e9}, i_{b13}$  négligé.



I.1.4.10.  $i_{e9}$  est connu :  $i_{e7} = \frac{v_e}{4 r_{e7}}$

$$g_{m11} v = \alpha_p i_{e9} = \alpha_p \frac{v_e}{4 r_{e7}}$$

$Q_{11}$  et  $Q_{12}$  mêmes courants de polarisation  $\rightarrow g_{m11} = g_{m12}$

$$g_{m11} v = g_{m12} v = \alpha_p i_{e9}$$

Si  $r_{ce12} = \infty$  alors  $i_{c12} = \alpha_p i_{e9}$

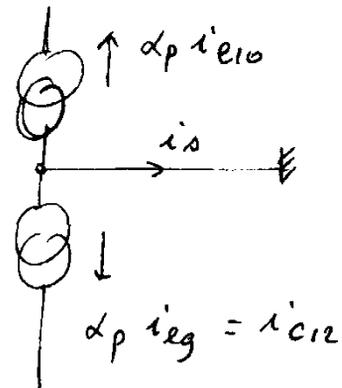
$$i_{c12} = \frac{v_e}{4 r_{e7}} \alpha_p$$

I.1.4.11. Courant de c. c.

$$-\alpha_p i_{e10} - i_s - \alpha_p i_{e9} = 0$$

$$i_s = -2 \alpha_p i_{e9} = -2 \alpha_p \frac{v_p}{4 r_{e7}}$$

$$G_{m1} = -\frac{i_s}{v_e} = \frac{\alpha_p}{2 r_{e7}}$$



\*  $G_{m1}$  a pour ordre de grandeur la moitié de la pente de l'étage d'entrée (aux approximations près).

I.1.4.12.1. Résistance d'entrée  $R_{e1}$  (différentielle).

$$v_e = 4 r_{e7} i_{e7} \text{ d'après I.1.4.7.}$$

Le courant de base (donc d'entrée) d'un NPN, est  $\# \frac{i_{e7}}{\beta} = i_c, v_e = 4 r_{e7} \beta i_c$   
d'où  $R_{e1} = 4 \beta r_{e7}$ .

I.1.4.12.α.  $R_{s1}$

Conditions :

- a) entrée(s) à la masse,
- b)  $v_x$  appliquée à la sortie,
- c) mesure de  $i_x$  correspondant,

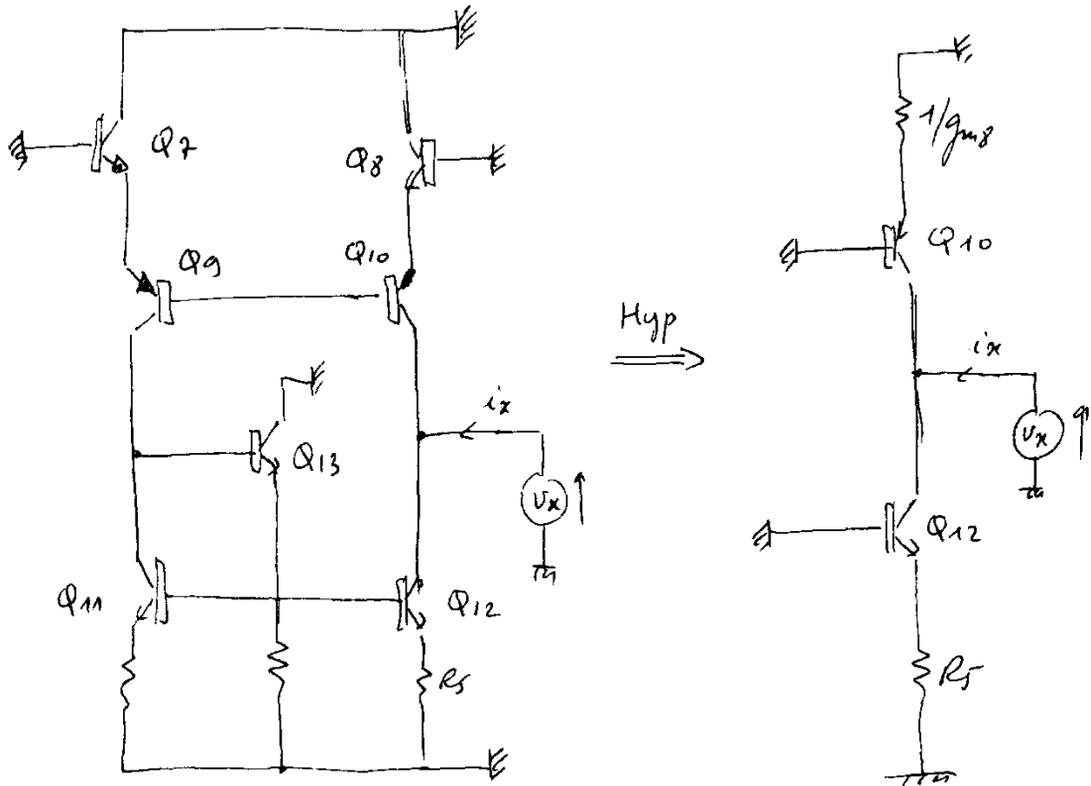
$$e) R_{s1} = \frac{v_x}{i_x}$$

Un mot sur les hyp. à faire :

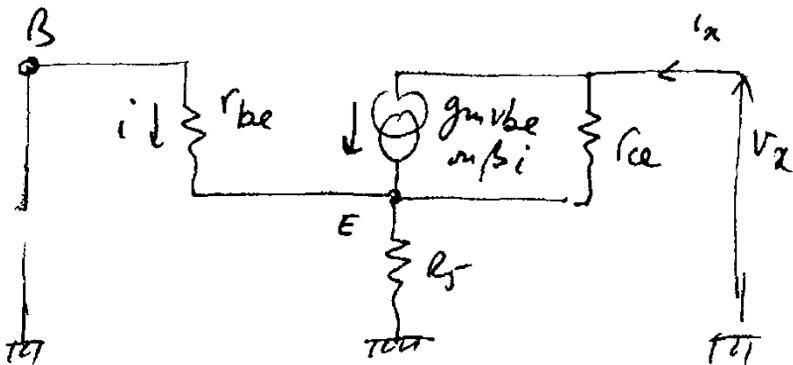
La résistance de Thévenin présente à la base de  $Q_{12}$  est  $\ll$  à  $r_{\pi}$  de  $Q_{12} \rightarrow$  erreur minime en affirmant que la base de  $Q_{12}$  est à la masse.

Tous les transistors, exceptés  $Q_{10}$  et  $Q_{12}$  ont leurs collecteurs connectés à des points ayant une faible résistance  $\Rightarrow$  donc pratiquement à la masse. Seuls sont déterminants les collecteurs de  $Q_{10}$  et  $Q_{12}$ .

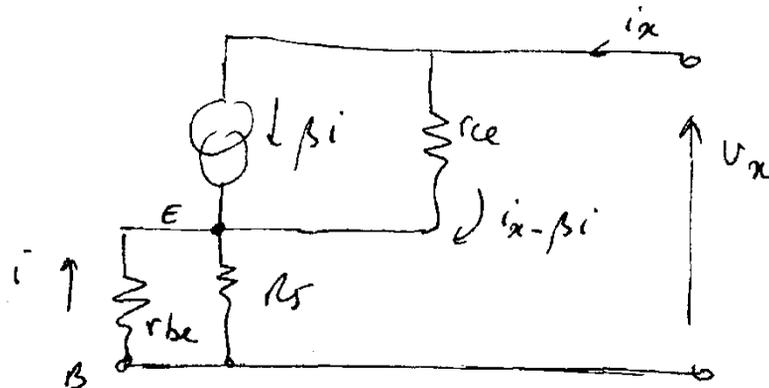
Les bases de  $Q_9$  et  $Q_{10}$  ne sont pas théoriquement à la masse (aux variations).  
On supposera cependant que leur potentiel évolue peu autour de zéro (peut être prouvé par un calcul long).



I.1.4.12.2.β. Dans le cadre de ces hypothèses  $R_{s1}$  est la résistance de sortie de  $Q_{10}$  en parallèle sur celle de  $Q_{12}$ .  
⇒ Résistance de sortie de  $Q_{12}$ .



$$g_m = \frac{\beta}{r_{be}}$$



$$\frac{v_x}{i_x} = R_s = \frac{R_5 r_{be}}{R_5 + r_{be}} + r_{ce} \left( 1 + \frac{\beta R_5}{R_5 + r_{be}} \right)$$

On peut remplacer  $r_{be}$  par  $\beta/g_m$

$$\text{Pour } Q_{12} : R_{s12} = \frac{R_5 \beta/g_{m12}}{R_5 + \beta/g_{m12}} + r_{ce12} \left( 1 + \frac{\beta R_5}{R_5 + \beta/g_{m12}} \right)$$

$$R_{s12} = \frac{\beta R_5}{\beta + g_{m12} R_5} + r_{ce12} \frac{g_{m12} (\beta + 1) R_5 + \beta}{\beta + g_{m12} R_5}$$

Compte tenu de ordres de grandeurs habituels on peut simplifier  $R_{s12}$  :

$$R_{s12} \# r_{ce12} \frac{\beta + g_{m12} (\beta + 1) R_5}{\beta + g_{m12} R_5} \quad (\text{1er terme éliminé}).$$

$$R_{s12} \# r_{ce12} \frac{\beta (1 + g_{m12} R_5)}{\beta + g_{m12} R_5} > r_{ce12} \quad \text{ici } \beta = \beta_N \approx 200.$$

Résistance de sortie de  $Q_{10}$ .

L'émetteur de  $Q_{10}$  est chargé par la résistance vue de l'émetteur de  $Q_8$ , ce dernier ayant sa base à la masse, c'est donc  $1/g_{m8}$ . On reprend la formule établie ci-dessus dans laquelle on remplace  $R_5$  par  $1/g_{m8}$  est  $\beta$  par  $\beta_p$ .

$$R_{s10} = r_{ce10} \frac{\beta_p g_{m8} + (\beta_p + 1) g_{m10}}{\beta_p g_{m8} + g_{m10}}$$

en supposant qu'on puisse faire les mêmes hyp. que ci-dessus. Ici 1 non négligé devant  $\beta_p$  car  $\beta_p = q.q$  unités.

$$\text{On sait que } g_m = \frac{I_E}{U_T}$$

Les transistors  $Q_8$ ,  $Q_{10}$  et  $Q_{12}$  sont en « série »  $\Rightarrow$  parcourus par le même courant (à  $i_{bases}$  près) remarque pour la question suivante.

$$\text{D'où } R_{s1} = \frac{R_{s10} \times R_{s12}}{R_{s10} + R_{s12}}$$

I.1.4.12.3. *Applications numériques*

$$g_{m12} = g_{m10} = 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\beta = 200, \beta_p = 5$$

$$g_{m12} R_5 = 0.5$$

$$R_{e1} = 4 \beta r_{e7}$$

$$R_{s12} = 1.5 r_{ce12}$$

$$\rightarrow \underline{R_{s1} \# 6 \text{ MW}}$$

$$R_{s10} = 1.83 R_{ce10}$$

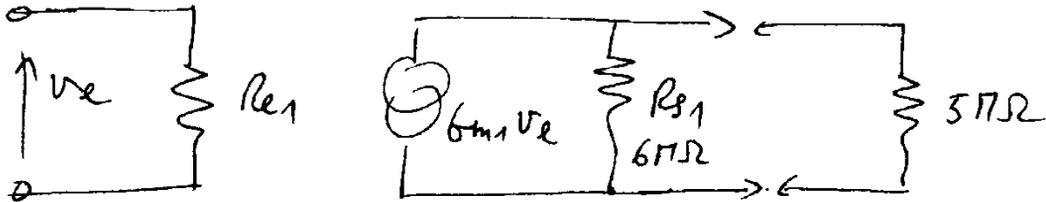
\* En admettant que l'étage d'entrée linéarise parfaitement la sonde.

$$r_{e7} = \frac{U_T}{I_E} = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{I_E} \quad \text{or } I_E \approx 11 \mu\text{A}$$

$$r_{e7} = 2,3 \cdot 10^3 \Omega \quad R_{c1} = 1,84 \text{ M}\Omega.$$

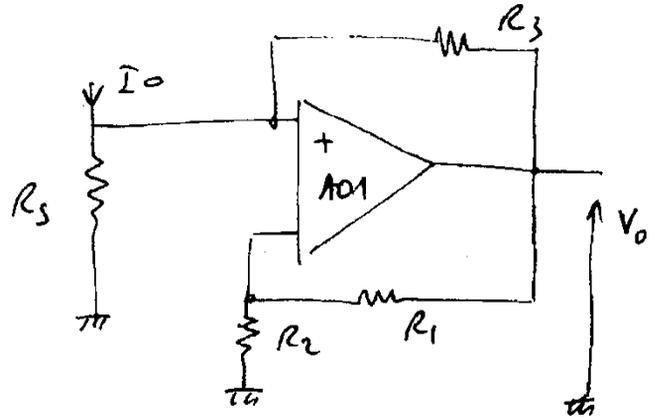
$$G_{m1} = \frac{\alpha p}{2 r_{e7}} \quad G_{m1} = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ S}$$

I.1.4.13. L'étage peut être schématisé ainsi



$$G_v = G_{m1} * \frac{5 \times 6}{11} \cdot 10^3 \approx 1,15 \cdot 10^3$$

I.2.1.α.  $I_0$  = courant constant qui alimente :  
sonde + circuit de mesure.



Sans  $R_3$  :  $G_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$

Avec  $R_3$  :  $V_0 = \frac{G_0 R_3 I_0 R_5}{R_3 + R_5 (1 - G_0)} \rightarrow G_e = \frac{G_0 R_3}{R_3 + R_5 (1 - G_0)}$

I.2.1.β.  $G_e$  dépend de  $R_5$  donc de  $I$ .

I.2.2. Si on pose  $G_0 R_3 I_0 = K$

$$R_3/R_0 = r_3 \quad V_0 = K \frac{1 + At + \beta t^2}{r_3 + \alpha (1 + At + \beta t^2)}$$

$$1 - G_0 = \alpha$$

En faisant la division (puissances croissantes de t)

$$V_0(t) = \frac{k}{\alpha + r_3} \left[ 1 + \left( A - \frac{\alpha A}{\alpha + r_3} \right) t + \left( B - \frac{\alpha B}{\alpha + r_3} - \frac{\alpha A^2}{\alpha + r_3} + \frac{\alpha^2 A_2}{(\alpha + r_3)^2} \right) t^2 + \dots \right]$$

I.2.3.1.  $\alpha_0 = \frac{k}{\alpha + r_3}, \alpha_1 = \frac{k A r_3}{(\alpha + r_3)^2}, \alpha_2 = \frac{k}{\alpha + r_3} \left( B - \frac{\alpha B}{\alpha + r_3} - \frac{\alpha A^2}{\alpha + r_3} + \frac{\alpha^2 A^2}{(\alpha + r_3)^2} \right)$

I.2.3.2.  $\alpha_2 = \alpha_3, \dots = 0$

Si on fait en sorte que  $\alpha_2 = 0$  il est fort probable que  $\alpha_3 \neq 0$ .

I.2.3.3.  $\alpha_2 = 0$  entraîne  $B r_3 + \alpha (B - A^2) = 0$

Exprimons  $r_3$  en fonction de  $\alpha$  terme que l'on peut choisir.

$r_3 = - \alpha (27,98)$

Or  $r_3 = \frac{R_3}{R_0}$  avec  $R_0 = 100 \Omega$ .

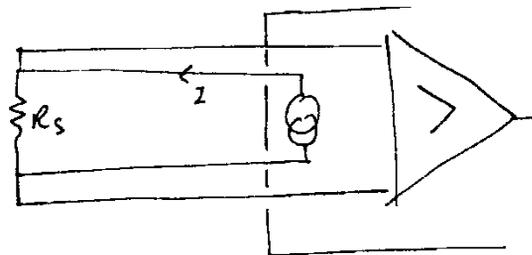
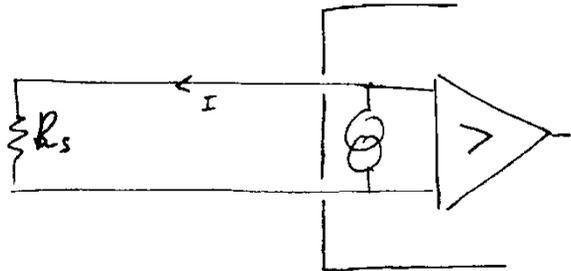
On a posé  $\alpha = 1 - G_0$  où  $G_0 = 1 + \frac{R_1}{R_2}$

La valeur  $G_0 = 2$  convient soit  $\alpha = -1$ .

$R_3 = 2798 \Omega$ .

I.2.4. Mesure 4 fils

Pas bon car on mesure également la résistance des fils de liaison



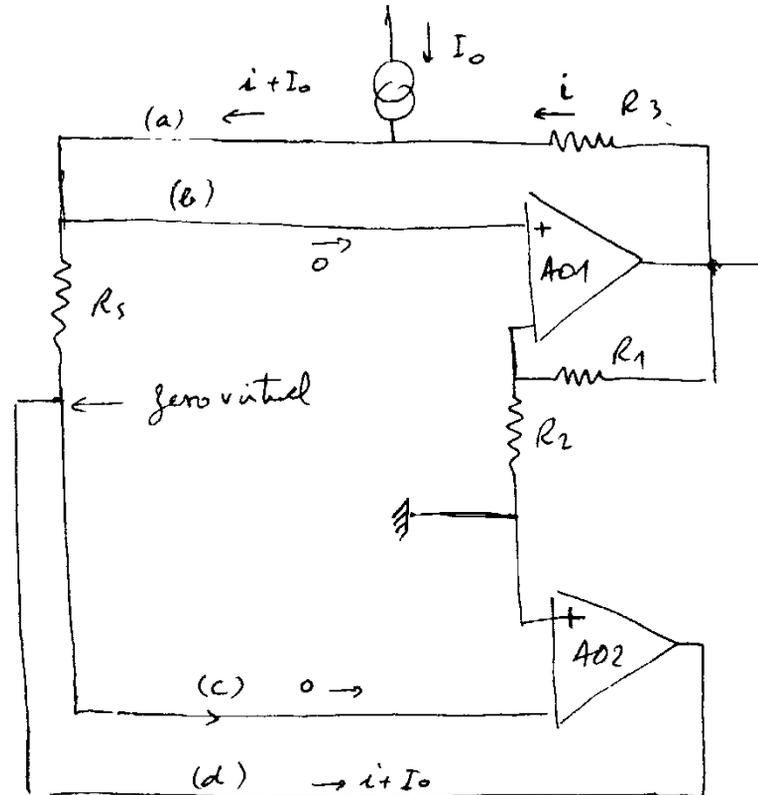
Bon

Le rôle d'AO<sub>2</sub> est d'assurer la mesure 4 fils. Voir schéma suivant

Les 4 fils (a), (b), (c), (d) appartiennent au même câble d'alimentation de la sonde. (a) et (d) véhiculent le courant de sonde  $I_0 + i(t)$ , (b) et (c) sont les prises de tension.

I.2.5.1. Origines des défauts de type tensions :

- Tensions parasites de thermocouples dues au connecteur.
- Masse virtuelle de AO<sub>2</sub> imparfaite.
- Offset de AO<sub>1</sub>...



Origines des défauts dus à des courants : essentiellement les courants  $i_d^+$  et  $i_d^-$  courants d'entrée des AOP. (souvent leur déséquilibre est plus ennuyeux que leurs propres valeurs).  
 Calculs de  $V_{od}$ . Sonde non alimentée  $t \in [0, t_1]$ .

$$V_{od} = \frac{2(R_s + R_3)}{R_s - R_3} \left\{ -\frac{R_2}{2} i_d^- + \frac{R_s R_3}{R_3 + R_s} i_d^+ + \frac{R_3}{R_s + R_3} e \right\}$$

Sur le marché on trouve des AOP ayant une tension de décalage de l'ordre de  $50 \mu V$  et des courants d'entrée de l'ordre du nA ou moins (avec  $\Delta i_d < 0,5 nA$ ). Mais on a toujours présents les défauts d'origine tension (cf. + haut). Ceci nécessite donc de mémoriser cette tension parasite  $V_{od}$  pendant la phase d'autozéro et de la retrancher par la suite.

1.2.5.2. Calcul de  $V_2$  pour  $t \in [t_0, t_1]$

Pour  $t \in [t_0, t_1]$   $R_4$  est alimenté par  $I_0$  ( $S_c$  fermé)

$$V_1 = R_4 I_0 + V_{od} \text{ en admettant nulle la résistance de sortie de A01}$$

$$V_2 = A (R_4 I_0 + V_{od}) = V_{c1} \text{ car } S_1 \text{ fermé.}$$

$R_4$  ajustable ce peut être  $R_4 // \text{imp. d'entrée de A, de } +R_4 \text{ inclut l'imp. de sortie de A01.}$

$$R_4 \approx 200 \Omega$$

1.2.5.3. Pour  $t \in [t_1, t_2]$  la sonde est alimentée :

$$V_0 = G_e R_s I_0 + V_{od}$$

$$V_2 = A [G_e R_s I_0 + V_{od}]$$

$$V_e = V_2 - V_{c1} \text{ car } S_1 \text{ ouvert}$$

$$V_e = A G_e R_s I_0 + A V_{od} - A R_4 I_0 - A V_{od}$$

La qualité  $A R_4 I_0$  est une constante qui assure la translation de niveau de telle sorte qu'à  $0^\circ C$  on ait  $V_e = 0$  : à température nulle  $\rightarrow$  tension de sortie nulle.

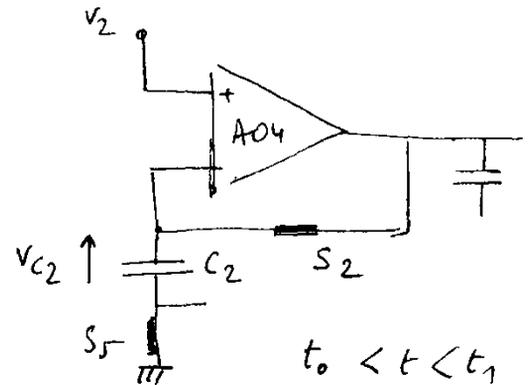
L'hypothèse à formuler est qu'il ne faut pas que  $V_{od}$  varie brusquement lorsqu'on passe de la phase d'autozéro à la phase mesure.

I.2.6. Sortie analogique

I.2.6.1.  $t \in [t_0, t_1]$

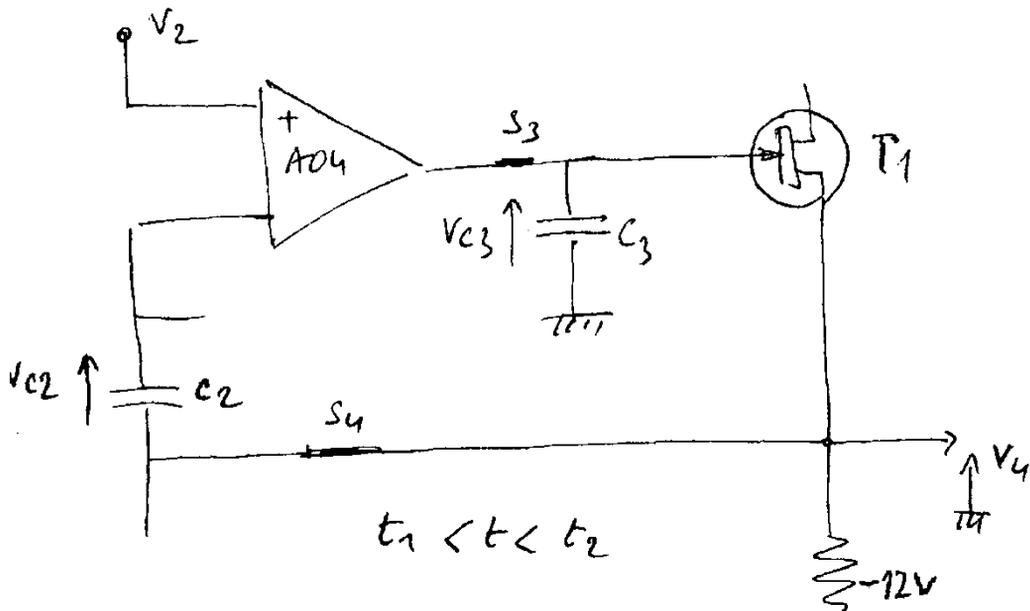
S5 fermé ainsi que S2. A04 est un étage suiveur donc

$$V_{c2} = V_2 \quad (V_{c2} \text{ contient } A [R_4 I_0 + V_{od}])$$



I.2.6.2.

$$\left. \begin{array}{l} \text{A } t_1 \text{ S}_2 \text{ ouvert, S}_5 \text{ ouvert, S}_3 \text{ et S}_4 \text{ fermés} \\ \text{Sb fermé} \end{array} \right\} V_2 = A (G_e R_S I_0 + V_{od})$$



Si  $A0_4$  fonctionne en régime linéaire  $e^+ = e^-$  (boucle de C.R formée par  $T_1, C_2$ )  $\rightarrow$

$$V_4 = V_2 - V_{c2}$$

$$\text{donc } V_4 = A G_e R_S I_0 + A V_{od} - A R_4 I_0 - A V_{od} \equiv V_c$$

$V_4$  est construite comme  $V_e$ .

I.2.6.3.

A  $t_1^+$  :  $V_{c3} = V_2$  \* au delà de  $t_2$  le condensateur  $c_3$  a pour rôle de mémoriser  $V_2$  afin d'assurer la continuité de  $V_4$ .

\* Si on admet toujours que la sortie de  $A0_4$  suit l'entrée malgré la complexité de la boucle de C.R. alors

$$V_{c3} = V_{GS} - \underbrace{V_{c2} + V_2}_{V_4} \quad \text{or } V_{c3} = V_2 \quad \text{donc } V_{GS} = V_{c2}$$

Au delà de  $t_2$  on a  $V_4 = V_2 - V_{c2}$  c'est-à-dire maintien de la tension présente dans  $[t_1, t_2]$ .

I.2.6.4. Pour  $t = 0^\circ \text{C}$  on a  $V_4 = 0$

Pour  $t = 600 \text{ K}$  on veut  $V_4 = 6 \text{ V}$

$$R_s(600) = 314 \Omega$$

$$V_0 = G_0 R_s(t) I_0 \frac{R_3}{R_3 - R_s} \text{ à la sortie de A01}$$

$$V_0(600) = 0,7073 \text{ V}$$

$$\text{et } V_0(0) = 0,2074 \text{ V}$$

$$\Delta V_0 = V_0(600) - V_0(0) = 0,5 \text{ V}$$

$$\Delta V_s = 6 \text{ V} \rightarrow A = \frac{6}{0,5} = 12$$

### I.3. Affichage numérique

#### I.3.1. code B.C.D.

Un nombre décimal est codé avec 4 éléments binaire (e.b) (ou bit)

476,58

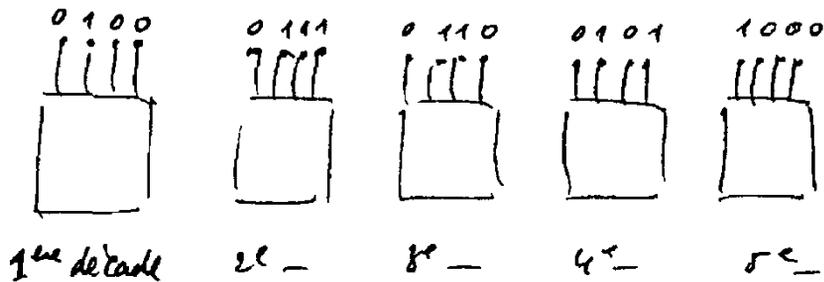
4 : 0100

7 : 0111

6 : 0110

5 : 0101

8 : 1000



I.3.2.1. Une décade est réalisée par 4 bascules JK car  $2^3 < 10 < 2^4$ . Un système combinatoire associé à un compteur binaire vrai «trompera» ce dernier qui ne comptera en fait que jusqu'à 10.

N°	t				t'				CP = Π							
	Q <sub>3</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>1</sub>	Q <sub>0</sub>					J3	K3	J2	K2	J1	K1	J0	K0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	X	0	X	0	X	1	X
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	X	0	X	1	X	X	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	X	0	X	X	0	1	X
3	0	0	1	1	0	1	0	0	0	X	1	X	X	1	X	1
4	0	1	0	0	0	1	0	1	0	X	X	0	0	X	1	X
5	0	1	0	1	0	1	1	0	0	X	X	0	1	X	X	1
6	0	1	1	0	0	1	1	1	0	X	X	0	0	X	1	X
7	0	1	1	1	1	0	0	0	1	X	X	1	X	1	X	1
8	1	0	0	0	1	0	0	1	X	0	0	X	0	X	1	X
9	1	0	0	1	0	0	0	0	X	1	0	X	0	X	X	1
10	1	0	1	0	X	X	X	X								
11	1	0	1	1	X	X	X	X								
12	1	1	0	0	X	X	X	X								
13	1	1	0	1	X	X	X	X								
14	1	1	1	0	X	X	X	X								
15	1	1	1	1	X	X	X	X								

		Q <sub>3</sub> Q <sub>2</sub>			
Q <sub>1</sub> Q <sub>0</sub>		00	01	11	10
00		0	0	X	X
01		0	0	X	X
11		0	1	X	X
10		0	0	X	X

J3

		X	X	X
		X	X	X
		X	X	X
		X	X	X
		X	X	X

K3

		0	X	X
		0	X	X
		1	X	X
		0	X	X

J2

		X	0	X
		X	0	X
		X	1	X
		X	0	X

K2

0	0	X	0
1	1	X	0
X	X	X	X
X	0	X	X

J1

X	X	X	X
X	X	X	X
1	X	X	X
0	X	X	X

K1

1	1	X	1
X	X	X	X
X	X	X	X
1	1	X	X

J0

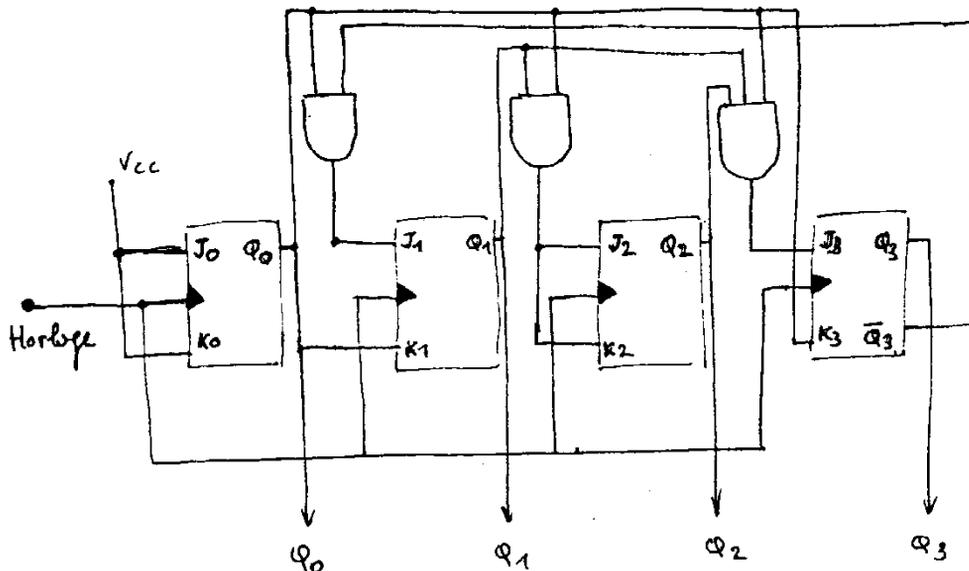
X	X	X	X
1	1	X	1
1	1	X	X
X	X	X	X

K0

$$\begin{aligned}
 J3 &= Q_0 Q_1 Q_2 = J2 Q_2 \\
 J2 &= Q_0 Q_1 \\
 J1 &= Q_0 Q_3 \\
 J0 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K3 &= Q_0 \\
 K2 &= Q_0 Q_1 = J2 \\
 K1 &= Q_0 \text{ ou } K1 = J1 \\
 K0 &= 1
 \end{aligned}$$

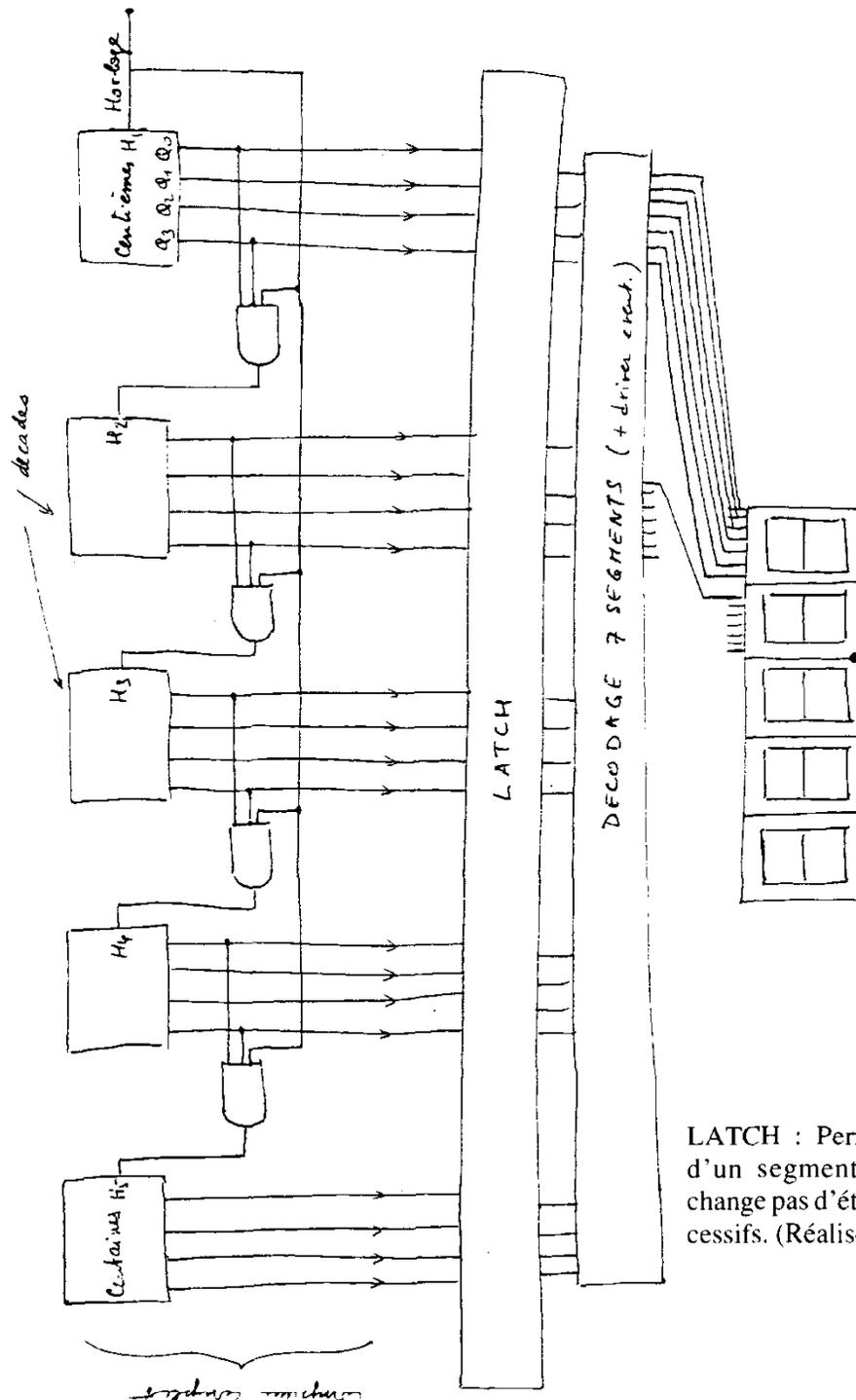
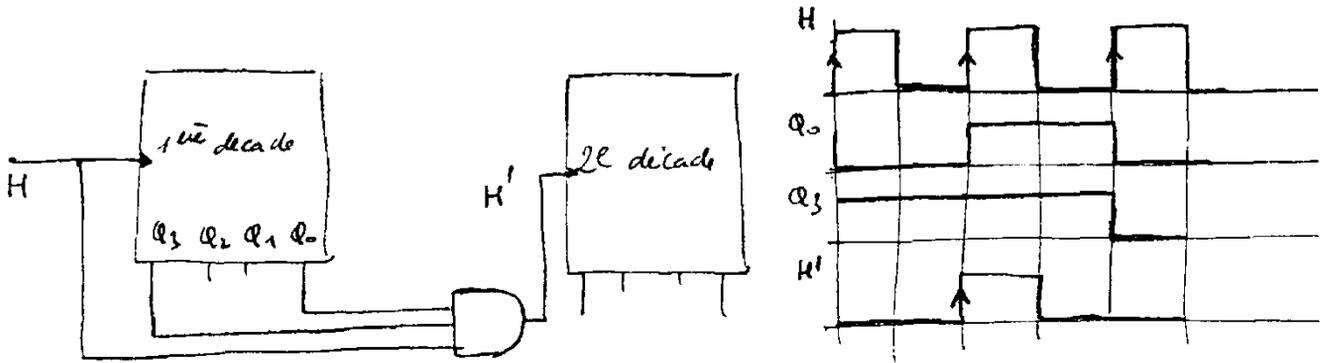
I.3.2.3. Logigramme à associer aux 4 bascules JK pour réaliser une décade.



I.3.2.4. Principe :

Quand la sortie d'une décade est à l'état 1001  $\equiv$  9 il faut envoyer un top d'incrémentaion à la décade suivante au coup d'horloge suivant.

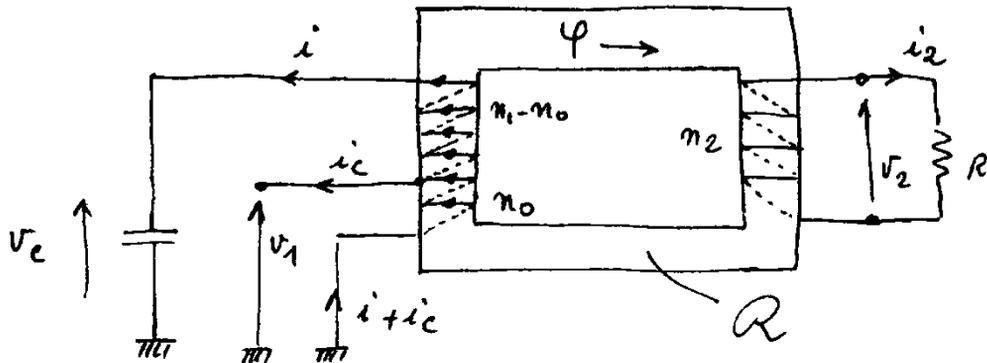
La sortie d'une décade est notée  $Q_3 Q_2 Q_1 Q_0$ . L'occurrence  $Q_3 = Q_0 = 1$  n'a lieu qu'une fois au cours d'un cycle de la décade. L'incrémentement de la décade suivante se fera en synchronisme avec l'horloge par une porte ET.



LATCH : Permet de conserver l'état d'un segment excité si celui-ci ne change pas d'état entre 2 affichages successifs. (Réalisé avec des bascules D)

## DEUXIÈME PARTIE

## II.1.1.1. Choix arbitraire du sens des enroulements pour l'étude.



$$v_1 = n_0 \frac{d\phi}{dt}; \quad v_c = n_1 \frac{d\phi}{dt}; \quad v_2 = n_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$v_c = \frac{n_1}{n_0} v_1 \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{n_2}{n_0} v_1$$

$$\text{II.1.1.2.} \quad i = +C \frac{dv_c}{dt}; \quad i_2 = \frac{v_2}{R} = n_2 \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{n_2}{n_0} v_1$$

$$i = C \frac{n_1}{n_0} \frac{dv_1}{dt}, \quad i_2 = \frac{1}{R} \cdot \frac{n_2}{n_0} v_1$$

## II.1.1.3. Théorème d'Ampère (cas particulier relation d'Hopkinsur appliquée à un circuit magnétique linéaire) (sens de parcours du circuit magnétique dans le sens horaire).

$$-n_0 (i + i_c) - (n_1 - n_0) i - n_2 i_2 = R \phi$$

$$\text{ou} \quad n_0 i_c + n_1 i + n_2 i_2 = -R \phi$$

$$i_c = -\frac{n_1}{n_0} i - \frac{n_2}{n_0} i_2 - \frac{R}{n_0} \phi$$

$$L \text{ formée de } n_1 \text{ spires sur une réluctance } R \rightarrow L = \frac{n_1^2}{R}$$

$$\phi = \frac{1}{n_0} \int v_1 dt$$

$$i_c = -\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 C \frac{dv_1}{dt} - \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 \frac{1}{R} v_1 - \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 \frac{1}{L} \int v_1 dt$$

Si on prend  $v_{CE}$  à la place de  $v_1$  c.f. figure 2.2. du texte alors  $v_{CE} = -v_1$  d'où :

$$i_c = -\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 C \frac{dv_{CE}}{dt} + \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{dv_{CE}}{dt} + \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 \frac{1}{L} \int v_{CE} dt$$

$R = \text{charge du secondaire}$

II.1.1.4. Cas où il y aurait des fuites de flux

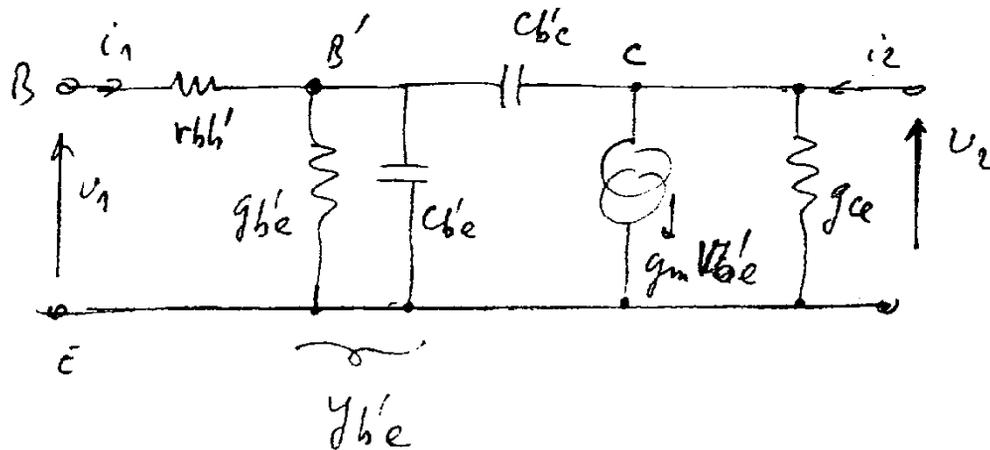
Il est intéressant d'étudier comment évoluerait  $i_c$  si on faisait intervenir les fuites, toutes chose égales par ailleurs.

Dans ces conditions la tension aux bornes de la charge diminue donc le courant  $i_2$ , donc le courant  $i_c$ .

En résumé : fuites  $\Rightarrow$  diminution de  $i_c$

II.2. Étude du transistor

II.2.1. Le schéma de Giacoleto est le suivant :



on cherche  $[y]$  telle que 
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

(1)  $i_1 = g_{bb'} (v_1 - v_{b'e})$  avec

B'  $\rightarrow$  (2)  $i_1 - y_{b'e} v_{b'e} + y_{b'c} (v_2 - v_{b'e}) = 0$   $y_{bb'} = 1 / r_{bb'}$

C  $\rightarrow$  (3)  $i_2 - v_2 g_{ce} - g_m v_{b'e} - y_{b'c} (v_2 - v_{b'e}) = 0$   $y_{b'e} = g_{b'e} + j C_{b'e} \omega$

(2)  $\rightarrow$   $g_{bb'} (v_1 - v_{b'e}) - y_{b'e} v_{b'e} + y_{b'c} (v_2 - v_{b'e}) = 0$   $y_{b'c} = j C_{b'c} \omega$

$-v_{b'e} [g_{bb'} + y_{b'e} + y_{b'c}] + g_{bb'} v_1 + y_{b'c} v_2 = 0$

$v_{b'e} = \frac{g_{bb'} v_1 + y_{b'c} v_2}{D}$  (4) cette relation permet d'exprimer  $v_{b'e}$  en fonction de  $v_1$  et  $v_2$

Portons (4) dans (1) et (3)

(4)  $\rightarrow$  (1)

$$i_1 = g_{bb'} v_1 - g_{bb'} \frac{g_{bb'} v_1 + y_{b'c} v_2}{D}$$

$$i_1 = g_{bb'} \left( 1 - \frac{g_{bb'}}{D} \right) v_1 - \frac{g_{bb'} y_{b'c}}{D} v_2$$

(4)  $\rightarrow$  (3)

$$i_2 = v_2 g_{ce} + y_{b'c} v_2 + v_{b'e} (g_m - y_{b'c})$$

$$i_2 = g_{ce} v_2 + y_{b'c} v_2 + (g_m - y_{b'c}) \frac{g_{bb'} v_1 + y_{b'c} v_2}{D}$$

$$i_2 = (g_m - y_{b'c}) \frac{g_{bb'}}{D} v_1 + \left[ g_{ce} + y_{b'c} + (g_m - y_{b'c}) \frac{y_{b'c}}{D} \right] v_2$$

d'où :

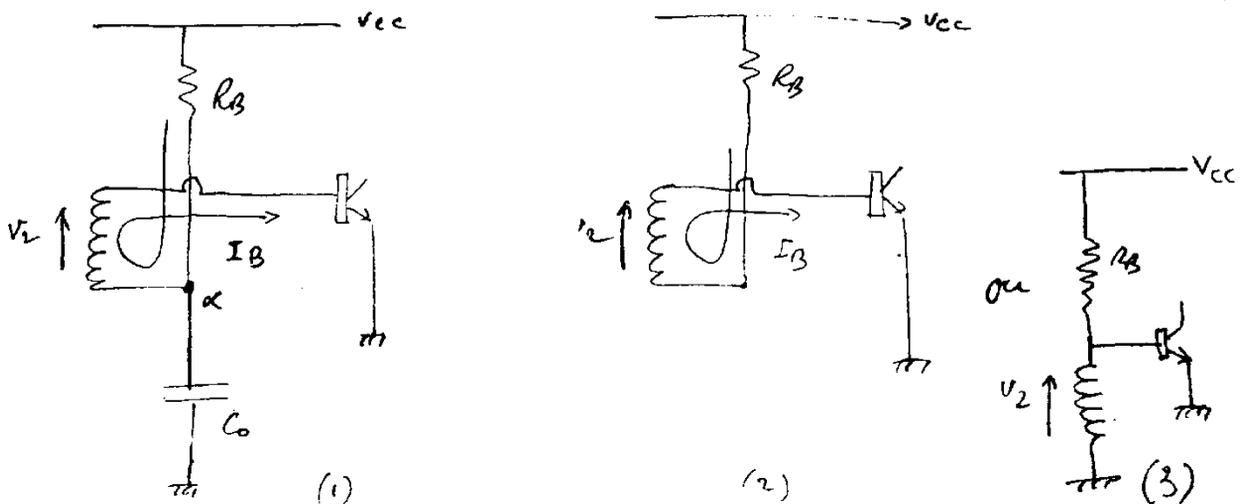
$$y_{11} = g_{bb'} \left( 1 - \frac{g_{bb'}}{D} \right)$$

$$y_{12} = - \frac{g_{bb'} y_{b'c}}{D} = -j \frac{g_{bb'} c_{b'c} \omega}{D}$$

$$y_{21} = g_{bb'} \frac{g_m - j c_{b'c} \omega}{D}$$

$$y_{22} = g_{ce} + j c_{b'c} \omega + j \frac{g_m - j c_{b'c} \omega}{D} c_{b'c} \omega$$

II.2.2. Rôle de  $C_0$



Dans les 2 cas le courant de polarisation est le même. C'est aux variations que les différences apparaissent.

Cas (1) aux variations  $\alpha$  est à la masse  $\rightarrow v_2$  appliquée entre base et masse.

Cas (2)  $R_B$  est en série avec le secondaire du transformateur ce qui fait chuter l'amplification car dans ce type de polarisation  $R_B > 100 \text{ k}\Omega$ .

Cas (3) la base du transistor est à la masse en continu  $\rightarrow$  pas de polarisation de base. A rejeter.

II.2.3. Approximation sur [Y].

II.2.3.1. Calcul de  $f_M$

$$y_{b'e} = g_{b'e} + j C_{b'e} \omega$$

Si  $I_E$  est faible  $r_{b'e}$  reste relativement élevée et donc toujours  $\gg r_{bb'}$ , qui elle est indépendante de  $I_E$

$$|y_{b'e}| = \left( g_{b'e}^2 + C_{b'e}^2 \omega^2 \right)^{1/2} \ll g_{bb'}$$

$$\rightarrow \omega^2 < \frac{g_{bb'}^2 - g_{b'e}^2}{C_{b'e}^2} \quad \begin{array}{l} g_{bb'} = 0,01 \\ g_{b'e} = 1/1500 \\ c_{b'e} = 22 \cdot 10^{-12} \text{ F} \end{array}$$

$$\rightarrow \omega \ll \frac{10^{10}}{22} \rightarrow \omega \ll 4,54 \cdot 10^8 \text{ Rad s}^{-1}$$

$$f \ll 72,3 \text{ MHz} \quad \boxed{f_M = 72,3 \text{ MHz}}$$

II.2.3.2. Examinons D :

$$D = g_{bb'} + y_{b'e} + y_{b'c}$$

$$D = g_{bb'} + g_{b'e} + j c_{b'e} \omega + j c_{b'c} \omega \quad \text{or } c_{b'c} \ll c_{b'e}$$

$$D = g_{bb'} + g_{b'e} + j c_{b'e} \omega$$

Examinons chaque  $Y_{ij}$  de  $\{Y\}$

$$y_{11} = g_{bb'} \left( 1 - \frac{g_{bb'}}{D} \right) = g_{bb'} \left( 1 - \frac{g_{bb'}}{g_{bb'} + g_{b'e} + j c_{b'e} \omega} \right)$$

$$y_{11} = g_{bb'} \frac{(g_{bb'} + g_{b'e} + j c_{b'e} \omega - g_{bb'})}{D} = g_{bb'} \frac{g_{b'e} + j c_{b'e} \omega}{g_{bb'} + g_{b'e} + j c_{b'e} \omega}$$

$$y_{11} = g_{bb'} \frac{y_{b'e}}{g_{bb'} + y_{b'e}} \# g_{bb'} \frac{y_{b'e}}{g_{bb'}} \quad \text{car } g_{bb'} \gg |y_{b'e}|$$

$$\boxed{y_{11} = y_{b'e}}$$

$$\text{Cas de } y_{12} = -j \frac{g_{bb'} c_{b'c} \omega}{D} \# -j \frac{C_{b'c} \omega}{1 + \frac{1}{g_{bb'}} y_{b'e}}$$

Compte tenu de la simplification faite des  $y_{11}$  alors :

$$\boxed{y_{12} = -j c_{b'c} \omega}$$

$$\text{Cas de } y_{21} = \frac{g_{bb'}}{D} (g_m - j c_{b'c} \omega)$$

$$\frac{g_{bb'}}{D} = \frac{g_{bb'}}{g_{bb'} + y_{b'e}} \approx 1$$

$$\boxed{y_{21} = g_m - j c_{b'c} \omega}$$

Enfin :  $y_{22}$

$$y_{22} = g_{ce} + j c_{b'c} \omega + j \frac{g_m - j c_{b'c} \omega}{D} c_{b'c} \omega$$

Sachant que  $D \approx g_{bb'}$ ,

$$y_{22} = g_{ce} + j c_{b'c} \omega + j \frac{g_m}{g_{bb'}} c_{b'c} \omega + \frac{(c_{b'c} \omega)^2}{g_{bb'}} \rightarrow 0 (< 10^{-6})$$

$$y_{22} = g_{ce} + j c_{b'c} \omega \left( 1 + \frac{g_m}{g_{bb'}} \right)$$

En résumé :

$$y_{11} = y_{b'e}$$

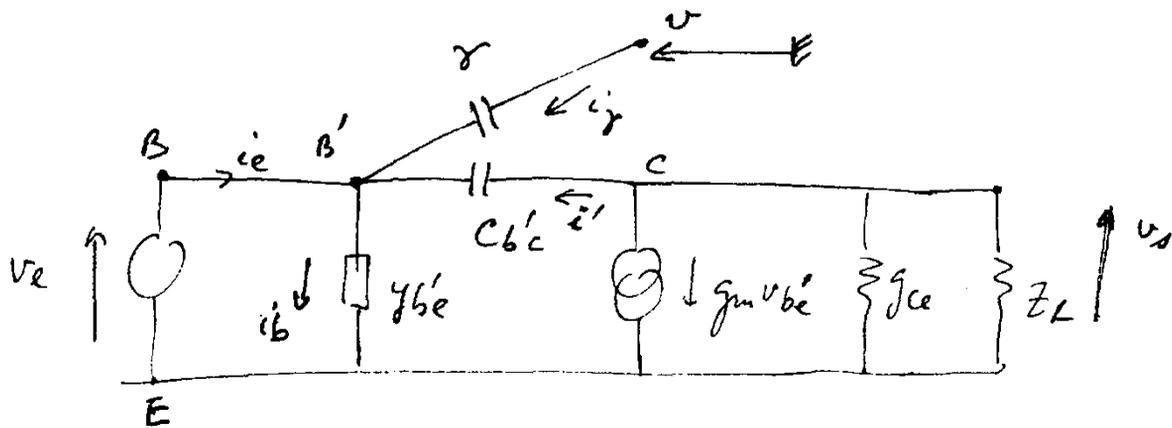
$$y_{12} = -j c_{b'c} \omega$$

$$y_{21} = g_m - j c_{b'e} \omega$$

$$y_{22} = g_{ce} + j c_{b'c} \omega \left( 1 + \frac{g_m}{g_{bb'}} \right)$$

### II.3. Neurodynamage. Principe

#### II.3.1.1.



Ici  $r_{bb'} \approx 0$  (ce qu'on fera désormais)

sans  $\gamma$  :  $i' = j c_{b'c} \omega (v_s - v_{be})$

$\rightarrow i_b = i_c + i' \rightarrow$  il y a couplage entre entrée et sortie. Les calculs de  $z_i$  ne sont pas demandés.

Il est évident qu'il faut neutraliser l'action de  $c_{b'c}$ .

avec  $\gamma$  : au nœud B' on peut faire en sorte que

$$i_\gamma + i' = 0$$

$$i_\gamma = j \gamma \omega (v - v_{be})$$

$$j \gamma \omega (v - v_{be}) + j c_{b'c} \omega (v_s - v_{be}) = 0$$

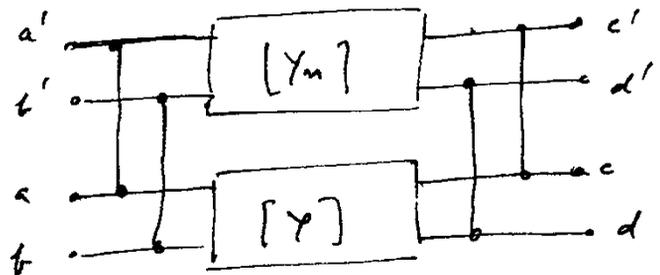
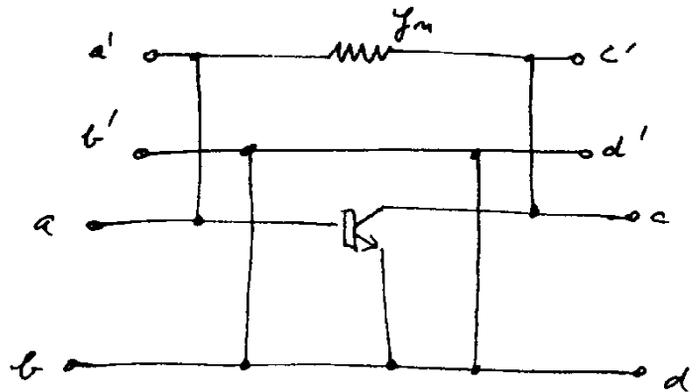
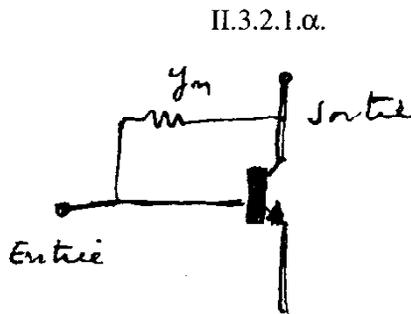
$$\gamma = -c_{b'c} \frac{v_s - v_{be}}{v - v_{be}}$$

$c_{b'c}$  est  $> 0$  ainsi que  $\gamma$  donc  $v_s$  et  $v$  doivent être en opposition de phase pour satisfaire la condition ci-dessus

II.3.1.2. Si le gain de l'étage  $G_0$  est grand devant 1 alors : il faut également que  $v$  soit grand devant  $v_{be}$ , ce qui est le cas ici.

$$\gamma_v \# -C_{b'e} v_s$$

II.3.2. Neurodynamage par quadripôle fictif.



Les 2 quadripôles sont associés en parallèle, la matrice admittance résultante est la somme des matrices associées.

$$[Y'] = [Y_m] + [Y].$$

$$[Y_n] = \begin{bmatrix} y_n & -y_n \\ -y_n & y_n \end{bmatrix}; \quad [Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$$

$$[Y'] = \begin{bmatrix} y_{11} + y_n & y_{12} - y_n \\ y_{21} - y_n & y_{22} + y_n \end{bmatrix} \quad \text{Interaction nulle entrée-sortie si le terme de}$$

$$\text{couplage } y'_{12} = y_{12} - y_n = 0$$

$$\rightarrow y_n = -j C_{b'c} \omega$$

II.3.2.1.β. Le terme de «fictif» vient du fait que la capacité à câbler entre B et C du transistor est  $< 0$ . On admet que le neurodynamage réel transforme effectivement  $[Y]$  en  $[Y']$  que l'on garde ainsi.

II.3.2.2. Calculs des nouveaux paramètres du transistor neurodynamé.

$$y'_{11} = g_{b'e} + j C_{b'e} \omega - j C_{b'c} \omega \# g_{b'e} v + j C_{b'e} \omega \quad \text{car } C_{b'c} \ll C_{b'e}$$

$$y'_{12} = 0$$

$$y'_{21} = g_m - j C_{b,c} \omega + j C_{b,c} \omega = g_m$$

$$y'_{22} = g_{ce} + j C_{b'e} \omega + j C_{b'e} \omega \frac{g_m}{g_{bb'}} - j C_{b'e} \omega = g_{ce} + j C_{b'e} \omega \frac{g_m}{g_{bb'}}$$

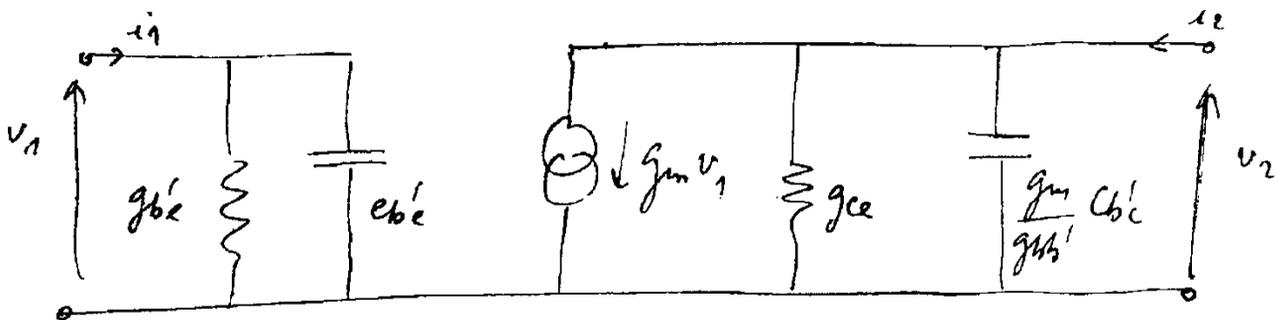
$$y'_{11} = g_{b'e} + j C_{b'e} \omega = y_{b'e}$$

$$y'_{12} = 0$$

$$y'_{21} = g_m$$

$$y'_{22} = g_{ce} + j C_{b'e} \omega \frac{g_m}{g_{bb'}}$$

II.3.2.3. Schéma aux variations



Dans le cadre des données  $\frac{g_m}{g_{bb'}} = \frac{35 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} = 3,5$ .

La capacité ramenée entre C et E est de l'ordre de 7pF.

II.4. Étude sommaire de l'amplificateur

$n_1 = n'_1 \Rightarrow$  les inductances  $L_1$  et  $L_2$  sont égales et posées =  $L$ .

II.4.1. Bande passante de l'étage n° 1

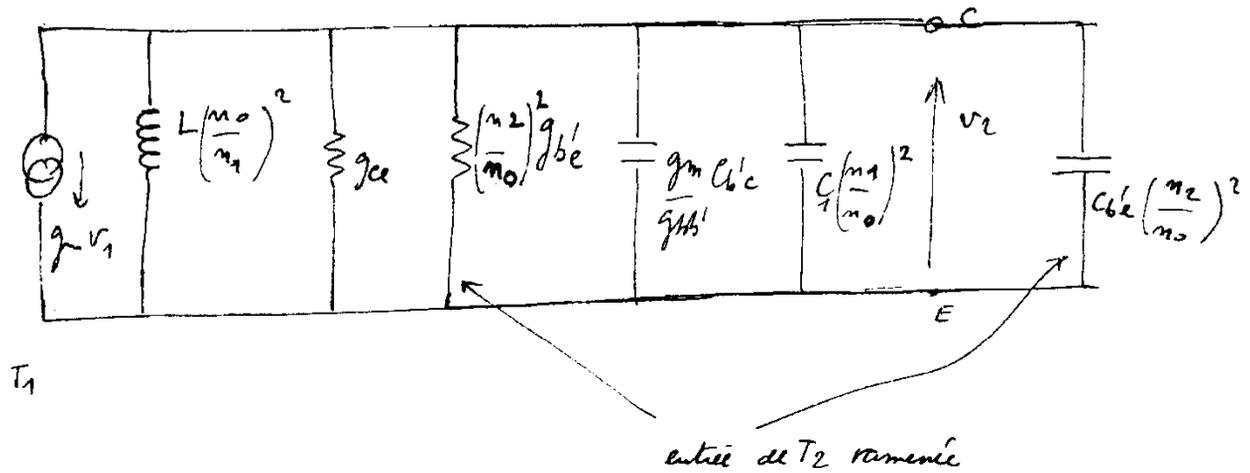
$B = f_0 / Q$ . Pour ce type de circuit  $Q = \frac{R}{L \omega_0}$

$$B = \frac{L \omega_0^2}{2\pi R} = \frac{L \omega_0^2 C}{2\pi R C} = \frac{1}{2\pi R C}$$

$$B = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{g}{c} \text{ en posant } g = 1/R$$

Dans l'étude précédente on a déterminé le schéma simplifié du transistor.  $T_1$  est chargé par  $T_2$  par l'intermédiaire d'un transformateur qui ramène son admittance d'entrée.

D'après I.1.3. on peut donc faire le schéma aux variations suivant :



$$g = g_{ce} + \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 g_{b'e} \quad \text{d'après ce qui a été établi au 1.1.2. 1.1.3. c.f. coeff de } \frac{1}{R}$$

dans l'expression de  $i_c$

$$C = \frac{g_m}{g_{bb'}} C_{b'e} + C_1 \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 + C_{b'e} \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2$$

$$B_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{g_{ce} + \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 g_{b'e}}{\frac{g_m}{g_{bb'}} C_{b'e} + C_1 \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 + C_{b'e} \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2}$$

II.4.2. Amplification en tension au 1<sup>er</sup> étage au voisinage de  $f_1$ .

Le collecteur est chargé par R, L, C, en //.

Exprimer y autour de  $f_1$   $h_1 = \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \rightarrow$

$$y = g + \frac{j}{L\omega} (LC\omega^2 - 1) \quad \omega = \omega_1 (1 + h_1) \text{ par def. de } h_1$$

$$y = g + \frac{j}{L\omega} [LC\omega_1^2 (1 + 2h_1 + h_1^2) - 1]$$

$$h_1^2 \ll 2h_1$$

$$y \approx g + \frac{j(2h_1)}{L\omega_1(1+h_1)} \approx g + j \frac{2h_1}{L\omega_1}$$

or  $Q_1 = \frac{R}{L\omega_1} = \frac{1}{gL\omega_1} \rightarrow y = g [1 + j 2Q_1 h_1]$

$$y_1 = g_1 [1 + j 2 Q_1 h_1]$$

gain du 1er étage :

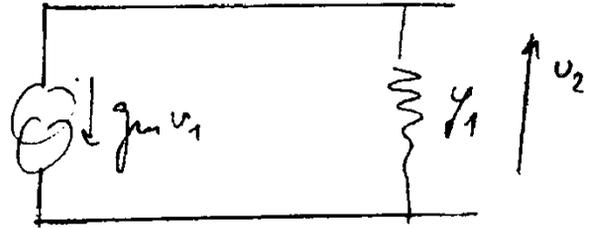
$$v_2 = -g_m v_1 / y_1 \rightarrow G'_1(h_1) = -\frac{g_m}{y_1(h_1)}$$

Explicitons  $g_1$  de  $y_1$

$$g_1 = g_{ce} + \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 g_{b'e}$$

$$G'_1(h_1) = -\frac{g_m}{\left(g_{ce} + \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 g_{b'e}\right) (1 + j 2 Q_1 h_1)}$$

Le gain de l'étage est  $\frac{\text{tension sur base de } T_2}{v_1} \Rightarrow \text{il faut multiplier } G'_1(h_1) \text{ par } \frac{n_2}{n_0}$



$$G_1(h_1) = -\frac{g_m \frac{n_2}{n_0}}{\left(g_{ce} + \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 g_{b'e}\right) (1 + j 2 Q_1 h_1)} \quad h_1 = \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}$$

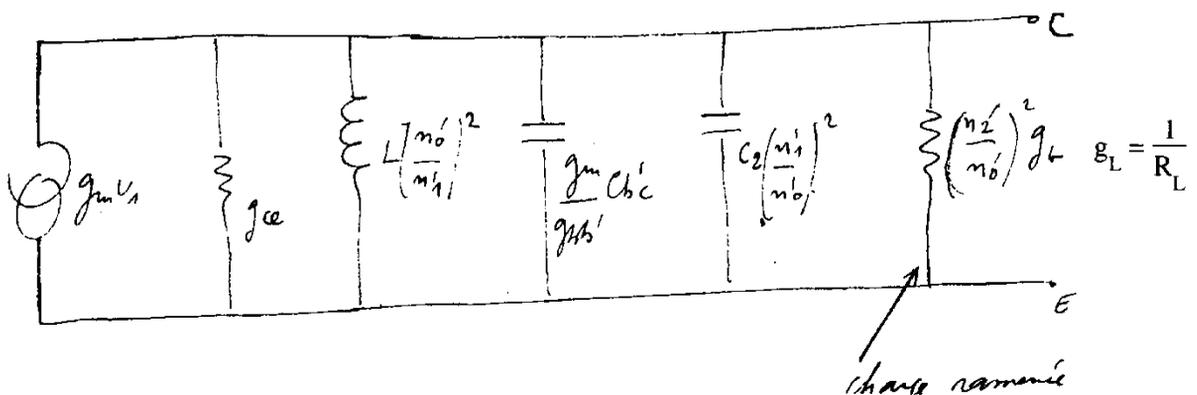
II.4.3. Calcul de  $Q_1$

$Q_1 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$  cette expression fait apparaître tous les éléments du circuit de charge du collecteur de  $T_1$ .

$$Q_1 = \frac{1}{g_{ce} + \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 g_{b'e}} \frac{C_{b'e} \frac{g_m}{g_{bb'}} + C_{b'e} \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^2 + C_1 \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2}{L \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2}$$

II.4.4. Bande passante de l'étage formé par  $T_2$

On a une expression identique à la précédente. Ici  $g_{b'e}$  est remplacé par  $1 / R_L$  (charge du 2<sup>e</sup> étage) et  $C_{b'e}$  disparaît.



$$B_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{g_L \left( \frac{n'_2}{n'_0} \right)^2 + g_{ce}}{\frac{g_m}{g_{bb'b}} C_{b'c} + \left( \frac{n'_1}{n'_0} \right)^2 C_2}$$

II.4.5. Gain  $G_2(h_2)$  pour  $\omega \approx \omega_2$

$y_2 = g_2 (1 + j 2 Q_2 h_2)$  pour la même raison que plus haut. C'est le contenu de  $g_2$  qui est modifié.

$$G'_2(h_2) = - \frac{g_m}{\left( g_{ce} + g_L \left( \frac{n'_2}{n'_0} \right)^2 \right) (1 + j 2 Q_2 h_2)}$$

II.4.6. Expression de  $Q_2$  :

Mis sur la forme  $Q_2 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$

$$Q_2 = \frac{1}{g_{ce} + g_2 \left( \frac{n'_2}{n'_0} \right)^2} \sqrt{\frac{C_{b'c} \frac{g_m}{g_{bb'b}} + C_2 \left( \frac{n'_1}{n'_0} \right)^2}{L \left( \frac{n'_0}{n'_1} \right)^2}}$$

II.4.7. Adaptation

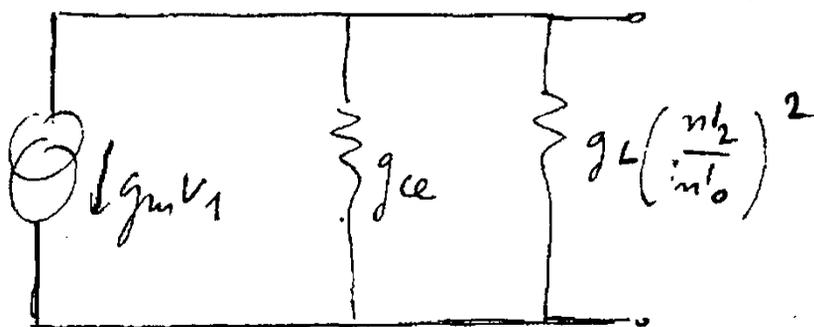
Commençons par le 2<sup>e</sup> étage

A la résonance l'admittance = somme des admittances de type  $j C_i \omega$  et  $\frac{1}{j L \omega}$  est nulle (les termes parasites du transistor participent à la résonance).

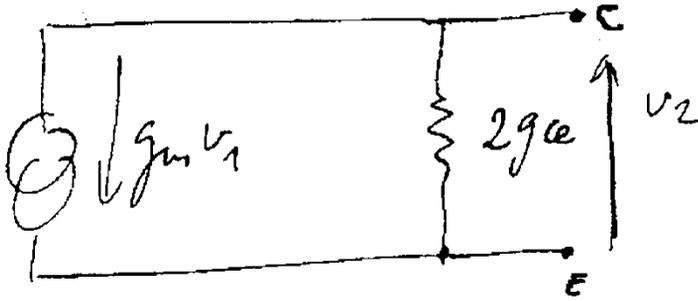
Il ne reste que des termes résistifs :  $g_{ce}$  et  $g_L$  ramenés.

Il y a transfert optimum de puissance si

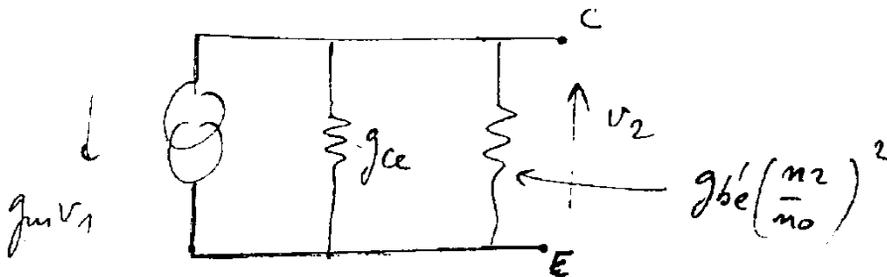
$$g_{ce} = g_L \left( \frac{n'_2}{n'_0} \right)^2$$



Ainsi à la résonance  $T_2$  est chargé par  $2g_{ce}$



Cas du 1er étage :



à la résonance les termes réactifs sont «éliminés» du schéma aux variations. Il ne reste que  $g_{ce}$  et  $g_{b'e}$  ramenée comme charge du collecteur.

$$\text{Adaptation si } g_{ce} = g_{b'e} \left( \frac{n_2}{n_0} \right)^2$$

#### II.4.8. $Q_1 = Q_2 = Q$

Premier étage : L'expression de  $Q_1$  se simplifie car, s'il y a adaptation l'admittance active de charge est  $2g_{ce}$  cherchons  $Q_1$  sous la forme  $\frac{R}{L\omega}$ .

$$R = \frac{1}{2g_{ce}}, \quad L \equiv L \left( \frac{n_0}{n_1} \right)^2, \quad \omega = \omega_1$$

$$Q_1 = \frac{1}{2g_{ce}} \cdot \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{L\omega_1}$$

Deuxième étage : même expression à cause de l'adaptation.

$$Q_2 = \frac{1}{2g_{ce}} \cdot \left( \frac{n'_1}{n'_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{L\omega_2} \quad \text{même } L$$

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{\omega_1} = \left( \frac{n'_1}{n'_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{\omega_2}$$

Sachant que  $n_1 = n'_1$

$$\rightarrow n_0^2 \omega_1 = n'_0{}^2 \omega_2$$

II.4.9. Gain de l'étage complet

$G = G_1 G_2$  (on a calculé  $G_1$  et  $G_2$  des Transistors chargés)

$$G = \frac{g_m^2 \frac{n_2}{n_0} \cdot \frac{n'_2}{n'_0}}{4 g_{ce}^2 (1 + j 2Q h_1) (1 + j 2Q h_2)} = \frac{A}{(1 + j 2Q h_1) (1 + j 2Q h_2)}$$

\* Relation valable dans la mesure où  $h_1$  et  $h_2$  demeurent petits devant l'unité c à d  $\omega$  proche de  $\omega_1$  ou  $\omega_2$  ce qui suppose également que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ne soient pas trop éloignés l'une de l'autre.

II.4.10.1.  $h_1 = \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}$   $h_2 = \frac{\omega - \omega_2}{\omega_2}$ ;  $G = \frac{A}{D}$  avec  $D \rightarrow$

$$D = \left( 1 + j 2Q \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} \right) \left( 1 + j 2Q \frac{\omega - \omega_2}{\omega_2} \right)$$

$$D = 1 + j 2Q \left( \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1} + \frac{\omega - \omega_2}{\omega_2} \right) - 4Q^2 \frac{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{\omega_1 \omega_2}$$

$$D = 1 - 4Q^2 \frac{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{\omega_1 \omega_2} + j 2Q \frac{(\omega_1 + \omega_2)\omega - 2\omega_1 \omega_2}{\omega_1 \omega_2}$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 2 \omega_0$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_0^2 (1 - \alpha) (1 + \alpha) = \omega_0^2 (1 - \lambda^2) \quad \lambda^2 \ll 1$$

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \neq \omega_0^2$$

$$\omega - \omega_1 = \omega - \omega_0 + \lambda \omega_0$$

$$\omega - \omega_2 = \omega - \omega_0 - \lambda \omega_0$$

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) = (\omega - \omega_0 + \lambda \omega_0)(\omega - \omega_0 - \lambda \omega_0)$$

$$= \omega^2 - 2 \omega_0 \omega + \omega_0^2 - \lambda^2 \omega_0^2$$

ne pas négliger ce terme car c'est le seul à contenir l'information relative à l'écart de  $\omega_1$  ou  $\omega_2$  par rapport à  $\omega_0$

$$D'ou \quad D = 1 - \frac{4Q^2}{\omega_0^2} \left[ \omega^2 - 2 \omega_0 \omega + \omega_0^2 (1 - \lambda^2) \right] + j 4Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

II.4.10.2. si  $\omega = \omega_0$  le terme complexe disparaît donc  $|D(\omega_0, \lambda)| = D(\omega_0, \lambda)$ . Dans ce cas G est réel et est maximum pour  $\omega = \omega_0$ .

$$D(\omega_0, \lambda) = 1 + 4Q^2 \lambda^2 = 2 \quad \text{pour} \quad \lambda = \frac{1}{2Q}$$

## II.4.10.3. Bande passante à -3 dB

Dans ce cas  $D \rightarrow D\sqrt{2}$

$G(\omega_0)$  est maximum. On cherche  $\omega$  telle

$$\text{que } G(\omega) = \frac{G(\omega_0)}{\sqrt{2}}$$

en d'autres termes  $|D(\omega, \lambda)| = 2\sqrt{2}$  ou  $|D(\omega, \lambda)|^2 = 8$

$$D(\omega, \lambda) = 1 - \frac{4Q^2}{\omega_0^2} \left( \omega^2 - 2\omega_0\omega + \omega_0^2 - \omega_0^2\lambda^2 \right) + j4Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

$$\text{Posons } \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = X$$

$$D(\omega, \lambda) = 1 - 4Q^2 \left( \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 - \lambda^2 \right) + j4QX$$

$$D(X, \lambda) = 1 - 4Q^2(X^2 - \lambda^2) + j4QX$$

Relation repère.

$$|D(X, \lambda)|^2 = \left( 1 - 4Q^2(X^2 - \lambda^2) \right)^2 + 16Q^2X^2$$

Après quelques manipulations simples et en se rappelant que  $\lambda = \frac{1}{2Q}$  on trouve :

$$4Q^4X^4 = 1$$

$$X^2 = +\frac{1}{2Q^2} \quad \text{et} \quad X = \pm \frac{\sqrt{2}}{2Q} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

+ seulement car X réel

$$\omega' = \omega_0 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2Q} \right); \quad \omega'' = \omega_0 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2Q} \right)$$

$$\Delta\omega = \omega'' - \omega' = \sqrt{2} \omega_0 Q \quad \text{ou} \quad \Delta f = \sqrt{2} \frac{f_0}{Q}$$

Le décalage des fréquences propres a multiplié par  $\sqrt{2}$  la B.P. de l'ampli.

## II.4.11. Applications numériques.

$$Q = \sqrt{2} \frac{f_0}{B} \quad Q = \sqrt{2} \times \frac{10,7}{0,107} = 100\sqrt{2}$$

$$Q = 141,4$$

Par décision (4.8.) on a  $Q_1 = Q_2 = Q_0$  donc  $Q_1 = Q_2 = 141,4$

$$\omega_1 = \omega_0 (1 - \lambda) = \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2Q} \right) = \omega_0 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{400} \right)$$

$$\omega_2 = \omega_0 (1 + \lambda) = \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2Q} \right) = \omega_0 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{400} \right)$$

$$\omega_1 = 66,99 \cdot 10^6 \text{ Rad. s}^{-1} \quad \rightarrow \quad f_1 = 10,663 \text{ MHz}$$

$$\omega_2 = 67,47 \cdot 10^6 \text{ Rad. s}^{-1} \quad \rightarrow \quad f_2 = 10,7378 \text{ MHz}$$

II.4.11.2. D'après 4.8. on a  $Q_1 = \frac{1}{2 g_{ce}} \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{L \omega_1}$

$$\text{donc} \quad \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 = 2 g_{ce} L \omega_1 Q_1 = \frac{2}{5 \cdot 10^4} \times 5 \cdot 10^{-6} \times 66,99 \cdot 10^6 \times 100\sqrt{2} = 1,8947$$

$$\boxed{\frac{n_1}{n_0} = 1,376}$$

Pour le calcul de l'autre rapport on peut exploiter la relation  $\left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 : \frac{1}{\omega_1} = \left( \frac{n'_1}{n'_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{\omega_2}$ .

Sachant que  $\omega_1 \neq \omega_2$  on s'attend à un rapport voisin du précédent. Calcul rigoureux

$$\boxed{\rightarrow \frac{n'_1}{n'_0} = 1,3814}$$

II.4.11.3.  $n_2/n_0$  et  $n'_2/n'_0$

Ces rapports interviennent dans l'écriture de la condition d'adaptation optimale (4.7.)

$$g_{ce} = g_{b'e} \left( \frac{n_2}{n_0} \right)^2$$

$$\left( \frac{n_2}{n_0} \right)^2 = \frac{g_{ce}}{g_{b'e}} = \frac{15.000}{50.000} = \frac{15}{500} = \frac{5 \times 3}{5 \times 100} = 3 \cdot 10^{-2}$$

$$\boxed{\left( \frac{n_2}{n_0} \right) = 0,1732}$$

$$\left( \frac{n'_2}{n'_0} \right) \text{ fait intervenir } g_L = \frac{1}{R_L}$$

$$\frac{g_{ce}}{g_L} \left( \frac{n'_2}{n'_0} \right)^2 \rightarrow \frac{n'_2}{n'_0} = \frac{50}{50.000} = 10^{-3}$$

$$\boxed{\left( \frac{n'_2}{n'_0} \right) = 0,0316}$$

II.4.11.4. Calcul de  $C_1$ 

Le schéma aux variations établi au 4.1. montre que c'est l'inductance  $L \left( \frac{n_0}{n_1} \right)^2$  qui donne

$$\text{la fréquence } f_1 \text{ avec la capacité } \frac{g_m}{g_{bb'}} C_{b'c} + C_1 \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 + C_{b'e} \left( \frac{n_2}{n_0} \right)^2 = C$$

$$\text{Dans ces conditions on a } L \left( \frac{n_0}{n_1} \right)^2 C \omega_1^2 = 1$$

$$\text{d'où } C = \frac{\left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2}{L \cdot \omega_1^2} = \frac{1,8947}{5 \cdot 10^{-6} \times 66,99^2 \cdot 10^{12}} = 85 \text{ pF}$$

Calcul des termes intervenant dans C.

$$\frac{g_m}{g_{bb'}} C_{b'c} = 35 \cdot 10^{-3} \times 100 \times 2 \cdot 10^{-12} = 7 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$

$$\left( \frac{n_2}{n_0} \right)^2 C_{b'e} = 3 \cdot 10^{-2} \times 22 \cdot 10^{-2} = 0,66 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$

$$\text{d'où } C_1 \left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2 + 7,66 \cdot 10^{-12} = 85 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$

$$C_1 = 77,34 \cdot 10^{-12} \times \frac{1}{\left( \frac{n_1}{n_0} \right)^2} = \frac{77,34 \cdot 10^{-12}}{1,8947} = 40,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$

$$C_1 = 40,8 \text{ pF}$$

II.4.11.5. Calcul de  $\gamma_1$  et de  $\gamma_2$ 

On a vu au 3.2. que la condition de neutrodynage était  $y_n = -j C_{b'c} \omega$ . Il faut donc placer entre collecteur et base un condensateur de capacité  $-C_{b'c}$  ce qui n'est pas réalisable ou bien mettre  $\gamma_1$  de telle sorte qu'une de ses bornes soit sur la base et l'autre borne à un potentiel en opposition de phase avec le potentiel de base. C'est ce qui est réalisé en mettant  $\gamma_1$  entre la base de T1 et la sortie du transformateur (à condition que celle-ci soit bien en opp. de phase) cf étude préalable du neutrodynage au 3.1.1..

La tension  $v_{ce}$  est la tension qui apparait aux bornes des  $n_0$  spires. La tension de sortie du transformateur est (au signe près)  $\frac{n_2}{n_0} v_{ce}$ , elle est donc  $\frac{n_2}{n_0}$  fois trop grande donc il faut

diviser  $C_{b'c}$  par  $\frac{n_2}{n_0}$  ou bien prendre :

$$C_{b'c} \times \frac{n_0}{n_2} = \gamma_1$$

$$\gamma_1 = 2 \times \frac{1}{0,1732} = 11,5 \text{ pF}$$

et pour la même raison

$$\gamma_2 = 2 \times \frac{1}{0,0316} = 63,3 \text{ pF}$$

$$\gamma_2 = C_{b'c} \times \frac{n'_0}{n'_2}$$

II.4.11.6. Gain à la fréquence  $f_0$

La formule établie au 4.9. donne l'expression de G.

Calculons  $h_1$  et  $h_2$  pour  $\omega = \omega_0$

$$h_1 = \frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_1} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

rappel  $\lambda = \frac{1}{2Q} = \frac{\sqrt{2}}{400} \sim 3.10^{-3}$

$$h_2 = \frac{\omega_0 - \omega_2}{\omega_2} = -\frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

$$h_1 \# \lambda (1 + \lambda) \rightarrow 2j Q h_1 = 2j Q \lambda (1 + \lambda) = j (1 + \lambda)$$

$$h_2 \# \lambda (1 - \lambda) \rightarrow 2j Q h_2 = -2j Q \lambda (1 - \lambda) = -j (1 - \lambda)$$

$$(1 + j 2 Q h_1) (1 + j 2 Q h_2) \# (1 + j (1 + \lambda)) (1 - j (1 - \lambda))$$

Compte tenu de la petitesse de  $\lambda$  on va négliger  $\lambda^2$  pour le calcul de ce terme qui devient  $2 [(1 - \lambda) + j \lambda]$  et dont le module  $\# 2$

$$\text{D'où : } |G(\omega_0)| = \frac{g_m^2 \frac{n_2}{n_0} \frac{n'_2}{n'_0}}{4 g_{cc}^2 \times 2}$$

$$|G(\omega_0)| = \frac{35^2 \cdot 10^{-6} \times 5^2 \times 10^8 \times 0,1732 \times 0,0316}{4 \times 2} = 2095$$

$$G(\omega_0) = 2095$$

II.4.12. Matériau de base : Ferrites

Caractérisé par une induction à saturation plus faible que l'acier au Silicium utilisé pour les transformateurs 50 Hz.

$B_M$  de l'ordre de 0,3 à 0,4 T.

II.4.13. Revoir II.4.4. La prise intermédiaire a pour effet de ramener une résistance élevée qui amortit peu le circuit résonant.

II.4.14. – En diminuant la sélectivité on augmente la bande passante, au départ de l'amplification.

– On peut citer les amplificateurs distribués.

**C.A.P.E.S.****(Concours Externe)**Composition d'Électronique, d'Électrotechnique  
avec applications - Session : 1990

par MOREAU

**1. Étude du circuit de charge de l'onduleur**

1.1.  $U = 220 \text{ V} \quad ; \quad I = 2,25 \text{ A} \quad ; \quad P = RI^2, \quad \text{d'où } R = 68,1 \Omega.$

$$Z = \frac{U}{I} = 97,8 \Omega \quad ; \quad L\omega = \sqrt{Z^2 - R^2}, \quad \text{d'où } L\omega = 70,2 \Omega.$$

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}, \quad \text{donc } L = 223 \text{ mH}.$$

1.2.

1.2.1.  $u = Ri + L \frac{di}{dt} \quad ; \quad \text{de } 0 \text{ à } \frac{T}{2}, \quad \text{on a } U_0 = Ri + L \frac{di}{dt}.$

1.2.2.  $i\left(\frac{T}{2}\right) = -i(0).$

1.2.3. Pour  $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$   $i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}$

avec  $i(\infty) = \frac{U_0}{R}$  et  $\tau = \frac{L}{R} = 3,28 \text{ ms}.$

Soit  $i(t) = \frac{U_0}{R} + \left[ i(0) - \frac{U_0}{R} \right] e^{-\frac{t}{\tau}}.$

En écrivant que  $i\left(\frac{T}{2}\right) = -i(0)$ , on trouve :

$$i(0) = \frac{U_0}{R} \frac{e^{-\frac{T}{2\tau}} - 1}{e^{-\frac{T}{2\tau}} + 1} = -2,94 \text{ A}.$$

$$i\left(\frac{T}{2}\right) = 2,94 \text{ A}.$$

1.3.

1.3.1. Pour  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ ,  $i(t) = \frac{U_0}{R} + \left[ I_n - \frac{U_0}{R} \right] e^{-\frac{t}{\tau}}.$

1.3.2. Pour  $t_{n+1} < t \leq t_{n+2}$ , avec  $t' = t - t_{n+1}$ ,  $i(t') = -\frac{U_0}{R} + \left[ I_{n+1} + \frac{U_0}{R} \right] e^{-\frac{t'}{\tau}}.$

Application numérique :  $I_n = 0$  ;  $I_{n+1} = i(t_{n+1}) = 2,28 \text{ A}$  ;  $I_{n+2} = -0,24 \text{ A}$ .

## 2. Transformateur monophasé en régime non sinusoïdal

2.1.

2.1.1.  $n_p i_{p0}(t) = H(t) L$ , donc :  $H = \frac{n_p i_{p0}}{L}$ .

2.1.2.  $\Phi = BS = S B \left( \frac{n_p i_{p0}}{L} \right) = 3,0 \cdot 10^{-3} B(160 i_{p0}) = \Phi(i_{p0})$ .

2.1.3.

a. Pour  $0 \leq t \leq \frac{T}{4}$ ,  $e(t) = E$ , donc  $E = n_p \frac{d\Phi}{dt}$ .

(Cette écriture suppose que  $\Phi$  est choisi positif quand un courant primaire d'intensité  $i_p$  positive magnétise seul le circuit magnétique).

On a  $\Phi = \frac{E}{n_p} t$ , donc  $\Phi_M = 3,0 \text{ m Wb}$ , correspondant à  $B_M = 1,0 \text{ T}$ .

b. Voir le document réponse.

c. Puisque  $B_M$  est inférieur à  $1,6 \text{ T}$  (seuil de saturation),  $\Phi$  et  $i_{p0}$  sont proportionnels,  $i_{p0M} = 1,56 \text{ A} = i_{p0} \left( \frac{T}{4} \right)$

Les conventions étant fixées par les figures 2.1.3. et 2.2. du texte, on a  $u_s = n_s \frac{d\Phi}{dt}$ ,  $\Phi$  ayant été défini précédemment.

Par conséquent :  $u_s = \frac{n_s}{n_p} u_p = \frac{n_s}{n_p} e(t)$ .

En particulier quand  $e = 48 \text{ V}$ ,  $u_s = 220 \text{ V}$ .

2.1.4.

a. On a toujours  $e(t) = n_p \frac{d\Phi}{dt}$ , et, en particulier, de  $0$  à  $\frac{T}{4}$ ,  $E = n_p \frac{d\Phi}{dt} = n_p \frac{\Phi_M}{T/4}$ . Donc  $E = 86,4 \text{ V}$ .

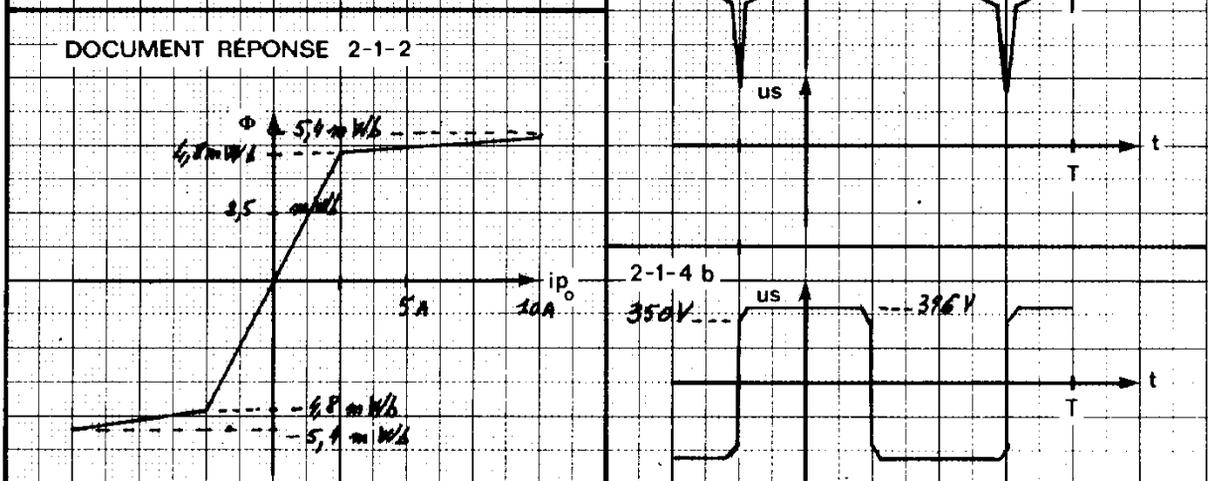
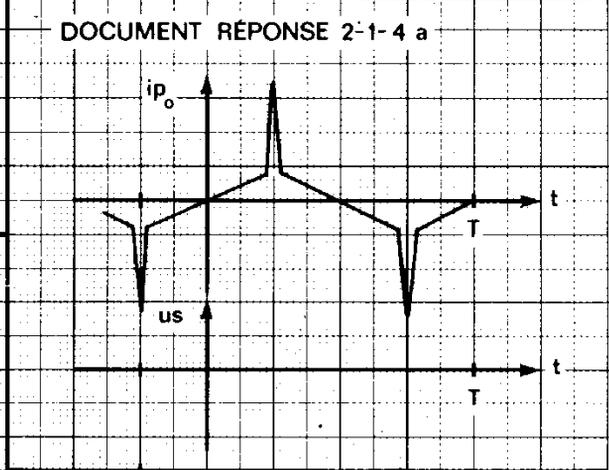
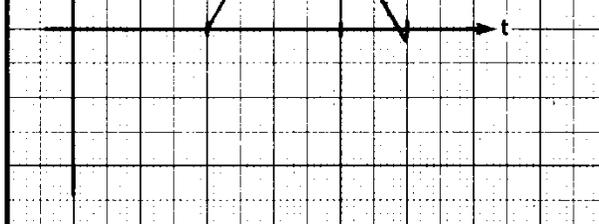
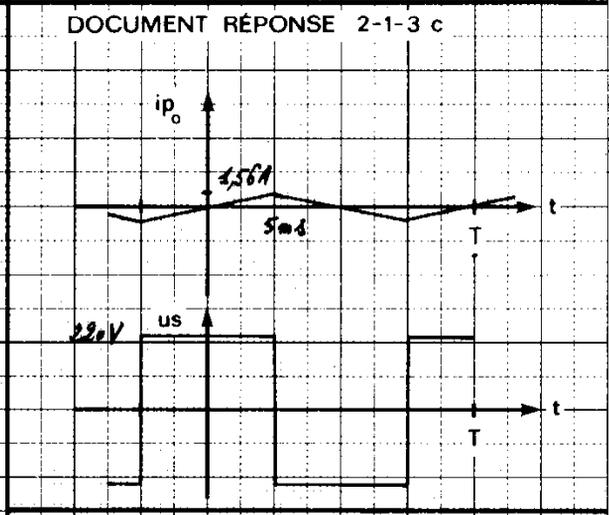
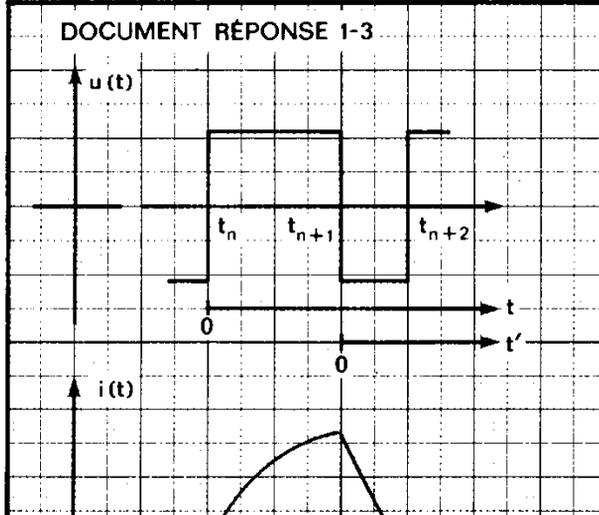
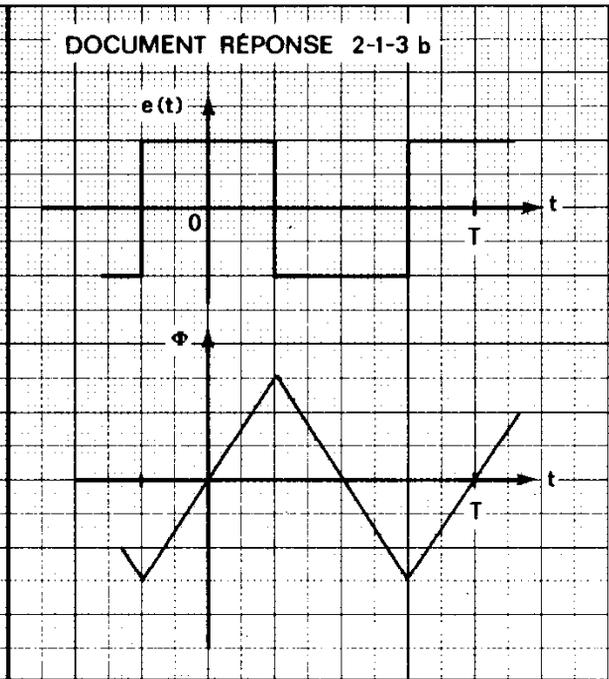
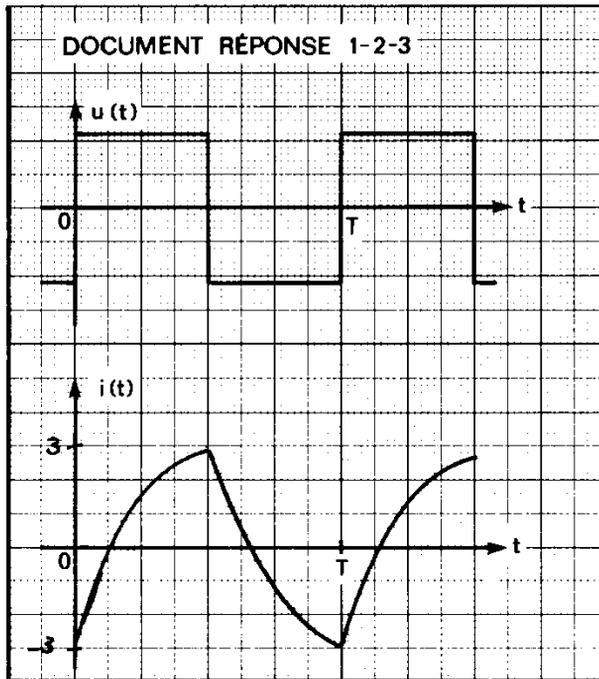
La valeur  $\Phi = 4,8 \text{ m Wb}$ , correspondant à  $i_{p0} = 2,5 \text{ A}$ , est atteinte au bout de  $4,44 \text{ ms}$  ; ensuite, et jusqu'à  $\frac{T}{4} = 5,0 \text{ ms}$ ,  $i_{p0}$  croît de  $2,5$  à  $10 \text{ A}$ .

On a toujours  $u_s = \frac{n_s}{n_p} e(t)$  : quand  $e = 86,4 \text{ V}$ ,  $u_s = 396 \text{ V}$ .

b. Tant que  $B$  reste inférieur à  $1,6 \text{ T}$ ,  $i_p$  reste inférieure à  $2,5 \text{ A}$ , et donc  $r_p i_p$  inférieure à  $2,5 \text{ V}$  ce qui est négligeable devant  $E = 86,4 \text{ V}$  :  $u_s$  est proche de  $396 \text{ V}$ .

En revanche, pendant la saturation,  $i_p$  croît jusqu'à  $10 \text{ A}$ , la f.é.m. primaire  $n_p \frac{d\Phi}{dt} = E - r_p i_p$ , ne

vaut plus, pour  $t = \frac{T}{4}$ , que  $76,4 \text{ V}$ , et donc  $u_s = \frac{n_s}{n_p} (E - r_p i_p)$  ne vaut plus que  $350 \text{ V}$  pour  $\frac{T}{4}$ .



2.2.

$$2.2.1. \quad n_p i_p + n_s i_s = \mathfrak{R} \Phi, \text{ avec } \mathfrak{R} = \frac{L}{\mu S} = \frac{400}{1,6} \times \frac{0,5}{30 \cdot 10^{-4}} \text{ soit } \mathfrak{R} = 4,17 \cdot 10^4 \text{ u.S.I.}$$

$$2.2.2. \quad i_p = \frac{\mathfrak{R} \Phi}{n_p} - \frac{n_s}{n_p} i_s.$$

On a toujours  $u_p = n_p \frac{d\Phi}{dt}$  et  $u_s = n_s \frac{d\Phi}{dt} = \frac{n_s}{n_p} u_p$ , et par ailleurs  $u_s = -R i_s$ .

Le flux  $\Phi$  varie de la même manière que précédemment et le terme  $\frac{\mathfrak{R}\Phi}{n_p}$  n'est autre que le courant magnétisant à vide d'intensité  $i_{p0}(t)$ .

$$\text{On a donc } i_p(t) = i_{p0}(t) + \left(\frac{n_s}{n_p}\right)^2 \frac{u_p}{R}.$$

Pour  $u_p = E = 48 \text{ V}$ , le terme  $\left(\frac{n_s}{n_p}\right)^2 \frac{u_p}{R}$  vaut  $14,8 \text{ A}$ .

$$i_p\left(-\frac{T}{4}\right) = (14,8 - 1,6) \text{ A} = 13,2 \text{ A} \quad ; \quad i_p\left(\frac{T}{4}\right) = 16,4 \text{ A}.$$

2.3. La variation de flux est toujours imposée par  $u_p(t) = e(t)$  ; on a donc toujours, en posant  $m = \frac{n_s}{n_p}$  :

$$i_p = i_{p0} - m i_s.$$

La forme de  $-i_s$  est connue, elle a été établie à la question 1.2.4. puisque  $u_s = m u_p$  a la forme dessinée sur la figure 1.2. avec  $U_0 = 220 \text{ V}$ .

$-m i_s$  varie de  $-13,5 \text{ A}$  à  $+13,5 \text{ A}$  ;  $i_{p0}$  de  $-1,6$  à  $+1,6 \text{ A}$ , donc  $i_p(-T/4) = -15,1 \text{ A}$ ,  $i_p(T/4) = 15,1 \text{ A}$ .

### 3. Commande des transistors de puissance bipolaires

3.1. Le transistor peut être bloqué par  $I_B = 0$  ( $v_{BE} \leq 0$ ), ce qui entraîne  $i_C = 0$ , ou saturé pour  $I_B \geq i_{B \text{ sat}}$ , ce qui entraîne  $v_{CE} = v_{CE \text{ sat}} \approx 0,4 \text{ V}$ .

3.2.  $v_{Das} + v_{CE} = v_D + v_{BE}$  ; si les diodes D et Das conduisent,  $v_{CE} = v_D + v_{BE} - v_{Das} = 0,8 \text{ V}$ . Cette valeur est supérieure au seuil  $v_{CE \text{ sat}} = 0,5 \text{ V}$  : le transistor est donc dans sa zone de fonctionnement linéaire.

$$i_B = \frac{i_C}{\beta} \quad ; \quad i_C = i_{Das} + I_0 \quad ; \quad i_D = \frac{v_{BE}}{R_{BE}} + i_B = \frac{0,8}{R_{BE}} + i_B \quad ; \quad I_{B0} = i_{Das} + i_D = i_{Das} + \frac{0,8}{R_{BE}} + \frac{i_{Das} + I_0}{\beta}.$$

$$\text{On en déduit la valeur de } i_{Das} = \frac{I_{B0} - \frac{0,8}{R_{BE}} - \frac{I_0}{\beta}}{1 + \frac{1}{\beta}}, \text{ et celle de } i_B = \frac{i_{Das} + I_0}{\beta} = \frac{I_{B0} - \frac{0,8}{R_{BE}} + I_0}{\beta + 1}.$$

3.3.1. Pour  $T_2$ , le même calcul que celui effectué ci-dessus, mais avec  $v_{BE} = 0,7 \text{ V}$ , montre que  $v_{CE_{T_2}} = 0,7 \text{ V} > v_{CE_{sat}}$

Pour  $T_{pk}$ , on peut écrire :  $v_{CE_{T_2}} + v_{BE_{T_{pk}}} = v_{CE_{T_{pk}}} = 1,5 \text{ V} > v_{CE_{sat}}$ .

3.3.2. Négligeons  $i_{BT_1}$  devant  $I_2 = 6,5 \text{ mA} \approx I_1$ .

$v_{BT_1} = 0,4 \text{ V} + R_1 I_1 = 3,46 \text{ V}$  ;  $v_{ET_1} \approx 4,2 \text{ V}$ , d'où  $I_3 = 0,12 \text{ A}$ .

(On vérifie que  $i_{BT_1} = 0,6 \text{ mA}$  est négligeable devant  $I_2$  dix fois plus importante ; sans approximation, on trouve  $i_{BT_1} = 0,57 \text{ mA}$  et  $I_3 = 115 \text{ mA}$ .

$v_{CT_1} = v_D + v_{BE_{T_2}} + V_{BE_{T_{pk}}} = 2,2 \text{ V}$  ;  $v_{CE_{T_1}} = -2,0 \text{ V}$ .

3.3.3. Notons  $I_{B0}$  l'intensité du courant collecteur délivré par  $T_1$  ( $I_{B0} \approx I_3$ ).

$I_{B0} = 115 \text{ mA}$  ;  $I_5 = \frac{V_{BE_{T_{pk}}}}{R_5} = 80 \text{ mA}$  ;  $I_{B_{T_p}} \approx \frac{I}{\beta_{T_p}} = 2,2 \text{ A}$  (valeur un peu trop forte) ;

$I_{B2} \approx \frac{2,2 \text{ A}}{\beta_{T2}} = 88 \text{ mA}$  ;  $I_{R_4} = 10 \text{ mA}$ . D'où  $I_D \approx 0,10 \text{ A}$ .

$I_{Das} = I_{B_0} - I_D \approx 15 \text{ mA}$ .

3.4.

3.4.1. Voir document réponse.

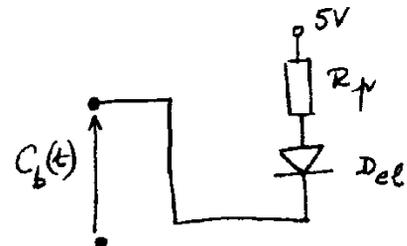
3.4.2. Voir document réponse.

#### 4. Pilotage des interrupteurs et étude de forme des signaux

4.1. Le plus simple consiste simplement à placer la diode  $D_{el}$ , en série avec une résistance  $R_p$ , entre la tension d'alimentation (5 V) et la sortie de la porte T.T.L. selon le schéma ci-dessous :

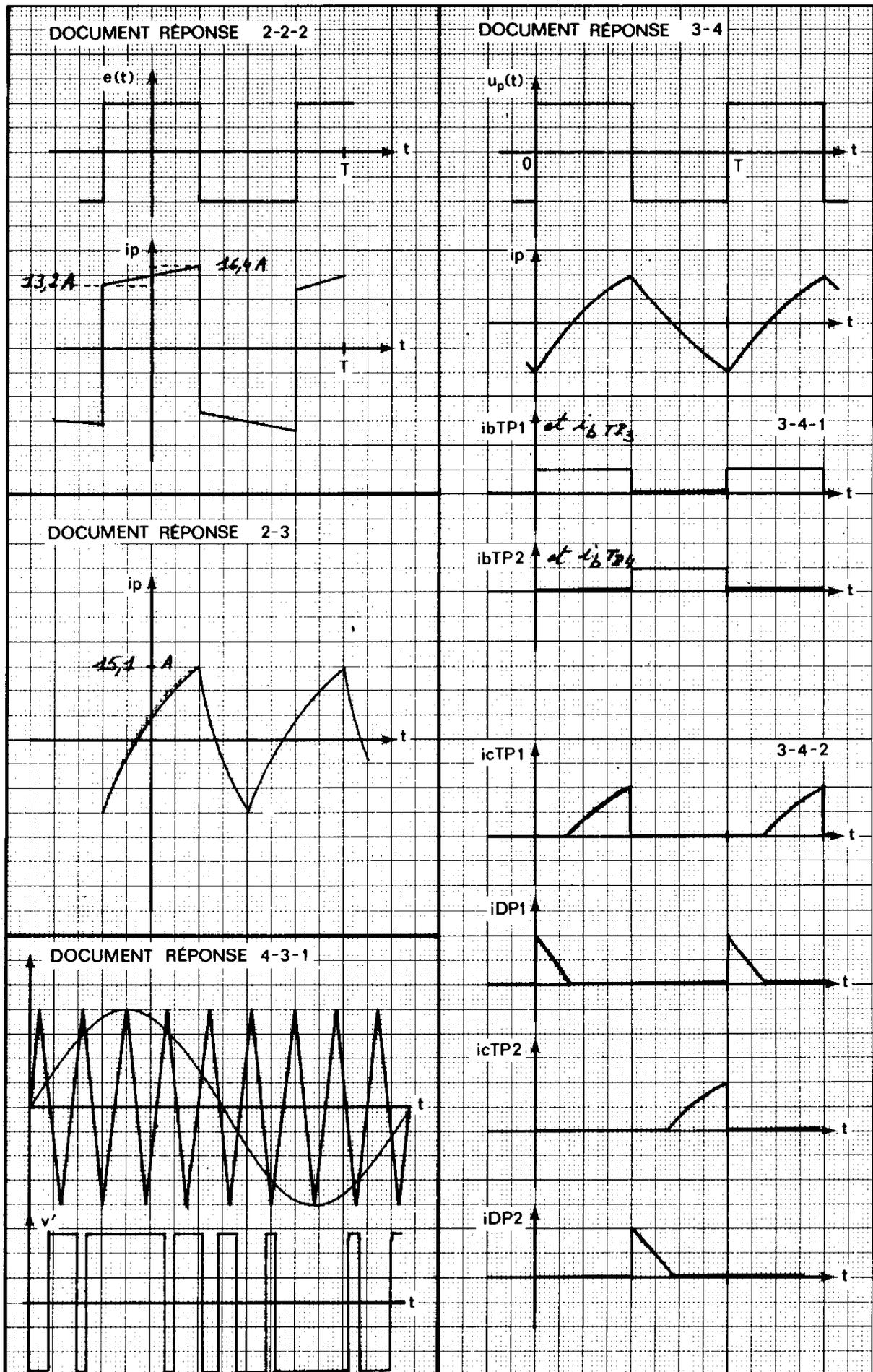
La porte, étant de technologie TTL, peut en effet recevoir un courant de 6 mA tout en demeurant à l'état bas. Pour

cela on doit avoir  $R_p = \left( \frac{5 - 1,2}{6 \cdot 10^{-3}} \right) \Omega = 630 \Omega$ .



4.2.

4.2.1.  $U_s = U_0$ .



4.2.2.

a.  $u(t)$  est une fonction alternée  $\left[ u\left(t + \frac{T}{2}\right) = -u(t) \right]$ , de ce fait, elle ne contient pas d'harmoniques pairs qui ne satisfont pas cette condition.

$$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = 2,03 \text{ A.}$$

$$b. I_3 = \frac{U_3}{\sqrt{R^2 + (3L\omega)^2}} = \frac{198/3}{\sqrt{68^2 + 210^2}} = 0,30 \text{ A.}$$

$$c. I^2 = I_1^2 + I_3^2 + \dots + I_k^2.$$

$$R_i = 0,17.$$

4.3.

4.3.1. Si  $v_s$  est supérieure à  $v_T$ , alors  $v' = V_{CC}$  : voir le document réponse.

La valeur efficace de  $u(t)$  est  $U_0$ .

4.3.2.  $R'_i = 0,12$  : ce résidu d'harmoniques est inférieur à celui qui correspond à la commande en créneaux symétriques de fréquence 50 Hz, il est donc meilleur.

4.4.

4.4.1. Les 2048 mots de la mémoire doivent être lus 50 fois chacun par seconde :

$$f_H = 50 \times 2048 = 102,40 \text{ kHz.}$$

4.4.2. A l'adresse 515 doit se trouver le mot binaire permettant d'avoir  $u_s(t) = U_0 = 220 \text{ V}$ , soit  $u_p(t) = E$ , car cette adresse correspond sensiblement à  $t = \frac{T}{4} + kT$  : pour ces instants, nous avons vu, sur le document 4.3.1. que  $v'(t) = +V_{CC}$ . Les transistors  $T_{p_1}$  et  $T_{p_3}$  doivent donc conduire. Le mot correspondant est donc 0101.

4.4.3. En base 2, le mot binaire correspondant à  $(515)_{10}$  s'écrit, compte tenu de ce que  $515 = 512 + 3 = 2^9 + 2 + 1$  : 010.0000.0011.

$$\text{Soit } A_0 = 1 \ ; \ A_1 = 1 \ ; \ A_2, A_3, \dots, A_8 = 0 \ ; \ A_9 = 1 \ ; \ A_{10} = 0.$$

# Agrégation

## COMPOSITION AVEC EXERCICES D'APPLICATION

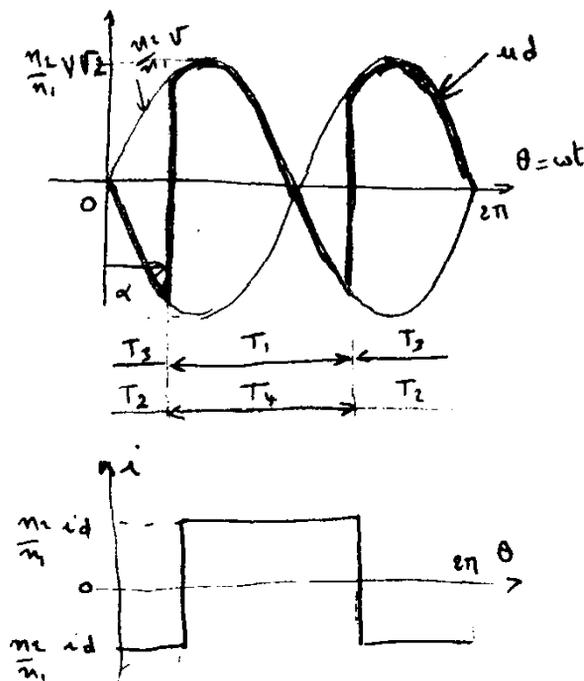
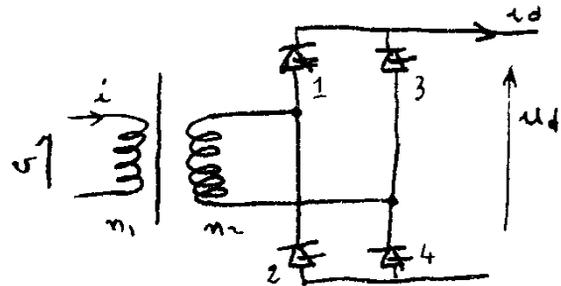
Option : Physique Appliquée - Session : 1990

par ROMBAUT

### SECOND PROBLÈME

#### 1. Pont complet à thyristors

- 1.1. Le courant  $i_d$  étant constant, il provient soit de  $T_1$  ou de  $T_3$  et retourne soit par  $T_2$  ou  $T_4$ . Chaque thyristor conduit donc pendant une demi-période, d'où le diagramme de conduction des thyristors, ainsi que les formes d'onde de  $u_d$  et de  $i$ .



$$\text{Pour } \theta = \omega t \in \left( \frac{\alpha}{3}, \frac{\pi}{3} + \alpha \right) T_1 \text{ et } T_4 \text{ conduisent } u_d = v \frac{n_2}{n_1} \quad i = \frac{n_2}{n_1} i_d.$$

$$\text{Pour } \theta = \omega t \in \left( \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} + \alpha \right) T_2 \text{ et } T_3 \text{ conduisent } u_d = -v \frac{n_2}{n_1} \quad i = -\frac{n_2}{n_1} i_d.$$

$$1.2. \quad U_d = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} v \frac{n_2}{n_1} d\theta = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{1}{\pi} V\sqrt{2} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin \theta d\theta = \frac{n_2}{n_1} \frac{V\sqrt{2}}{\pi} (\cos \alpha - \cos(\pi + \alpha))$$

$$U_d = \frac{2}{\pi} V\sqrt{2} \frac{n_2}{n_1} \cos \alpha \quad \text{avec} \quad U_{d_0} = \frac{2}{\pi} V\sqrt{2} \frac{n_2}{n_1}$$

$$U_d = U_{d_0} \cos \alpha$$

- 1.3. Le développement en série de Fourier ne comprend que des harmoniques impairs. En prenant comme origine des temps, l'instant  $t_1 = \frac{\pi}{3\omega}$  le fondamental est un sinus

$$I_1 \sqrt{2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_d \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi} I_d \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d$$

$$I = \frac{n_2}{n_1} I_d \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,90 \quad \Rightarrow \quad \text{Le taux d'harmoniques est constant.}$$

- 1.4.  $\varphi = \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{U_d}{U_{d_0}}$  quand on fait croître  $\alpha$  pour diminuer la tension redressée  $U_d$ ,

le  $\cos \varphi$  diminue. La consommation d'énergie réactive est liée à la réduction de tension opérée.

Le facteur de puissance  $F = \frac{P}{S}$

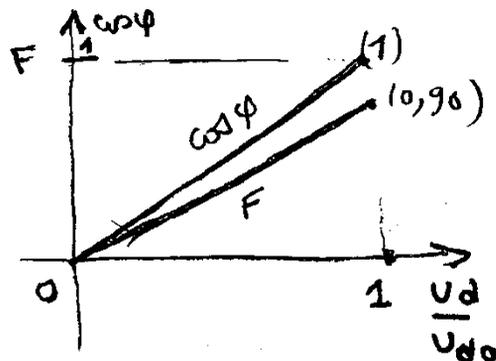
$$F = \frac{V I_1 \cos \varphi}{V I} = \frac{I_1}{V} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha$$

ou encore

$$F = \frac{U_d I_d}{V I} = \frac{U_{d_0} \cos \alpha I_d}{V \frac{n_2}{n_1} I_d} = \frac{\frac{2V\sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1} \cos \alpha}{V \frac{n_2}{n_1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha$$

$$\frac{U_d}{U_{d_0}} = \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{U_d}{U_{d_0}}$$

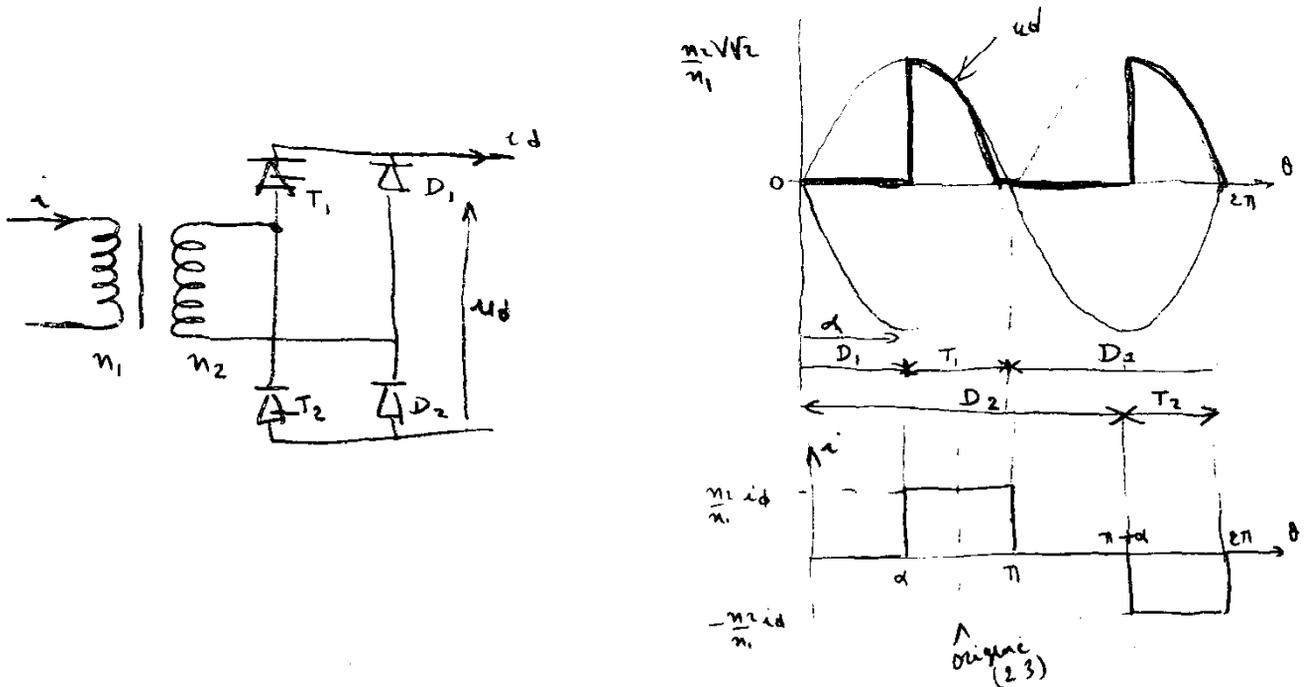
$$\cos \varphi = \frac{U_d}{U_{d_0}}$$



1.5.  $P = V I_1 \cos \varphi = U_{d_0} I_d \cos \alpha$   $\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{P^2}{(U_{d_0} I_d)^2}$   
 $Q = V I_1 \sin \varphi = U_{d_0} I_d \sin \alpha$   $\sin^2 \alpha = \frac{Q^2}{(U_{d_0} I_d)^2}$

$P^2 + Q^2 = (U_{d_0} I_d)^2$  quand  $\alpha$  croît de 0 à  $\pi/2$ , P diminue et Q augmente de telle manière que S reste constant.

2. Pont mixte asymétrique



2.1. Le courant étant constant, au cours d'une période  $T_1$  ou  $D_1$  conduisent ainsi que  $T_2$  ou  $D_2$ .

Pour  $\theta \in (0, \alpha)$ ,  $D_1$  et  $D_2$  conduisent  $u_d = 0$  phase de roue libre  $i = 0$ .

Pour  $\theta \in (\alpha, \pi)$ ,  $T_1$  et  $D_2$  conduisent  $u_d = v \frac{n_2}{n_1}$  phase d'alimentation  $i = \frac{n_2}{n_1} i_d$ .

Pour  $\theta \in (\pi, \alpha + \pi)$ ,  $D_1$  et  $D_2$  conduisent  $u_d = 0$   $i = 0$ .

Pour  $\theta \in (\pi + \alpha, 2\pi)$ ,  $T_2$  et  $D_1$  conduisent  $u_d = -v \frac{n_2}{n_1}$   $i = -\frac{n_2}{n_1} i_d$ .

2.2. 
$$U_d = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} V \sqrt{2} \frac{n_2}{n_1} \sin \theta d\theta = \frac{V \sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1} (1 + \cos \alpha) = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} V \frac{n_2}{n_1} \frac{(1 + \cos \alpha)}{2}$$

$$U_d = U_{d_0} \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \text{avec} \quad U_{d_0} = \frac{2 V \sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1}$$

- 2.3. En prenant l'origine des temps au milieu de l'alternance positive du courant, le fondamental est un cos dont l'amplitude est donnée par :

$$I_1 \sqrt{2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{4}{\pi} \int_0^{(\pi-\alpha)/2} I_d \cos \theta \, d\theta = \frac{4}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \sin \frac{(\pi-\alpha)}{2} = \frac{4}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$I_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$I^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi-\alpha} \left( \frac{n_2}{n_1} I_d \right)^2 d\theta = \left( \frac{n_2}{n_1} I_d \right)^2 \frac{\pi-\alpha}{\pi} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{n_2}{n_1} I_d \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}}$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}}} \quad \frac{U_d}{U_{d_0}} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

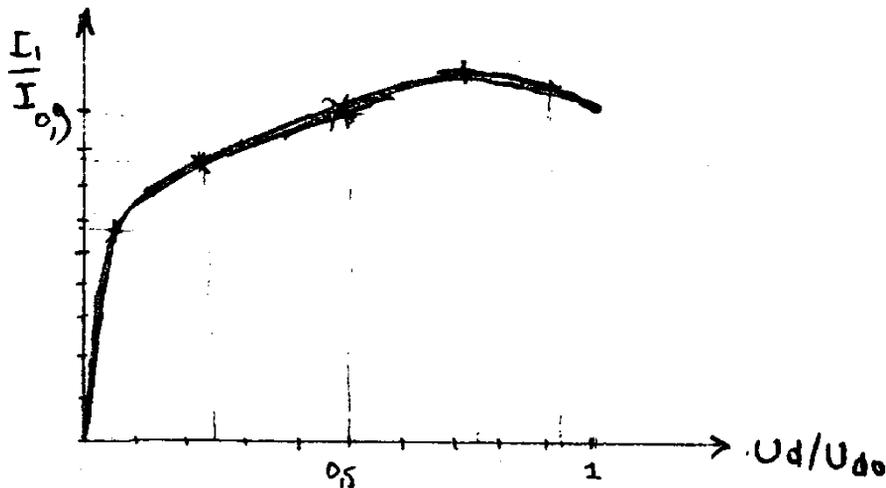
L'expression analytique de  $\frac{I_1}{I} \left( \frac{U_d}{U_{d_0}} \right)$  est lourde

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{U_d}{U_{d_0}}}$$

$$\alpha = 2 \text{ Arc cos } \sqrt{\frac{U_d}{U_{d_0}}}$$

On peut tracer la courbe points par points.

$\alpha$	0	30	60	90	120	150	180
$\frac{U_d}{U_{d_0}}$	1	0,933	0,75	0,5	0,25	0,067	0
$\frac{I_1}{I}$	0,90	0,953	0,955	0,90	0,78	0,57	0



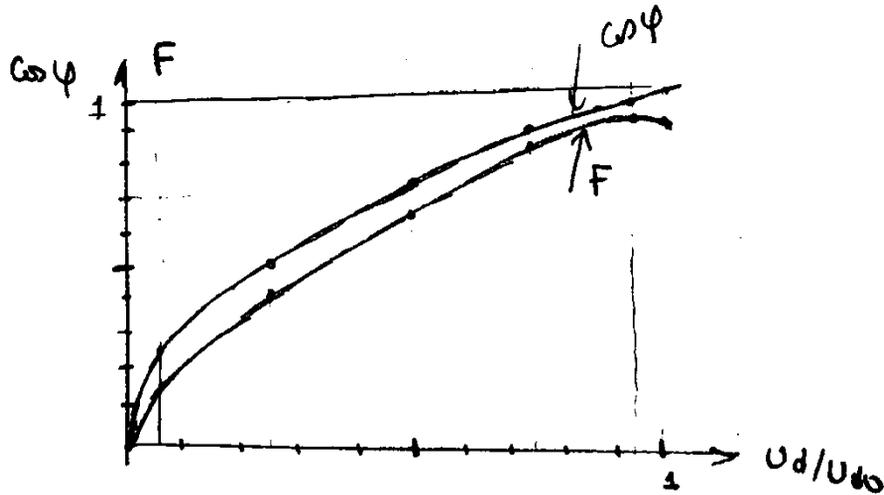
$\frac{I_1}{I}$  est supérieur à 0,90 tant que l'on ne réduit pas la tension de plus de 50%. Après, il se dégrade.

2.4.  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$  or  $\frac{U_d}{U_{d_0}} = \frac{1 + \cos\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \varphi$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{U_d}{U_{d_0}}}$$

$$F = \frac{V I_1 \cos \varphi}{V I} = \frac{I_1}{I} \cos \varphi = \frac{I_1}{I} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}}}$$

$\alpha =$	0	30	60	90	120	150	180
$\frac{U_d}{U_{d_0}}$	1	0,933	0,75	0,5	0,25	0,067	0
$\cos \varphi$	1	0,966	0,866	0,707	0,5	0,259	0
F	0,90	0,92	0,826	0,637	0,39	0,148	0



Performances nettement supérieures à celles du pont complet.

2.5.  $P = V I_1 \cos \varphi = V I_1 \cos \frac{\alpha}{2} = U_{d_0} I_d \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{U_{d_0} I_d}{2} (1 + \cos \alpha)$

$$Q = V I_1 \sin \varphi = V I_1 \sin \frac{\alpha}{2} = U_{d_0} I_d \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{U_{d_0} I_d}{2} \sin \alpha$$

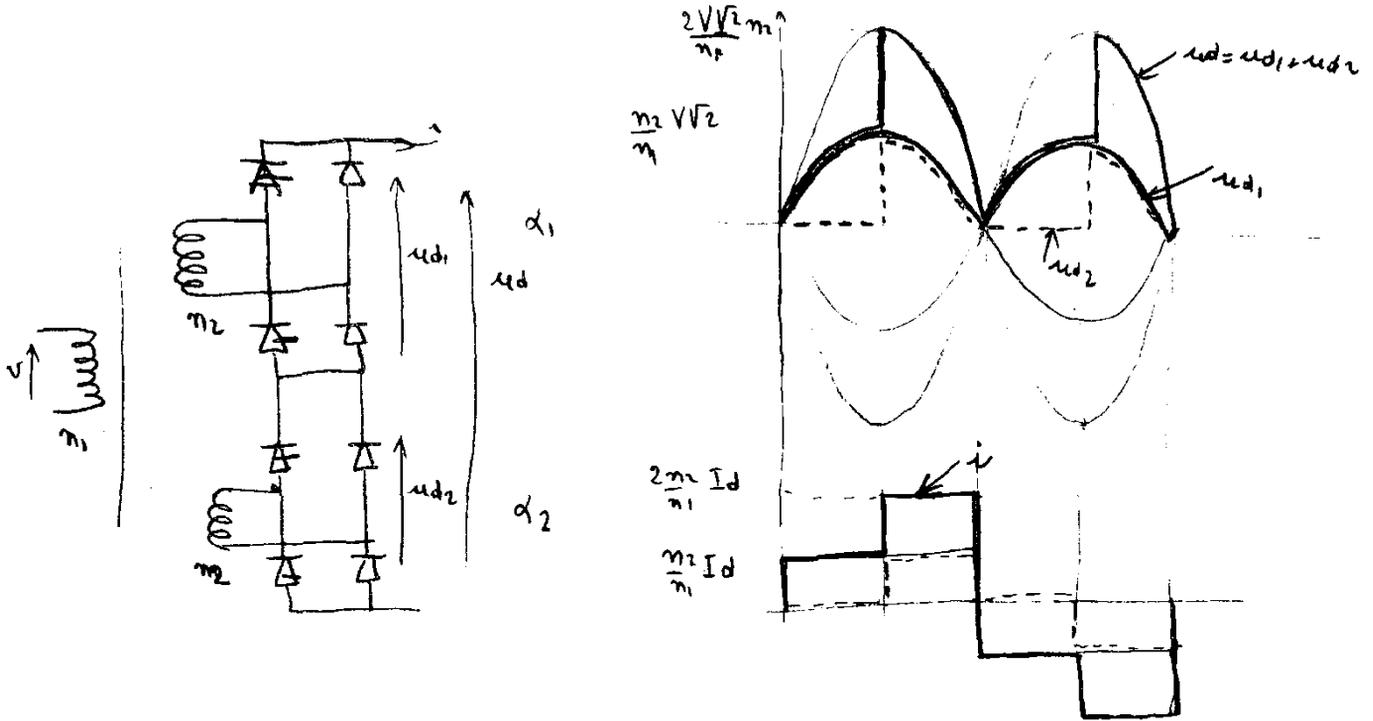
$$P - \frac{U_{d_0} I_d}{2} = \frac{U_{d_0} I_d}{2} \cos \alpha$$

$$Q = \frac{U_{d_0} I_d}{2} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \left( P - \frac{U_{d_0} I_d}{2} \right)^2 + Q^2 = \left( \frac{U_{d_0} I_d}{2} \right)^2$$

La consommation maximum d'énergie réactive du pont mixte est la moitié de la consommation maximum du pont complet.

3. Association en série de deux ponts asymétriques



3.1.

3.2. Pour  $U_d \in (0, U_{d_0}/2)$   $\alpha_2 = \pi$  donc  $U_{d_2} = 0$   $U_{d_1} = U_d$

$$U_d = U_{d_1} = \frac{U_{d_0}}{2} \left( \frac{1 + \cos \alpha_1}{2} \right)$$

Pour  $U_d \in \left( \frac{U_{d_0}}{2}, U_d \right)$   $\alpha_1 = \pi$  donc  $U_{d_1} = \frac{U_{d_0}}{2}$  et  $U_{d_2} = \frac{U_{d_0}}{2} \left( \frac{1 + \cos \alpha_2}{2} \right)$

$$U_d = \frac{U_{d_0}}{2} \left( 1 + \frac{1 + \cos \alpha_2}{2} \right) = \frac{U_{d_0}}{2} \left( \frac{3 + \cos \alpha_2}{2} \right)$$

3.3. Pour  $U_d \in (0, U_{d_0}/2)$   $\alpha_2 = \pi$ , le pont 2 est bloqué  $I = \frac{n_2}{n_1} I_d \sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\pi}}$

$$\text{Pour } U_d \in \left( \frac{U_{d_0}}{2}, U_d \right), \quad I^2 = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\alpha_2} \left( \frac{n_2}{n_1} I_d \right)^2 d\theta + \int_0^{\pi} \left( \frac{2n_2}{n_1} I_d \right)^2 d\theta \right]$$

$$I^2 = \frac{\left( \frac{n_2}{n_1} I_d \right)^2 \alpha_2 + \left( \frac{n_2}{n_1} I_d \right)^2 4(\pi - \alpha_2)}{\pi} = \frac{\left( \frac{n_2}{n_1} I_d \right)^2 (\alpha_2 + 4\pi - 4\alpha_2)}{\pi}$$

$$I = \frac{n_2}{n_1} I_d \sqrt{4 - \frac{3\alpha_2}{\pi}}$$

3.4. Pour  $U_d \in (0, U_{d0}/2)$  le pont 2 est bloqué  $\alpha_2 = \pi$ .

Comme en 2.5., mais avec  $U_d \max = U_{d0}/2$ , on a :

$$P = \frac{U_{d0} I_d}{4} (1 + \cos \alpha_1) ; \quad Q_1 = \frac{U_{d0} I_d}{4} \sin \alpha_1$$

⇓

$$\left( P - \frac{U_{d0} I_d}{4} \right)^2 + Q_1^2 = \left( \frac{U_{d0} I_d}{4} \right)^2 \Rightarrow \text{cercle}$$

Pour  $U_d \in (U_{d0}/2, U_{d0})$ , le pont 1 fonctionne à pleine onde  $\alpha_1 = 0$

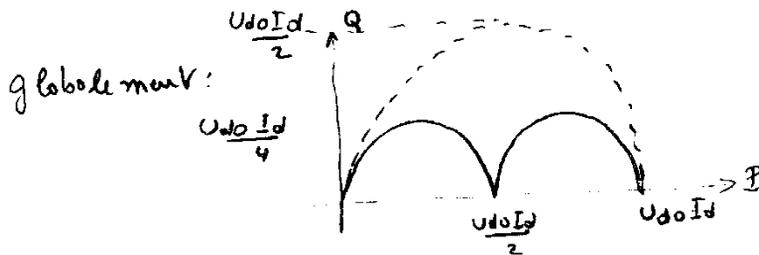
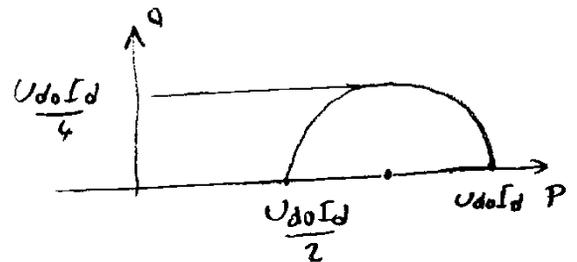
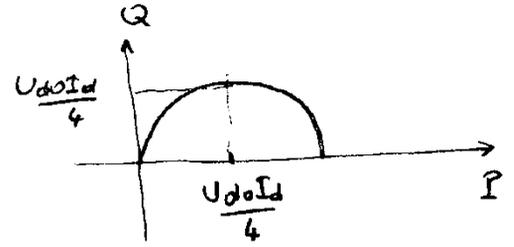
$$P = U_d I_d = \frac{U_{d0} I_d}{4} (3 + \cos \alpha_2)$$

$$Q_1 = \frac{U_{d0} I_d}{4} \sin \alpha_2, \text{ car seul le pont 2 absorbe de l'énergie réactive.}$$

$$P - \frac{3}{4} U_{d0} I_d = \frac{U_{d0} I_d}{4} \cos \alpha_2$$

$$\Rightarrow \left( P - \frac{3}{4} U_{d0} I_d \right)^2 + Q^2 = \left( \frac{U_{d0} I_d}{4} \right)^2 \Rightarrow \text{cercle}$$

$$Q = \frac{U_{d0} I_d}{4} \sin \alpha_2$$



On voit que la puissance réactive maximum totale que l'on puisse consommer est divisée par 2.

Avec un seul pont : voir courbe en pointillé.

$$3.5. \quad S_1 = \sqrt{P^2 + Q_1^2}$$

$$\text{Pour } U_d \in (0, U_{d_0}/2) \quad S_1^2 = \left( \frac{U_{d_0} I_d}{4} \right)^2 \left[ \frac{1 + \cos^2 \alpha_1 + 2 \cos \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1}{2(1 + \cos \alpha_1)} \right]$$

$$S_1 = \frac{U_{d_0} I_d}{4} \sqrt{2(1 + \cos \alpha_1)} = \frac{U_{d_0} I_d}{4} \times 2 \cos \frac{\alpha_1}{2} = \frac{U_{d_0} I_d}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2}.$$

$$\text{Pour } U_d \in \left( \frac{U_{d_0}}{2}, U_{d_0} \right) \quad S_1^2 = \left( \frac{U_{d_0} I_d}{4} \right)^2 \left[ \frac{9 + \cos^2 \alpha_2 + 6 \cos \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2}{10 + 6 \cos \alpha_2} \right]$$

$$S_1 = \frac{U_{d_0} I_d}{4} \sqrt{2(5 + 3 \cos \alpha_2)}.$$

De ces expressions on déduit celles du fondamental  $I_1$  et de  $\cos \varphi$

$$I_1 = \frac{S_1}{V}. \quad \text{Puisque } U_{d_0} = \frac{4\sqrt{2}V}{\pi} \frac{n_2}{n_1} \quad I_1 = \frac{S_1 4\sqrt{2}}{\pi U_{d_0}} \frac{n_2}{n_1} \quad \text{et } \cos \varphi_1 = \frac{P}{S_1}.$$

On obtient alors :

$$\text{Pour } U_d \in (0, U_{d_0}/2)$$

$$I_1 = \frac{n_2}{n_1} \frac{U_{d_0} I_d}{2} \cos \frac{\alpha_1}{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{\pi U_{d_0}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\alpha_1}{2} I_d \frac{n_2}{n_1} = I_1$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\frac{U_{d_0} I_d}{4} (1 + \cos \alpha_1)}{\frac{U_{d_0} I_d}{4} \sqrt{2(1 + \cos \alpha_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos \alpha_1} = \cos \frac{\alpha_1}{2} = \cos \varphi$$

(ce qui était évident, mais vérifie les calculs !).

$$\text{Pour } U_d \in (U_{d_0}/2, U_{d_0})$$

$$I_1 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi U_{d_0}} \left( \frac{U_{d_0} I_d}{4} \right) \sqrt{2(5 + 3 \cos \alpha_2)} \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\sqrt{2}}{\pi} I_d \sqrt{2(5 + 3 \cos \alpha_2)} = \frac{2}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \sqrt{5 + 3 \cos \alpha_2} = I_1$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\frac{U_{d_0} I_d}{4} (3 + \cos \alpha_2)}{\frac{U_{d_0} I_d}{4} \sqrt{2(5 + 3 \cos \alpha_2)}} \quad \cos \varphi_1 = \frac{3 + \cos \alpha_2}{\sqrt{2(5 + 3 \cos \alpha_2)}}.$$

$$3.6. \quad \text{Pour } U_d \in (0, U_{d_0}/2)$$

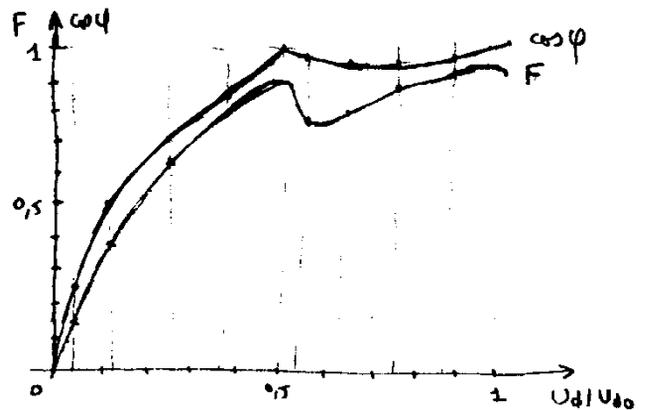
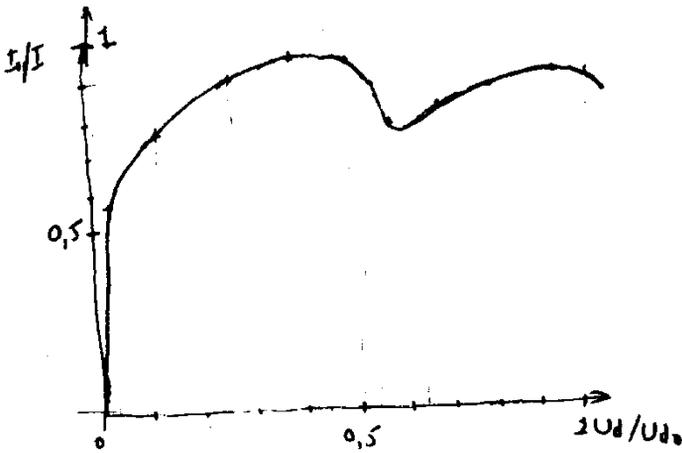
$$\frac{I_1}{I} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\alpha_1}{2} I_d \frac{n_2}{n_1}}{\frac{n_2}{n_1} I_d \sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\pi}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \frac{\alpha_1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_1}{\pi}}} \quad \text{et} \quad \frac{U_d}{U_{d_0}} = \frac{1 + \cos \alpha_1}{4} = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha_1}{2}$$

Pour  $U_d \in (U_{d_0}/2, U_{d_0})$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{\frac{2}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \sqrt{5 + 3 \cos \alpha_2}}{\frac{n_2}{n_1} I_d \sqrt{4 - \frac{3 + \alpha_2}{\pi}}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{5 + 3 \cos \alpha_2}{4 - \frac{3 + \alpha_2}{\pi}}} \quad \text{et} \quad \frac{U_d}{U_{d_0}} = \frac{3 + \cos \alpha_2}{4}$$

On peut donc tracer la courbe donnant  $\frac{I_1}{I}$ .

$\alpha_1$	180	150	120	90	60	30	0					0	0
$\alpha_2$			180				180	150	120	90	60	30	0
$\frac{U_d}{U_{d_0}}$	1	0,033	0,125	0,25	0,375	0,466	0,5	0,533	0,625	0,75	0,875	0,966	1
$\frac{I_1}{I}$	0	0,57	0,78	0,90	0,954	0,953	0,90	0,806	0,842	0,90	0,937	0,938	0,90
$\cos \varphi$	0	0,259	0,5	0,707	0,866	0,966	1	0,974	0,945	0,949	0,97	0,992	1
F	0	0,148	0,39	0,636	0,826	0,92	0,90	0,785	0,796	0,854	0,909	0,93	0,90



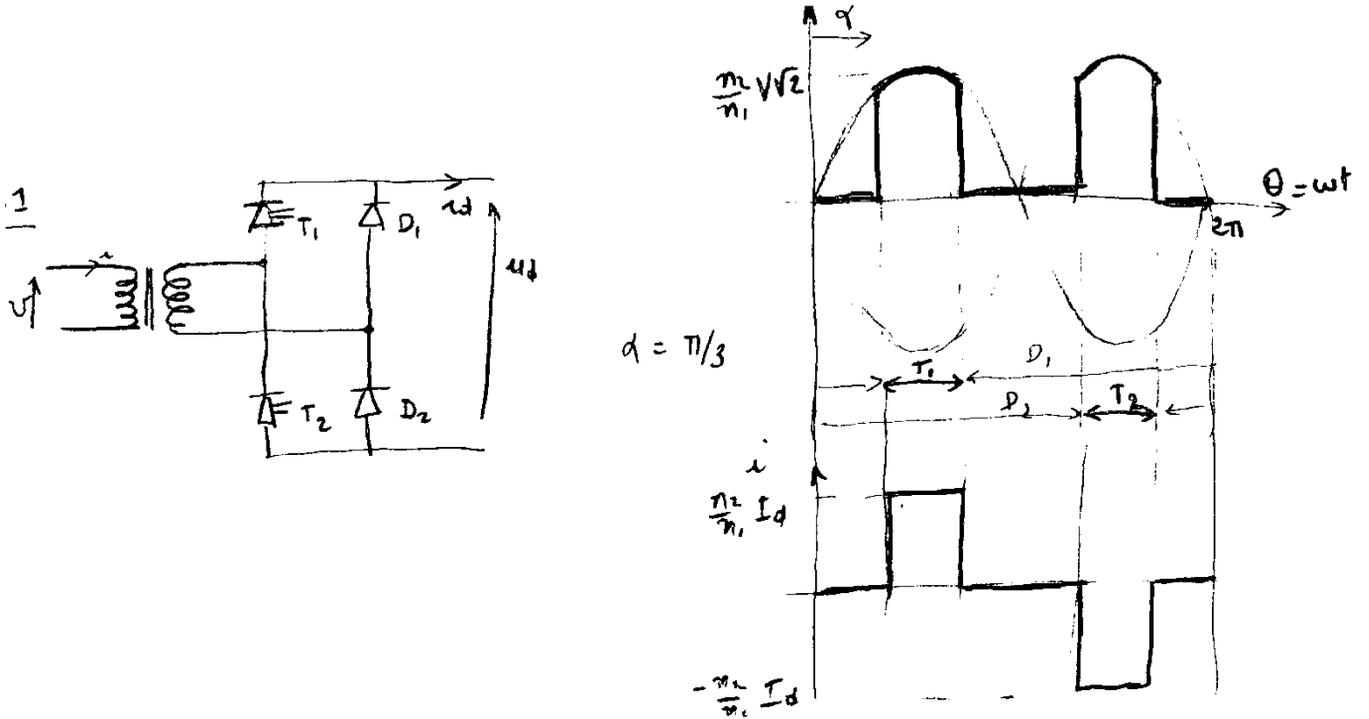
3.7. Les résultats numériques sont donnés ci-dessus.

On a les expressions  $\cos \varphi$ .

$$F = \frac{P}{S} = \frac{V I_1 \cos \varphi}{V I} = \frac{I_1}{I} \cos \varphi$$

On voit très nettement l'amélioration importante, du  $\cos \varphi$  et de F par l'utilisation de 2 ponts utilisant ce type de commande.

4. Pont mixte à «recentrage de phase»



4.1.  $T_1$  ou  $D_1$  conduit.  
 $T_2$  ou  $D_2$  conduit, d'où les formes d'onde.

→ Quand  $T_1$  et  $D_2$  conduisent :  $u_d = v \frac{n_2}{n_1}$ ,  $i = \frac{n_2}{n_1} I_d$

Quand  $T_2$  et  $D_1$  conduisent :  $u_d = -v \frac{n_2}{n_1}$   $i = -\frac{n_2}{n_1} I_d$ .

Quand les diodes conduisent simultanément : roue libre  $u_d = 0$   $i = 0$ .

4.2.  $U_d = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{n_2}{n_1} V \sqrt{2} \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{n_2}{n_1} V \sqrt{2} \cos \alpha$  avec  $U_{d_0} = \frac{2 V \sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1}$

$U_d = U_{d_0} \cos \alpha$ .

4.3. En prenant comme origine  $\theta = \pi/2$ , la valeur crête du fondamental  $I_1 \sqrt{2}$  est donnée par :

$I_1 \sqrt{2} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2 - \alpha} \frac{n_2}{n_1} I_d \cos \theta d\theta = \frac{4}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \cos \alpha$

$I_1 = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \cos \alpha$

$I^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2 - \alpha} \left( I_d \frac{n_2}{n_1} \right)^2 d\theta \Rightarrow I = I_d \frac{n_2}{n_1} \sqrt{1 - \frac{2 \alpha}{\pi}}$

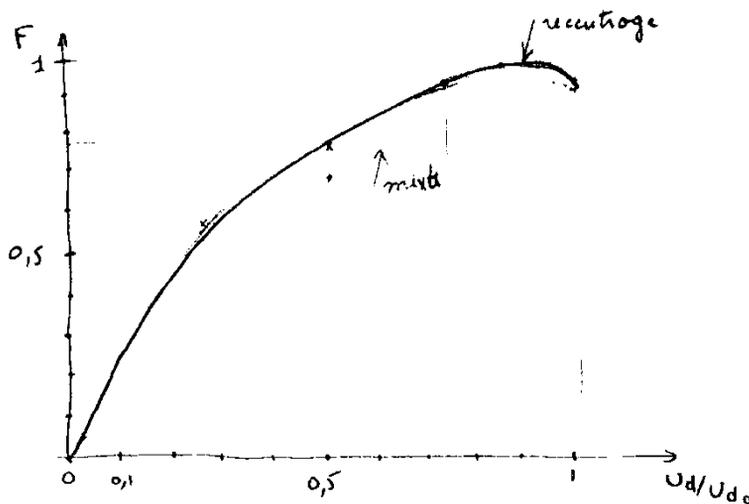
$$\text{d'où : } \frac{I_1}{I} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}}$$

$\cos \varphi = 1$  Le fondamental du courant est en phase avec la tension.

$$4.4. \quad F = \frac{V I_1 \cos \varphi}{V I} = \frac{I_1}{I} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}} = F \quad \text{puisque } \cos \varphi = 1$$

$$\frac{U_d}{U_{d_0}} = \cos \alpha \quad \text{d'où les variations de } F.$$

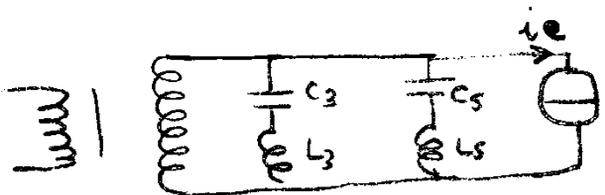
$\alpha$	0	15	30	45	60	75	90
$\frac{U_d}{U_{d_0}}$	1	0,966	0,866	0,707	0,5	0,259	0
F	0,90	0,953	0,955	0,90	0,78	0,57	0



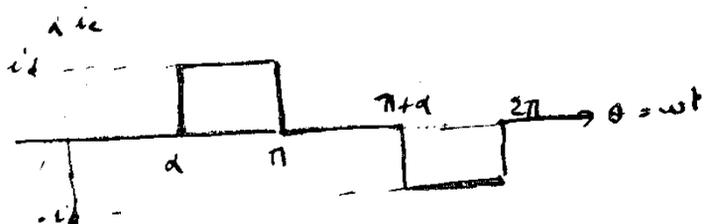
Le pont à recentrage donne un facteur de puissance toujours supérieur à celui du pont mixte à thyristors.

5. Emploi de filtres

5.1. Le courant à l'entrée du redresseur comprend tous les harmoniques impairs. Sa forme d'onde a été donnée au 2.1.



$$\left( \begin{array}{c} \frac{n_2}{n_1} \text{ près} \end{array} \right)$$



On nous propose de supposer que les harmoniques 3 et 5 sont «piégés» par les filtres L-C. En prenant comme origine des temps, le milieu de l'alternance positive, on peut calculer les valeurs efficaces  $I_{3e}$  et  $I_{5e}$  de ces harmoniques.

$$\sqrt{2} I_{3e} = \left| \frac{4}{\pi} \int_0^{(\pi-\alpha)/2} I_d \cos 3\theta \, d\theta \right| = \left| \frac{4}{\pi} \frac{I_d}{3} \sin \frac{(3\pi-3\alpha)}{2} \right| = \frac{4 I_d}{3\pi} \cos \frac{3\alpha}{2}$$

$$\sqrt{2} I_{5e} = \left| \frac{4}{\pi} \int_0^{(\pi-\alpha)/2} I_d \cos 5\theta \, d\theta \right| = \frac{4 I_d}{5\pi} \cos \frac{5\alpha}{2}.$$

Ils ne sont donc pas transmis au primaire, il y a donc suppression des harmoniques 3 et 5 du courant fourni par le primaire. Ces courants avaient comme valeur

$$I_3 = \frac{n_2}{n_1} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{I_d}{3} \cos \frac{3\alpha}{2}$$

$$I_5 = \frac{n_2}{n_1} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{I_d}{5} \cos \frac{5\alpha}{2}.$$

Le courant  $I_1$  est inchangé, il vaut toujours  $\frac{n_2}{n_1} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I_d \cos \frac{\alpha}{2}$ . C'est la valeur efficace du courant qui diminue par disparition des harmoniques 3 et 5. On a maintenant :

$$I^2 = \left( \frac{n_2}{n_1} I_d \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi}} \right)^2 - I_3^2 - I_5^2$$

$$I^2 = \left( \frac{n_2}{n_1} I_d \right)^2 \left[ 1 - \frac{\alpha}{\pi} - \left( \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \times \frac{1}{3} \cos \frac{3\alpha}{2} \right)^2 - \left( \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \times \frac{1}{5} \cos \frac{5\alpha}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \left( \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \right)^2 \left[ \frac{\pi(\pi-\alpha)}{8} - \frac{1}{9} \cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{25} \cos^2 \frac{5\alpha}{2} \right]$$

$$I = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \sqrt{\frac{\pi(\pi-\alpha)}{8} - \frac{1}{9} \cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{25} \cos^2 \frac{5\alpha}{2}}$$

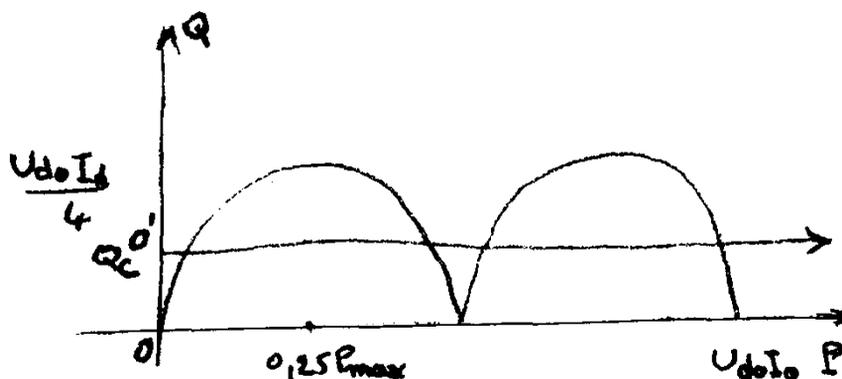
puisque  $I_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{n_2}{n_1} I_d \cos \frac{\alpha}{2}$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{\pi(\pi-\alpha)}{8} - \frac{1}{9} \cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{25} \cos^2 \frac{5\alpha}{2}}}$$

$\alpha$	0	30	60	90	120	150	180
filtres $\frac{I_1}{I}$	0,96	0,98	0,973	0,961	0,928	0,77	0
sans filtres	0,90	0,953	0,955	0,90	0,78	0,57	0

On voit la nette amélioration apportée par la présence du filtre.

5.2. On a établi le diagramma P, Q à la question 3.4.



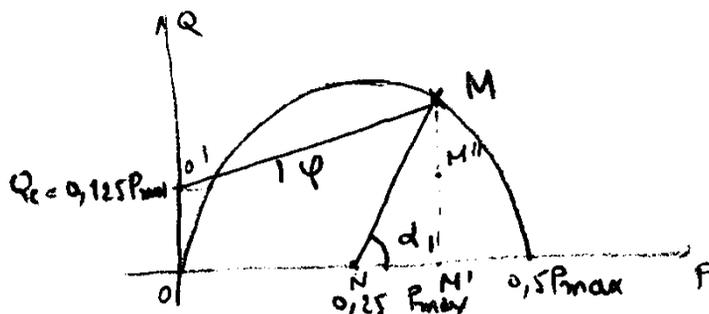
Les filtres créent une puissance réactive  $Q_c = 0,125 P_{max}$  avec  $P_{max} = U_{d_0} I_d$ . Tout se passe donc comme si l'axe des P était centré en  $O'$ . On voit que de temps en temps la puissance réactive change de signe donc que l'on surcompense l'engin de traction.

Pour  $\frac{U_d}{U_{d_0}} \in (0, U_{d_0}/2)$  le point de fonctionnement se déplace sur le premier demi-cercle.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MN''}{O'M''}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{M'N}{MN}$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{MN'}{MN}$$



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MM' - OO'}{O'M''} = \frac{MN \sin \alpha_1 - OO'}{ON + MN \cos \alpha_1} \quad \text{avec } MN = 0,25 P_{max} = ON \quad OO' = 0,125 P_{max}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0,25 P_{max} \sin \alpha_1 - 0,125 P_{max}}{0,25 P_{max} + 0,25 P_{max} \cos \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_1 - \frac{1}{2}}{1 + \cos \alpha_1}$$

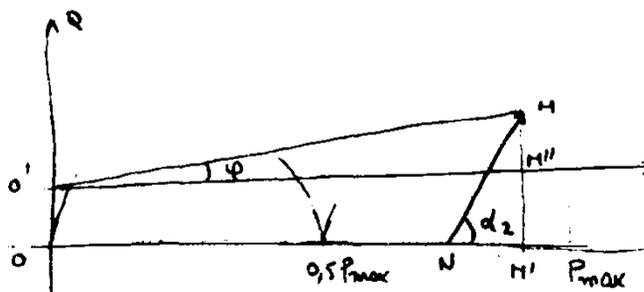
$$\cos \varphi = \cos \operatorname{Arctg} \frac{\sin \alpha_1 - \frac{1}{2}}{1 + \cos \alpha_1}$$

Pour  $\frac{U_d}{U_{d_0}} \in \left( \frac{U_{d_0}}{2}, U_{d_0} \right)$ , le point de fonctionnement se déplace sur le deuxième demi-cercle.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MN''}{O'M''}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{NM'}{MN}$$

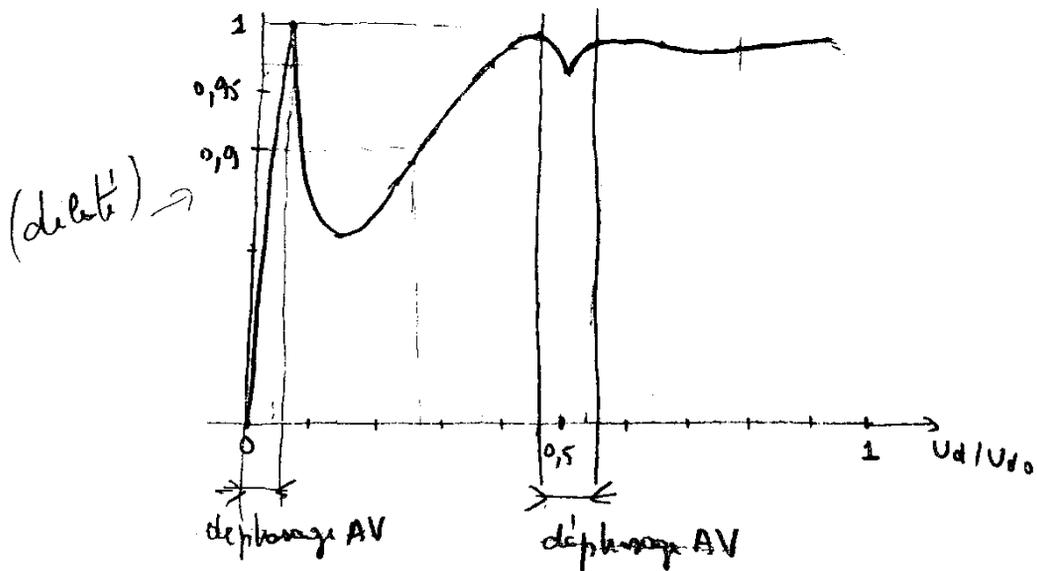
$$\sin \alpha_2 = \frac{MN'}{MN}$$



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MM' - OO'}{O'M''} = \frac{MN \sin \alpha_2 - OO'}{ON + MN \cos \alpha_2} = \frac{0,25 P_{\max} \sin \alpha_2 - 0,125 p_{\max}}{0,75 p_{\max} + 0,25 p_{\max} \cos \alpha_2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha_2 - \frac{1}{2}}{3 + \cos \alpha_2} \Rightarrow \cos \varphi = \cos \operatorname{Arctg} \frac{\sin \alpha_2 - \frac{1}{2}}{3 + \cos \alpha_2}$$

$\alpha_1$	180	165	150	120	90	60	30	15	0	165										
$\alpha_2$			180							180	150	120	90	60	30	15	0			
$\frac{U_d}{U_{d_0}}$	0		0,033	0,125	0,25	0,375	0,466		0,5	0,533	0,625	0,75	0,875	0,966					1	
$\cos \varphi$	0	0,14	1	0,807	0,894	0,971	1		0,97	1	0,989	0,986	0,994	1				0,998	0,992	



Nettement meilleur qu'en 3.7.

5.3.  $F = \frac{I_1}{I} \cos \varphi$ , on connaît  $I_1 / I$  (en 5.1.),  $\cos \varphi$  (en 5.2.)

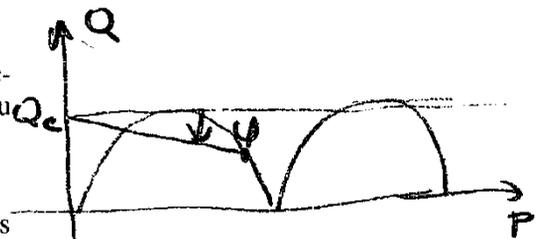
pour 1 seul pont

Comme  $\cos \varphi$  est voisin de l'unité,  $F$  a l'allure de  $I_1 / I$  sauf pour  $U_d / U_{d_0}$  très faible ( $< 0,053$ ) où le facteur de puissance est faible.

L'emploi de filtres bien choisis est très favorable.

Si les filtres engendraient  $0,25 P_{\max}$  la puissance réactive globale serait créée (sauf pour  $\alpha_1 = \pi/2$  ou  $\alpha_2 = \pi/2$  où  $\cos \varphi = 1$ ).

Les filtres créeraient plus de réactif que les redresseurs n'absorbent, on aurait une réduction du facteur de puissance, le courant serait en avance sur la tension.



5.4. Choix des éléments des filtres

Les filtres sont accordés  $L_h C_h \omega^2 h^2 = 1$

$$\Rightarrow L_3 C_3 = \frac{1}{9 \omega^2}$$

$$L_5 C_5 = \frac{1}{25 \omega^2}$$

En désignant par  $V_2$  la tension secondaire du condensateur, la puissance réactive  $Q_h$  créée par le filtre arrêtant l'harmonique  $h$  est :

$$Q_h = \left( \frac{1}{C_h \omega} - L_h \omega \right) \left( \frac{V_2}{\frac{1}{C_h \omega} - L_h \omega} \right)^2 = \frac{C_h \omega V_2^2}{1 - L_h C_h \omega^2}$$

$$\text{soit } Q_h = \frac{C_h \omega V_2^2}{1 - \frac{1}{h^2}} = C_h \omega V_2^2 \times \frac{h^2}{h^2 - 1}$$

$$\text{on a donc } C_h = \frac{Q_h}{\omega V_2^2} \frac{(h^2 - 1)}{h^2} \quad L_h = \frac{1}{C_h h^2 \omega^2} = \frac{V_2^2}{Q_h \omega (h^2 - 1)}$$

les filtres créent  $0,125 P_{\max}$ . Puisqu'il y a deux secondaires chacun d'eux crée  $0,0625 P_{\max}$ .

$$\text{donc } Q_3 = 0,68 \times 0,0625 P_{\max} = 0,0425 P_{\max}$$

$$Q_5 = 0,32 \times 0,0625 P_{\max} = 0,02 P_{\max}$$

$$C_3 = \frac{0,0425 P_{\max}}{\omega V_2^2} \times \frac{8}{9} = \frac{0,0425 \times 22 \times 10^5}{100 \pi \times (950)^2} \times \frac{8}{9} = 293 \mu\text{F}$$

$$C_5 = \frac{0,02 P_{\max}}{\omega V_2^2} \times \frac{24}{25} = \frac{0,02 \times 22 \times 10^5}{100 \pi \times (950)^2} \times \frac{24}{25} = 149 \mu\text{F}$$

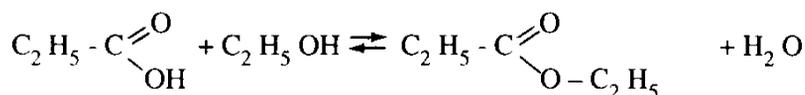
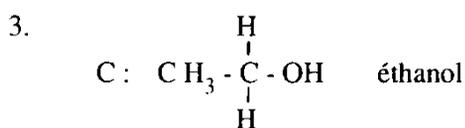
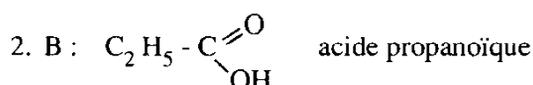
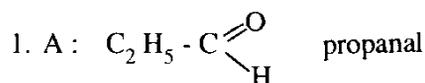
$$L_3 = \frac{10^6}{293 \times 9 \times (100 \pi)^2} = 3,84 \text{ mH}$$

$$L_5 = \frac{10^6}{149 \times 25 \times (100 \pi)^2} = 2,72 \text{ mH}.$$

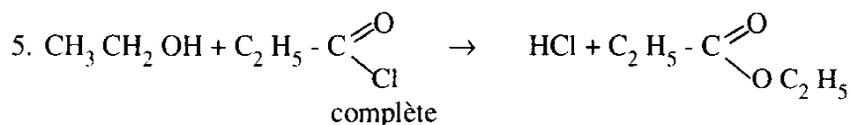
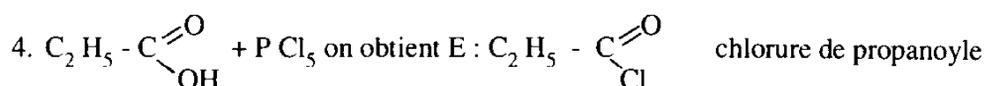
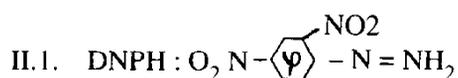
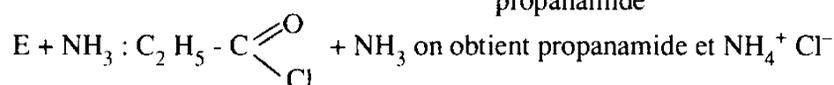
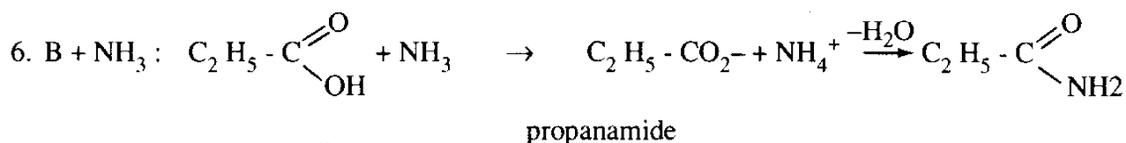
**C.A.P.E.S.****(Concours Interne)****COMPOSITION A PARTIR D'UN DOSSIER**

Épreuve commune aux options - Session : 1990

par VOGEL

**PARTIE A****I. Corrigé d'exercice**

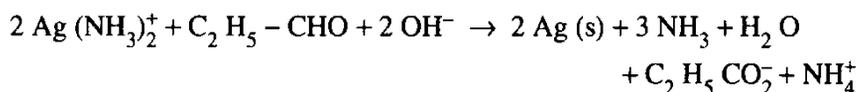
D : propanoate d'éthyle

**exothermique**

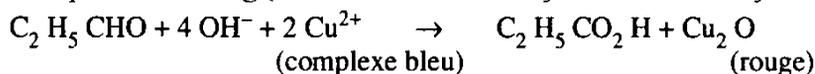
II.2. . fuchsine décolorée par dioxyde de soufre.

. éviter de chauffer car  $\text{SO}_2$  se dégage et la fuchsine violette réapparaît (méthylcétone) réagissent lentement.

## II.3. Nitrate d'argent ammoniacal oxydant.



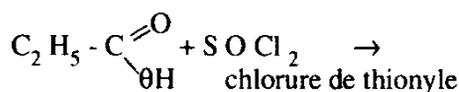
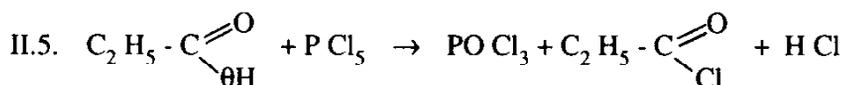
ou liqueur de Fehling (Cuivre au nombre d'oxydation + II est oxydant)



## II.4. • Catalyseur d'oxydation d'aldéhydes : Cu ou Pt.

• Sélectivité : qui oriente la réaction vers un produit majoritaire par rapport à d'autres.

• exemple : éthanol à 250° C  $\begin{matrix} \text{Cu} \\ \text{Al}_2 \text{O}_3 \end{matrix}$  éthanol + H<sub>2</sub>  
éthylène + H<sub>2</sub>O



## III.1.

III.1.a. • Réactifs purs (anhydres) alcool et acide carboxylique mélange déjà fait en proportions équimolaires (ou connues) ou matériel pour faire mélange (éprouvette graduée) acide sulfurique très concentré avec compte gouttes.

• tubes à essais avec tube long (réfrigérant atmosphérique ~ 30 cm + pipette graduée au 1/10 cm<sup>3</sup>) bain marie à eau avec brûleur à gaz ou électrique.

• nécessaire pour dosage d'acide carboxylique matériel (burette 20 ou 50 cm<sup>3</sup>) pipette jaugée réactifs solution titrée de soude 1 mol.l<sup>-1</sup> indicateur

III.1.b. • Faire un mélange équimolaire alcool acide en partant de corps purs, connaissant leurs densités et masses molaires. Calculer les volumes pour ~ 20 cm<sup>3</sup> de mélange. Le faire avec éprouvette graduée fine.

• Prélever échantillon de 2,0 cm<sup>3</sup> (pipette graduée). Rajouter acide sulfurique concentré (2 gouttes) au reste. Faire des prélèvements de 2,0 cm<sup>3</sup>, les placer au bain marie 100° C (saut 1) dans les tubes.

• Toutes les 10 minutes environ prélever un tube, tremper le système dans l'eau glacée sans perdre de produit, compter le temps à ce moment.

• Doser l'acide restant par échantillon, calculer la proportion d'acide qui a réagi. Tracer la courbe proportion acide consommé : f (t). Montrer le rôle de la température avec échantillon chauffé et rôle du catalyseur avec échantillon qui n'en comporte pas.

## III.2. Valeur de l'asymptote dépend :

- des proportions de réactifs au départ
- de la nature de l'alcool (sa classe).

III.3.a. K<sub>c</sub> = 4

III.3.b. K<sub>c</sub> varie selon Van t'Hoff  $\frac{d \ln K_c}{d T} = \frac{\Delta H}{R T^2} = 0$

K<sub>c</sub> (50°) = 4 ne varie pas.

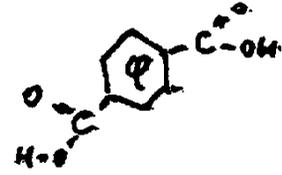
III.3.c. n acide à équilibre  $2,6 \cdot 10^{-2}$  mol.

III.3.d. 25,5 mol d'éthanol au départ.

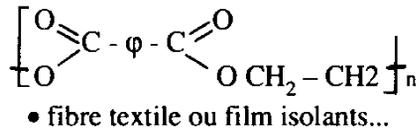
III.4.

III.4.a. acide benzènedioïque - 1,4

III.4.b.  $\text{HO H}_2\text{C} - \text{CH}_2\text{OH}$  éthanediol



III.4.c. on obtient un polyester linéaire



IV. Stéréochimie

IV.1.  $\text{C} - \text{C} - \underset{\text{OH}}{\text{C}} - \text{C}$  butanol -2     $\text{C} - \text{C} - \text{C} - \text{C} - \text{OH}$  butanol 1 classe 1

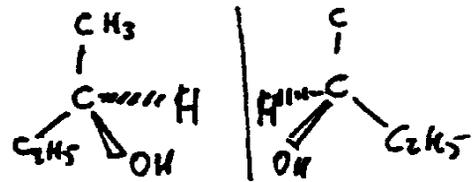
classe 2

$\text{C} - \underset{\text{C}}{\overset{\text{OH}}{\text{C}}} - \text{C}$  méthyle -2 propanol -2     $\text{C} - \underset{\text{C}}{\text{C}} - \text{C} - \text{OH}$  C méthyl -2 propanol -1 classe 1

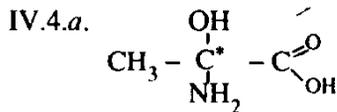
IV.2. butanol -2 actif optiquement

Activité optique : qui fait tourner le plan de polarisation de la lumière.

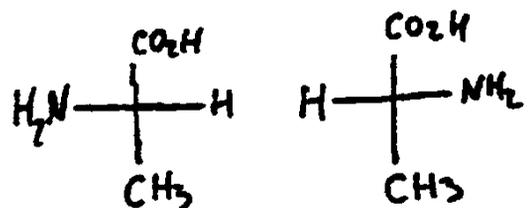
- 2 énantiomères
- racémique (mélange équimolaire)
- activité optique nulle.

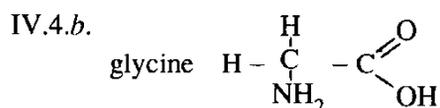


IV.4.



- alanine naturelle isomère L.
- artificielle : mélange de L et D.





- IV.4.c. • bloquer le groupe amino de l'alanine (en le transformant en amide par exemple) et activer le groupe carboxyle de l'alanine (en le transformant en chlorure d'oxyde).  
ou les opérations inverses sur la glycine
- inhiber le carboxyle (estérifier)
  - activer le groupe amino.

## PARTIE B

I. Progression pour l'étude des réactions acido-basiques en 2<sup>ème</sup>

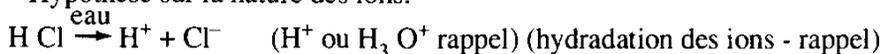
TP1 : Solution aqueuse de HCl propriétés et préparation.

• Rappel de la structure de la molécule H-Cl de chlorure d'hydrogène : liaison covalente : **affirmation 1** appuyée sur une connaissance de la règle de «stabilité» concernant la structure électronique du gaz rare le plus proche dans la classification périodique.

• La solution aqueuse : expérience du jet d'eau grande solubilité et rapide solubilisation **Manip élève 1** avec interprétation «physique» du phénomène observé Dédution expérimentale 1

• La solution aqueuse conduit le courant électrique **Manip élève 2** électrolyse ; il y a des ions déduction 2. Reconnaissance des produits de l'électrolyse. Il se forme  $\text{H}_2$  et  $\text{Cl}_2$  **dédution expérimentale 3**.

• Hypothèse sur la nature des ions.



Questions : preuves de l'existence d'ions  $\text{Cl}^-$

Réponse : précipité AgCl avec  $\text{Ag}^+$  comme pour solutions de chlorure de sodium **Manip élève 3**, Dédution expé 4

• Preuves de l'existence des ions  $\text{H}^+$  ou  $\text{H}_3\text{O}^+$ . Propriétés des solutions acides. Rappel 3<sup>ème</sup> 1 ou 2 indicateurs colorés **Manip élève 4**, **Dédution expé 5**

• Toutes les molécules HCl sont-elle dissociées ? voir TP2 avec pH.

**Manip élève 5** Action de  $\text{H}_3\text{O}^+$  sur métaux (Rappel 3<sup>ème</sup>) (Zn, Al, Fe) pas d'action sur Cu. Écriture de bilans Ceci peut être rejeté à la fin du cursus oxydo-réduction et recherche d'ions.

TP2 : pH des solutions aqueuses de HCl.

**Définition 1**  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$  tableau avec  $\text{pH} \leftrightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]$  calculatrice. Usage d'un pH mètre

**Manip élève 6**. Mesure de pH de solutions de concentration connue  $10^{-2}$  ;  $10^{-3} \text{ mol l}^{-1}$  Dédution expérimentale 6 :



Cours 1 : pH de solutions très diluées ou concentrées de HCl.

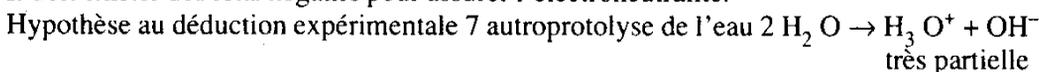
limite de validité de la définition 1 aux concentrations  $c < 0,1 \text{ mol l}^{-1}$

• **Manipulation professeur 1** avec  $c = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1} \Rightarrow \text{pH} \approx 1,1$ .

• Avec solutions très diluées affirmation 2. Des ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  peuvent provenir aussi du solvant.

• Cas limite : l'eau pure  $\text{pH} = 7$   $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7} \text{ mol l}^{-1}$

Il doit exister des ions négatifs pour assurer l'électroneutralité.



Pourquoi ceci ne se remarque que dans des solutions peu concentrées ? interprétation ou déduction expérimentale 8

TP3 : Hydroxyde de sodium et solution aqueuse. Petites manip élève ou prof sur propriétés physiques des solides et du caractère exothermique\* de sa dissolution manip élève 7.

Affirmations sur structure ionique du solide.

**Affirmation 3 Manip prof 2** électrolyse du liquide.

\* **Déduction expérimentale 9** ou interprétation de la dissolution par comparaison avec ce qui a été vu avec Na Cl ou autre

solide ionique	$\begin{array}{c} \text{dispersion des ions} \\ \hline \text{hydratation} \end{array} \rightarrow$	bilan exothermique ici
----------------	--	---------------------------

La solution conduit le courant - électrolyse Manip élève 8 reconnaissance des produits et interprétation interprétation expérimentale 10 c'est l'électrolyse de l'eau.

**Manip élève 9** précipitation d'ions de métaux  $\text{Cu}^{2+}$ ,  $\text{Al}^{3+}$ ,  $\text{Zn}^{2+}$ ,  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Fe}^{3+}$

**Manip élève 10** pH de solutions aqueuses 1 ou 2 indicateurs colorés et solution  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  mol l<sup>-1</sup> pH trouvés 12,0 ; 11,0.

Cours 2 : interprétation du pH des solutions de soude (exploitation de manip 10 et hypothèse 7)

- Avec solutions de concentration connue de soude,  $[\text{OH}^-]$  sont connues - (si  $c < 1$  mol.l<sup>-1</sup> par exemple).

- Le pH est mesuré ; on en déduit  $[\text{H}_3\text{O}^+]$

Interprétation ou déduction expérimentale 11

des ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  de l'eau sont consommés par réactions  $\text{OH}^- + \text{H}_3\text{O}^+ \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$  inverse de l'autoprotolyse.

TP4 : Réaction chimique entre solutions de concentration connue d'acide chlorhydrique et de soude (dosage).

**Manip prof 2 (ou élève)** mélange de solutions 1 mol.l<sup>-1</sup> à volumes égaux. Élévation de température ~ 7° C contre expérience pour montrer qu'il ne s'agit pas de phénomènes liés à la dilution.

**Interprétation expérimentale 12**  $\text{OH}^- + \text{H}_3\text{O}^+ \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$  on retrouve l'interprétation 11.

Dosage par élèves sur solutions  $10^{-2}$  mol.l<sup>-2</sup> **Manip élève 11** suivi à l'indicateur coloré **Manip prof 3** en parallèle sur mêmes solutions avec pH mètre.

Dosage et équivalence définitions 2 stoechiométrie de la réaction  $\text{OH}^- + \text{H}_3\text{O}^+ \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$

Interprétation expérimentale 12'

Cours 3 :

- calculs concernant les dosages.

- explications qualitatives concernant le saut pH à l'équivalence et pourquoi le choix de l'indicateur coloré importe peu.

Retour sur  $2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{OH}^- + \text{H}_3\text{O}^+$  synoptique de démarche.

Les parties marquées d'un trait vertical sont indispensables

I.2.a. Calcul 
$$\Delta\theta = \frac{5,76 \cdot 10^3}{2,15 \cdot 4,18 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}} = 6,4^\circ \text{ C}$$

I.2.b. Avec un acide faible l'énergie thermique transmise aux solutions est un peu moindre car il faut d'abord fournir l'énergie de dissociation de l'acide. En principe  $\Delta\theta < 6,4^\circ \text{ C}$ . Dans les faits c'est très proche.

## II. Étude de Réactions avec $\text{NH}_3$ et $\text{HCl}$

### II.1. Problème de terminale (proposition)

- II.1.a. Déterminer graphiquement le volume de solution acide versé à l'équivalence et le pH à l'équivalence. Donner une définition générale de l'équivalence.
- II.1.b. Expliquer pourquoi on a affaire à une base faible d'après les informations tirées de a. (pH de l'équivalence).  
Indiquer d'autres éléments dont l'allure de la courbe qui permettent la même conclusion.
- II.1.c. Calculer  $K_A$  et  $pK_A$  la constante d'acidité du couple acido-basique  $NH_4^+/NH_3$  à partir du pH du point de départ (volume d'acide versé = 0). Expliquer les approximations faites.
- II.1.e. Déterminer également  $pK_A$  grâce au pH de la demi-équivalence. Montrer les approximations faites pour cette détermination simple et rapide.
- II.1.f. Définir ce que l'on entend par solution tampon.

Corrigé :

a) Volume de solution acide à l'équivalence  $40,00 \text{ cm}^3$  à  $0,05$  près pH à l'équivalence :  $5,70$  à  $0,10$  près.

L'équivalence est obtenue quand on mélange les réactifs dans les proportions exactes des coefficients stoechiométriques de la réaction.

b) l'équivalence est à  $\text{pH} < 7$ , milieu acide à cause de l'acide  $NH_4^+$  acide faible conjugué de  $NH_3$  qui est donc une base faible.

D'autres éléments (variation relativement plus rapide du pH en début de dosage que vers le milieu, point d'inflexion à mi-équivalence) permettent d'affirmer que l'on dose une base faible.

c) Calcul de la concentration de base faible.

$$C = \frac{10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 2,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1} \quad \text{précision au moins } \underline{2 \text{ chiffres}} \text{ sinon } 3$$

d) Dans la solution d'ammoniac

$$[H_3O^+] = 10^{-10,75} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}; [OH^-] = 10^{-3,25} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$$

• l'électroneutralité doit se faire avec  $NH_4^+$   
et donc  $[NH_4^+] = [OH^-] - [H_3O^+] \approx [OH^-] = 10^{-3,25}$   
 $= 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$

• la conservation de la matière donne  $[NH_3]$

$$[NH_3] = C_b - [NH_4^+] = 2 \cdot 10^{-2} - 5,6 \cdot 10^{-4}$$

$$\approx 1,94 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$$

•  $K_A = \frac{[NH_3][H_3O^+]}{[NH_4^+]} = \frac{1,94 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-10,75}}{10^{-3,25}}$   
 $= 1,94 \cdot 10^{-9,5} = 6,3 \cdot 10^{-10}$  et  $pK_A = 9,2$

Si on fait approximation  $[NH_3] = e$  b alors  $\text{pH} = \frac{1}{2} (pK_e + pK_A - pc)$

e) à la demi-équivalence  $C_i = \text{conc initiale de l'acide}$

$$[Cl^-] = \frac{C_a \cdot v_{E/2}}{v_{E/2} + V_b} = \frac{C_a \cdot i}{2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$$

$$[H_3O^+] = 10^{-9,2} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1} \quad [OH^-] = 10^{-4,8} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$$

Négligeables devant  $[Cl^-]$

- L'électroneutralité se résume donc en

$$[\text{Cl}^-] \approx [\text{NH}_4^+] = \frac{C_a}{2}$$

- Conservation de la matière N donne

$$[\text{NH}_3] = \frac{C_b V_b}{V_b + v_{E/2}} - [\text{NH}_4^+] = \frac{C_b V_b - c_i \cdot v_{E/2}}{V_b + v_{E/2}} = \frac{C_i}{2}$$

Donc  $\text{pH} = \text{p}K_A = 9,20$   
à 1/2 équivalence.

II.2.a.  $\text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_e + \text{p}K_A - \text{p}c)$  voir ci-dessus.

II.2.b. Supposons que le pH ne change pas ou très peu.

- $[\text{Cl}^-]$  devient  $\frac{C_i v_{E/2}}{v_{E/2} + V_b + V_{\text{ajouté}}} = \frac{C_i}{12} = 8,33 \cdot 10^{-4} \text{ mol l}^{-1}$

- $[\text{OH}^-] = 1,58 \cdot 10^{-5} \text{ mol l}^{-1}$  n'est plus tout à fait négligeable devant  $[\text{Cl}^-]$

- l'électroneutralité donne

$$[\text{NH}_4^+] = [\text{Cl}^-] + [\text{OH}^-] = 8,45 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$$

- la conservation de la matière donne

$$[\text{NH}_3] = \frac{C_b V_b}{V_b + v_{E/2} + V_{\text{ajouté}}} - [\text{NH}_4^+] = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 20}{240} - 8,49 \cdot 10^{-4} = 8,18 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$$

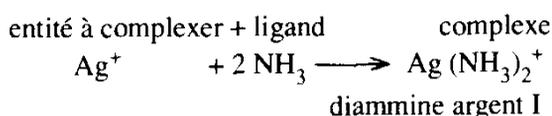
$$\text{pH} = \text{p}K_A + \lg \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} = 9,20 - 0,016 \approx 9,20$$

< à la  
précision  
des mesures

III.1.  $\text{Ag}_{\text{aq}}^+ + \text{Cl}_{\text{aq}}^- \rightarrow \text{Ag Cl}_{(\text{s})}$  blanc qui noircit à la lumière. 1 goutte de solution diluée de nitrate d'argent dans quelques  $\text{cm}^3$  de solutions.

III.2. Si le solide Ag Cl est présent, la relation  $K_s = [\text{Cl}^-] [\text{Ag}^+]$  lie les concentrations  $[\text{Cl}^-]$  et  $[\text{Ag}^+]$  en équilibre avec le solide.

III.3. Constante de stabilité : celle de l'équilibre



$$K_f = \frac{[\text{complexe}]}{[\text{Ag}^+] [\text{NH}_3]^2}$$

III.4.a. ion complexe diammine argent I

III.4.b.  $[\text{Cl}^-] = 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$  ;  $[\text{Ag}^+] = 1.10^{-3} \cdot 5.10^{-5} = 5.10^{-8}$   
s'il n'y avait pas précipitation

$[\text{Cl}^-][\text{Ag}^+] = 5.10^{-10} > K_s$  impossible donc précipité.

On a d'abord la réaction acide base  $\text{H}_3\text{O}^+ + \text{NH}_3 \rightarrow \text{NH}_4^+ + \text{H}_2\text{O}$  on verse donc  $20 \text{ cm}^3$  de solution d'ammoniac pour l'équivalence ; partons de  $v_1 = 41 \text{ cm}^3$

III.4.c. • Soit  $v$  (l) le volume de solution d'ammoniac versé ensuite dans  $v_1$  ( $41.10^{-3}$  l) de solution acide avec chlorure d'argent précipité, juste avant disparition du précipité.

• Supposons que  $v$  soit de l'ordre de  $v_1$  ou plus petit.

$\text{Ag}^+$  apporté a été en défaut par rapport à  $\text{Cl}^-$  apporté

$10^{-6} \text{ mol}$   $2 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$

Toute la quantité de matière chlorure reste quasiment dans cet état.

$$[\text{Cl}^-] = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{(v + v_1)_1}$$

• S'il reste une trace de précipité  $\text{AgCl}_{(s)}$

$$[\text{Ag}^+] = \frac{K_s}{[\text{Cl}^-]} = \frac{1,6 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot (v + v_1)_1 = 0,8 \cdot 10^{-6} \cdot (v + v_1)_1$$

de l'ordre de  $10^{-8} \text{ mol l}^{-1}$

• l'essentiel de l'argent est dans le complexe

$$[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] = \frac{10^6}{(v + v_1)_1} \text{ de l'ordre de } 10^{-4} \text{ mol.l}^{-1}$$

la concentration de  $\text{NH}_3$  prisonnier dans le complexe est donc de l'ordre de  $10^{-4} \text{ mol.l}^{-1}$  alors que  $\text{NH}_3$  apporté est de l'ordre de  $10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$  donc quasiment tout  $\text{NH}_3$  apporté au-delà de l'équivalence est en solutions sous forme de molécules hydratées  $\text{NH}_3_{\text{aq}}$

$$[\text{NH}_3]_{\text{apporté au delà de l'équivalence}} = \frac{0,01 \cdot v}{(v + v_1)_1} = \left( \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{Ag}^+] K_f} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{2,8 \cdot 10^{-4}}{(v + v_1)_1}$$

$$v = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ l} = 28 \text{ ou } 3$$

$$v \text{ total versé} = 48 \text{ cm}^3$$

#### IV Correction de copie d'élève

##### IV.1. Correction succincte

1ère question :  $[\text{C}_2\text{H}_5 - \text{NH}_3^+] = 6,30.10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$  chez l'élève tout est juste jusque là. Conservation de la matière

$$[\text{C}_2\text{H}_5 - \text{NH}_2] = 0,1 - 6,3 \cdot 10^{-3}$$

$$= 0,0937 \approx 0,094 \text{ mol.l}^{-1}$$

ici l'élève a trop arrondi et n'a gardé qu'un chiffre significatif.

$n(\text{C}_2\text{H}_5 - \text{NH}_2) = 2,80.10^{-3} \text{ mol}$  ; juste l'élève avait gardé sans le dire, assez de chiffres.

facteur de dissociation, juste, 6,3 %

2ème question : Raisonnement d'élève juste jusqu'au calcul de  $c_1$  qui est faux. C'est la faute la plus grave faute 1.

Confusion entre concentrations apportées et à l'équilibre.

$c'_1 = 0,075 \text{ mol.l}^{-1}$  la suite est fautive à cause de cela.

$[\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2] = 0,074 \text{ mol.l}^{-1}$

$n(\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2) = 2,96 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$  donc légère augmentation.

L'élève raisonne à peu près juste mais ne se soucie pas de la petite contradiction (faute 2) par le calcul  $n(\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2)$  diminue (un peu) et par le raisonnement il faudrait que cette valeur augmente (partie juste du raisonnement).

IV.2. • Gardez dans vos résultats de calculs la précision des données, 2 à 3 chiffres significatifs sur les concentrations de  $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2$  à l'équilibre.

• Faute 1.

• Faute 2 (ne pas chercher à faire mentir les faits).

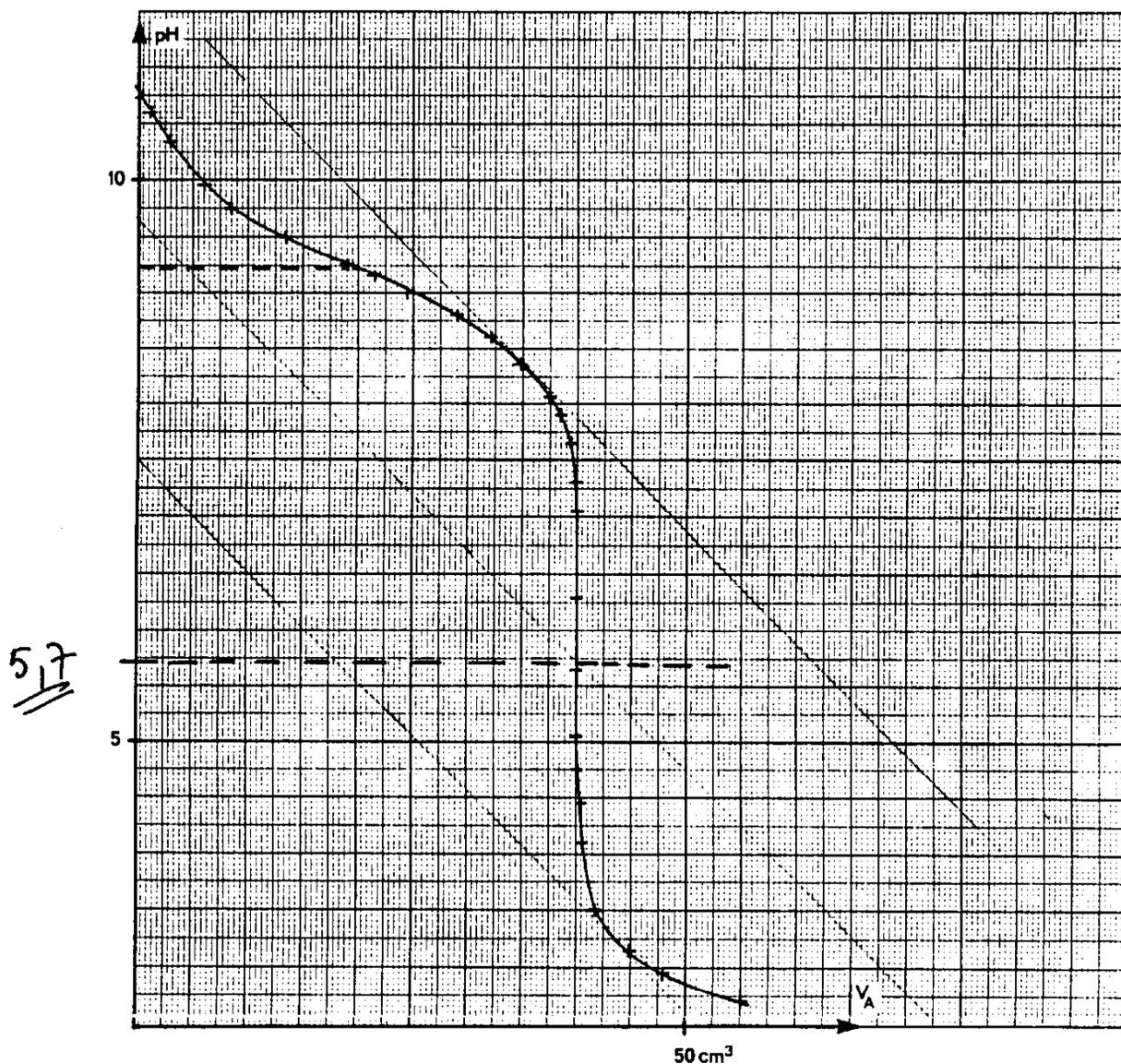
• Il faut être plus succinct dans la rédaction pour être rentable.

IV.3.a. Les volumes sont mesurés à  $0,1 \text{ cm}^3$  près valeur  $0,05$ , les concentrations à 3 chiffres significatifs les pH à  $0,1 \text{ pt}$  exceptionnellement à  $0,05 \text{ pts}$  près.

IV.3.b. Il faudrait donc exprimer les concentrations comme suite :

au lieu de  $0,1 \text{ mol.l}^{-1}$  écrire  $1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}$  au lieu de  $30 \text{ cm}^3$  écrire  $30,0 \text{ cm}^3$  etc.

## ANNEXE 1



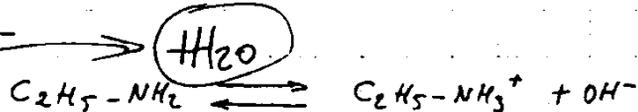
## A RENDRE AVEC LA COPIE

Chimie.

1°) Une solution aqueuse de monoéthylamine ( $C_2H_5-NH_2$ ) avec  $C = 0,1 \text{ mol l}^{-1}$  et un  $pH = 11,8$ .

Repartition de moles de monoéthylamine ayant réagi avec l'eau, et le nombre de moles présentes dans 30 cm<sup>3</sup> de cette solution.

\*



\* Recherche de la concentration en  $H_3O^+$  :  $[H_3O^+]$  ?

On sait que  $pH = \log \frac{1}{[H_3O^+]}$

or ici  $pH = 11,8$

donc  $11,8 = \log \frac{1}{[H_3O^]}$

$\Rightarrow [H_3O^+] = 1,58 \cdot 10^{-12} \text{ mol.l}^{-1}$

ou  $1,585 \cdot 10^{-12} \text{ mol.l}^{-1}$

\* Concentration en  $OH^-$  :  $[OH^-]$  ?

On utilise le produit ionique de l'eau.

$$[H_3O^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$$

$$[OH^-] = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]}$$

$\Rightarrow [OH^-] = 6,30 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$

$6,31 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$

\* Recherche de la concentration en  $[C_2H_5-NH_3^+]$

Application de la loi d'électroneutralité

$$[C_2H_5-NH_3^+] + [H_3O^+] = [OH^-]$$

$$[C_2H_5-NH_3^+] = [OH^-] - [H_3O^+]$$

A.N.  $[C_2H_5-NH_3^+] = 6,30 \cdot 10^{-3} - \underbrace{1,58 \cdot 10^{-12}}_{\text{ultra-minime négligeable}}$

donc  $[C_2H_5-NH_3^+] = 6,30 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$

\* Recherche de la concentration en  $[C_2H_5-NH_2]$ 

Application de la loi de conservation de la matière.

$$[C_2H_5-NH_2] + [C_2H_5-NH_3^+] = C$$

$$[C_2H_5-NH_2] = C - [C_2H_5-NH_3^+]$$

mesure  
approximative

A.N.  $[C_2H_5-NH_2] = 0,1 - 6,30 \cdot 10^{-3}$

$[C_2H_5-NH_2] = 0,09 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$

0,0937 garder au  
moins 2 chiffres  
significatifs

## \* Calcul de la proportion de moles de monoéthylamine.

Au calcul le facteur de dissociation

$$\alpha = \frac{C}{[C_2H_5-NH_3^+]} = \frac{0,1}{6,3 \cdot 10^{-3}} = 15,84$$

il suffit de traduire  $\alpha$  en %

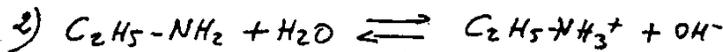
$$15,84 = \frac{100}{n} \Rightarrow n = \frac{100}{15,84} = 6,3$$

6,3% des moles de monoéthylamine ont réagi avec l'eau.

\* Nombre de moles de monoéthylamine dans 30 cm<sup>3</sup> de solution.

Dans un litre de solution on a 0,09 mol de monoéthylamine

$$0,09 \times \frac{30}{100} = 2,8 \cdot 10^{-3}$$

Dans 30 cm<sup>3</sup> il y a  $2,8 \cdot 10^{-3}$  mol de  $[C_2H_5-NH_2]$ 

pH = 11

$V_3 = 10 \text{ cm}^3$   
 $V_B = 30 \text{ cm}^3$

$C_1 = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$

\*  
l'inverse  
tout de  
suite.en fait on  
a déjà trouvé  
0,0937 pour  
nos calculs.

\* Concentration en  $\text{Cl}^-$ 

la dissociation en  $\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3\text{Cl}$  est totale donc

$$[\text{Cl}^-] = 0,2 \times \frac{10^{\leftarrow V_s}}{40^{\leftarrow V_s + V_B}}$$

$$[\text{Cl}^-] = 0,05 \text{ mol l}^{-1}$$

\* Concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$ 

$$\text{pH} = \log \frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \quad \text{ici pH} = 11 \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-11} \text{ mol l}^{-1}$$

\* Concentration en  $\text{OH}^-$ 

Produit ionique de l'eau  $[\text{H}_3\text{O}^+] \times [\text{OH}^-] = 10^{-14}$

$$[\text{OH}^-] = 10^{-3} \text{ mol l}^{-1}$$

\* Concentration en  $[\text{C}_2\text{H}_5\text{-NH}_3^+]$ 

loi d'électroneutralité.

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{-NH}_3^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{Cl}^-] + [\text{OH}^-]$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{-NH}_3^+] = [\text{Cl}^-] + [\text{OH}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+]$$

A.N

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{-NH}_3^+] = 0,05 + 10^{-3} - 10^{-11}$$

$$[\text{C}_2\text{H}_5\text{-NH}_3^+] = 0,05 \text{ mol l}^{-1}$$

\* Concentration en  $\text{C}_2\text{H}_5\text{-NH}_2$ 

La concentration initiale en  $\text{C}_2\text{H}_5\text{-NH}_2$  provient des 2 solutions qui se sont diluées.

il faut calculer la concentration initiale en  $\text{C}_2\text{H}_5\text{-NH}_2$  pour la 1<sup>ère</sup> solution après dilution

$$C'_1 = C_1 \times \frac{M_1}{M_1 + M_2}$$

$$C'_1 = 0,09 \times \frac{30}{40}$$

$$C'_1 = 0,0675 \text{ mol l}^{-1}$$

0,051 n en veut garder 2 chiffres si insuffisant

faute grave (1)

\* la concentration initiale en  $C_2H_5NH_2$  pour le 2<sup>ème</sup> solution après dilution :

$$C'_2 = C_2 \times \frac{10}{40}$$

$$C'_2 = 0,2 \times \frac{1}{4} = 0,05 \text{ mol.l}^{-1}$$

$$\underline{C'_2 = 0,05 \text{ mol.l}^{-1}}$$

Par conséquent la concentration initiale en  $C_2H_5NH_2$  pour le

mélange est :  $C = C'_1 + C'_2$

$$C = 0,0675 + 0,05$$

~~faux~~  $C = 0,1175 \text{ mol.l}^{-1}$

loi de conservation de la matière

$$[C_2H_5NH_2] + [C_2H_5NH_3^+] = C$$

A.V

$$[C_2H_5NH_2] = 0,1175 - 0,05$$

$$\Rightarrow [C_2H_5NH_2] = 0,0675 \text{ mol.l}^{-1}$$

\* Nb. de moles de  $C_2H_5NH_2$  présentes.

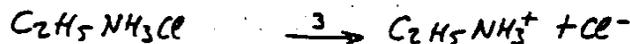
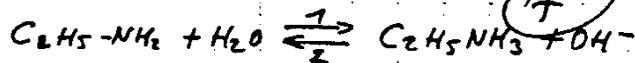
$$\text{Nb de moles} = 0,0675 \times \frac{40}{1000} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ moles}$$

il y a  $2,7 \cdot 10^{-3}$  moles de  $C_2H_5NH_2$  dans la solution

\* Quelle réaction s'est produite ?

On remarque que le nbr de  $C_2H_5NH_2$  dans la 2<sup>ème</sup> solution est presque identique au nbr de  $C_2H_5NH_2$  dans la 1<sup>ère</sup> solution.

explication :



faute. 2  
contradiction

faute

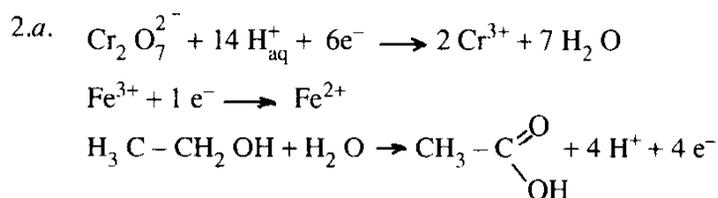
( On remarque que  $C_2H_5NH_3Cl$  est un sel donc 3 est une réaction complète et  $[C_2H_5NH_3^+]$  ce qui entraîne la réaction 2 et le blocage de 1 donc  $C_2H_5NH_2$  ne peut se dissocier, c'est pourquoi le nbr de moles de  $C_2H_5NH_2$  dans la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> solution est le même.

une peu faux

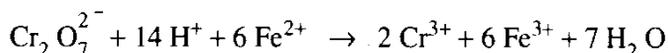
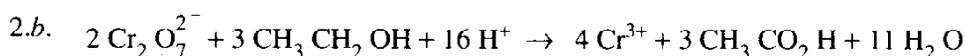
## PARTIE C

Questions CAPES n° 1

- 1.a. L'alcool passera quand  $\theta$  atteint  $78^\circ 5$  puis la température s'élèvera et un mélange alcool eau passera, mais de composition de plus en plus faible en alcool.
- 1.b.  $50 \text{ cm}^3$  c'est largement plus que le volume d'alcool dans les  $20 \text{ cm}^3$  de punch. Des essais préalables ont montré que tout l'alcool est passé et on a dû prendre une marge de sécurité.  
Le thermomètre indique quand l'eau passe seule (environ  $100^\circ \text{ C}$ ).
- 1.c. tout l'alcool du punch est dans le distillat avec de l'eau.
- 1.d. régulariser la chauffe (homogénéiser la température dans le liquide chauffe).
- 1.e. En travaillant sur une valeur échantillon, de S de volume connu exactement on veut savoir quelle fraction exacte de l'alcool des  $20 \text{ cm}^3$  de punch on a traité.
- 1.f. • Partir sur des bases sûres et ne pas compromettre toute la suite par fausse manœuvre de début.  
• Faciliter la tâche de correction

Questions CAPES n° 2

Le pH influe sur la première et l'augmentation de la concentration en ions  $\text{H}^+$ , diminution du pH, augmente le caractère oxydant de  $\text{Cr}_2 \text{O}_7^{2-}$  (augmentation du potentiel d'oxydoréduction du couple  $\text{Cr}_2 \text{O}_7^{2-} / \text{Cr}^{3+}$  selon la relation de Nernst)



$E^\circ (\text{Cr}_2 \text{O}_7^{2-} / \text{Cr}^{3+})$  beaucoup plus grand que  $E^\circ$  (acide /aldéhyde) ou que  $E^\circ$  (aldéhyde / alcool). Dans des conditions proches des conditions standard  $\text{Cr}_2 \text{O}_7^{2-}$  oxydera donc complètement l'alcool (pas nécessairement vite).

Mêmes raisons pour les couples du dosage en retour de l'excès de dichromate par  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Cr}_2 \text{O}_7^{2-}$  oxyde,  $\text{Cl}^-$  en  $\text{Cl}_2$  ce qui doit être évité.

- 2.c. Cinétiquement la réaction n'est pas rapide. On serait donc gêné pour dire si elle est terminée ou non.
- 2.d. L'ion  $\text{Fe}^{2+}$  est très oxydable en solution aqueuse à l'air. Dans le sel de Mohr le fer se conserve beaucoup mieux au nombre d'oxydation II et on peut donc se fier aux concentrations de ce réactif réducteur.
- 2.e. Quantité de matière d'électrons pris par  $\text{Cr}_2 \text{O}_7^{2-}$  ( $6 \text{ C}_2 \text{ V}_2$  si  $\text{V}_1$  en l) = quantité d' $\text{e}^-$  fournie par sel de Mohr  $\text{C}_1 \text{ V}_{1(0)}$  et par l'alcool  $4 n$  alcool dans  $10 \text{ cm}^3$

$$6 C_2 V_2 = C_1 V_1 + 4 \frac{n \text{ alcool}}{10 \text{ cm}^3}$$

$$x = 25 \frac{n \text{ alcool}}{10 \text{ cm}^3} \quad x = 25 \cdot \frac{6 C_2 V_2 - C_1 V_1}{4} \quad V_1 \text{ et } V_2 \text{ en l}$$

$$2.f. \quad c_{\text{alcool}} = \frac{x}{20 \cdot 10^{-3}} = \frac{1250}{4} \cdot (6 C_2 V_2 - C_1 V_1) \quad V_1 \text{ et } V_2 \text{ en l}$$

$$\text{ou } \frac{1,25}{4} \cdot (6 C_2 V_2 - C_1 V_1) \quad V_1 \text{ et } V_2 \text{ en cm}^3$$

$$2.g. \quad \text{teneur en alcool : } 100 \frac{c \text{ M}_{(\text{alcool})}}{\text{l alcool en } \ell} = \frac{c \text{ M}}{10 \text{ l en } \ell/\text{cm}^3}$$

*Application numérique :* 15,77 ~ 15,8 %

### Question CAPES n° 3

- 3.a. Le diphenylsulfonate de baryum est un indicateur d'oxydoréduction. L'entité oxydante est violette, la réduite est verte.
- 3.b. Orthophénantroline ferreuse indicateur d'oxydoréduction utilisé lors du dosage des ions  $\text{Fe}^{2+}$  par les ions Cerium IV.

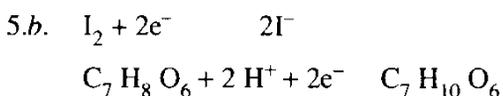
### Question CAPES n° 4

- 4.a. Chaque échantillon contient un réducteur
- le rhum blanc contient l'éthanol
  - le distillat S également
  - le sirop de suce, du saccharose
  - le citron vert de la vitamine C.
- le dichromate jouera chaque fois son rôle d'oxydant.
- 4.b. Il faut extraire l'éthanol pour le séparer des autres réducteurs, d'où l'extraction par distillateur.

### Question CAPES n° 5

- 5.a. Le diiode ne réagit qu'avec la vitamine C qui se trouve dans le jus de citron vert (oxydant doux).

On peut donc faire agir sur le punch car seule la vitamine C apportée par le jus de citron vert sera concernée (protocole de II 1).



L'oxydoréducteur se fait mole à mole.

$$C' = \frac{c'_1 V'_1}{V'}$$

$$\text{Application numérique : } c' = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,65}{20}$$

$$= 4,12 \cdot 10^{-4} \text{ mol.l}^{-1}$$

- 5.c. La vitamine C a dû s'oxyder à l'air entre le moment de sa préparation et celui du dosage.
- 5.d. Dosage possible avec un excès de diiode dosé en retour par le thiosulfate.
- 6.a. • Mise en œuvre de connaissances de savoir faire  
théorique bilans d'oxydo-réduction - à équilibrer - problèmes quantitatifs de chimie  
expérimental :  
- faire un dosage  
- suivre un protocole imposé.
- Mise en œuvre de l'outil mathématique.
- Mise en œuvre d'une démarche scientifique dans un domaine expérimental.  
- chercher les informations pertinentes dans une base de données (partie III).  
- analyser des faits expérimentaux pour valider un protocole.
- 6.b. • En général ce sont des activités de synthèse qui donnent une ouverture sur la vie, ou la réalité de la chimie dans l'environnement de tous les jours ou dans l'industrie.

**C.A.P.E.S.****(Concours Interne)****COMPOSITION À PARTIR D'UN PROGRAMME**

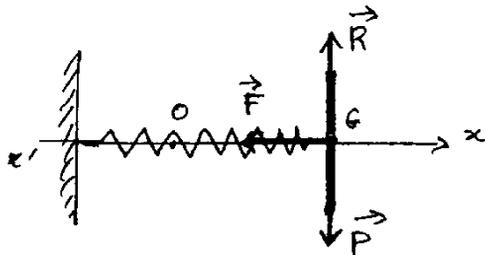
Épreuve commune aux options : Physique et Chimie

Physique et électricité Appliquée - Session : 1990

par M.T. PUTON et B. MEISS

**A. OSCILLATEUR MÉCANIQUE**

- A.1. Le disque est soumis à trois forces : le poids  $\vec{P}$ , la réaction de la tige  $\vec{R}$  et la force exercée par le ressort  $\vec{F} = k x \vec{u}_x$ . La relation fondamentale de la dynamique donne :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$ .

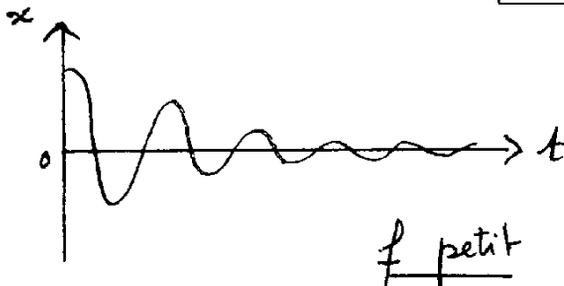


En projection sur  $x' O x$  :  $m \ddot{x} = -k x \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

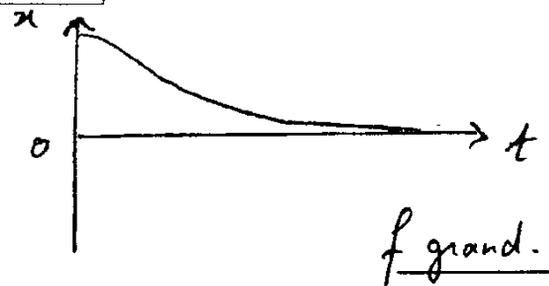
L'intégration, vu les conditions initiales, conduit à  $x = a \cos \omega_0 t$ .

- A.2. Il suffit d'ajouter  $\vec{F}_1 = -f \vec{v} = -f \dot{x} \vec{u}$  au bilan précédent :

$$m \ddot{x} + f \dot{x} + k x = 0 \quad (1)$$



(a) régime pseudo-périodique



(b) régime apériodique

Le cas (a) est obtenu lorsque l'équation caractéristique de (1), c'est-à-dire  $m r^2 + f r + k = 0$ , admet des racines complexes.

Le cas (b) correspond à des racines réelles.

Si ce polynôme admet une racine double, on obtient le régime critique.

$$\Delta = f_c^2 - 4 m k = 0 \quad \text{d'où}$$

$$f_c = 2 \sqrt{km} .$$

Physiquement, cela correspond au cas où le système revient le plus rapidement à sa position d'équilibre.

A.3.

A.3.1.

$$m \ddot{x} + f \dot{x} + k x = F_0 \cos \omega t \quad (2)$$

A.3.2. La solution de (2) est obtenue en additionnant une solution particulière de (2) et la solution générale de (1). Cette dernière, quel que soit  $f$ , tend vers zéro (régime transitoire). La solution particulière, vu le second membre de (2), est recherchée sous la forme  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Elle correspond au régime forcé.

A.3.3. On associe à  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  le nombre complexe  $\underline{x} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ .

$$(2) \Rightarrow (-m\omega^2 + jf\omega + k) A e^{j\varphi} = F_0, \text{ après simplification par } e^{j\omega t} \underline{A} = A e^{j\varphi} = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + jf\omega}$$

$A$  et  $\varphi$  sont respectivement le module et l'argument du nombre complexe  $\underline{A}$ .

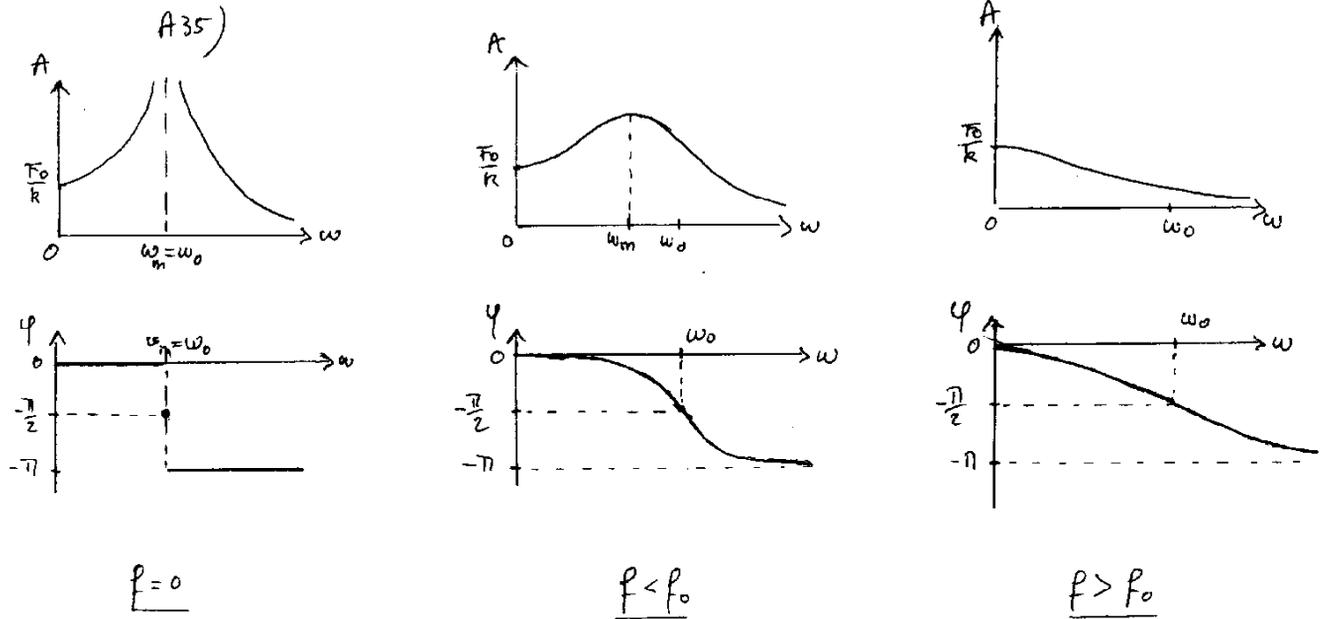
$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + f^2 \omega^2}}$$

A.3.4.  $\text{tg } \varphi = \frac{-f\omega}{k - m\omega^2}$

avec  $\sin \varphi \leq 0$   
 $\cos \varphi$  quelconque

donc  $\varphi \in ]-\pi, 0]$

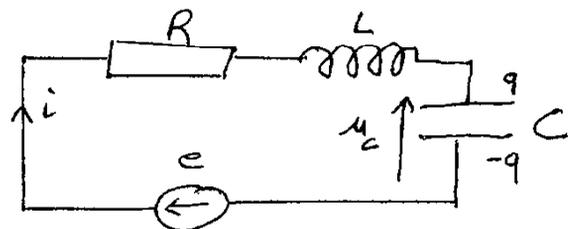
A.3.5.



A.3.6.  $e = E_0 \cos \omega t$  et  $i = \frac{dq}{dt}$

$$E_0 \cos \omega t = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

d'où  $E_0 \cos \omega t = LC \frac{du_c^2}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c$ .



Il faut étudier la charge ou la tension du condensateur.

## B. MICROPHONE ÉLECTRODYNAMIQUE

## B.1.

- B.1.1. Le déplacement de la tige (T) dans le champ magnétique provoque un flux coupé  $\phi_c$  et l'apparition d'une f.é.m. induite  $e = -\frac{d\phi_c}{dt}$ .

Avec les conventions de l'énoncé on obtient  $e = -Blv$ . L'intensité du courant induit dans le circuit

fermé est 
$$i = \frac{e}{r} = -\frac{Blv}{R}.$$

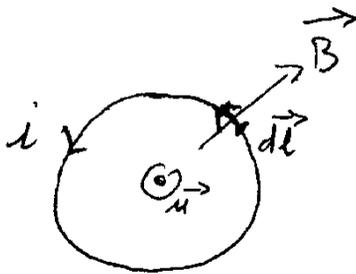
- B.1.2. Le courant induit crée un champ magnétique qui s'oppose au champ  $\vec{B}$ , en accord avec la loi de Lenz

- B.1.3. La force de Laplace  $\vec{F}_L$  qui agit sur la tige est donnée par :  $\vec{F}_L = i \vec{MN} \wedge \vec{B} = -\frac{B^2 l^2}{R} \vec{v}$ .

Pour maintenir la vitesse de la tige constante l'opération doit exercer une force  $\vec{F}_{op} = -\vec{F}_L$ .

## B.2.

- B.2.1. Chaque élément  $d\vec{l}$  produit une f.é.m. induite élémentaire  $de$ , due au flux coupé  $de = -\frac{d^2\phi_c}{dt} = +Bdlv$ . Tous les éléments de circuit



sont en série donc  $e = \int_{\text{circuit}} de \Rightarrow e = Blv$  et

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

- B.2.2. Chaque élément  $d\vec{l}$  subit une force de Laplace  $d\vec{F}_e = -idl B \vec{u}_x$ .

Tous les  $d\vec{F}_e$  sont colinéaires :  $\vec{F}_e = \int_{\text{circuit}} d\vec{F}_e = - \int_{\text{circuit}} idl B \vec{u}_x = -i l B \vec{u}_x$ .

L'équation différentielle vérifiée par  $x$  est :

$$m \ddot{x} + f \dot{x} + kx = F_a - ilB.$$

- B.2.3. En remplaçant  $i$  par sa valeur on obtient :

$$m \ddot{x} + \left( f + \frac{B^2 l^2}{R} \right) \dot{x} + kx = F_a$$

$$f' = f + \frac{B^2 l^2}{R}.$$

- B.2.4.  $u_R = Ri = Blv = Bl\dot{x}$

En utilisant les résultats du A3,  $x = \frac{F_a \cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{f'^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$

$$u_R = \frac{Bl F_a \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{f'^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_{Rm} = \frac{F_a Bl \omega}{\sqrt{f'^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$$

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

B.2.5.  $U_{Rm}$  est maximal si  $\frac{k}{\omega_0} - m\omega_0 = 0$ , c'est-à-dire pour une fréquence

$$\boxed{N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 503 \text{ Hz.}}$$

B.2.6. Si  $f$  augmente,  $f'$  devient très supérieur à  $\left| m\omega - \frac{k}{\omega} \right|$  et  $U_{Rm}$  devient pratiquement indépendant de la fréquence.

$$U_{Rm} \approx \frac{F_a Bl}{f'} = \frac{F_a}{\frac{f}{Bl} + \frac{Bl}{R}}$$

$U_{Rm}$  est maximal si  $\frac{f}{Bl} = \frac{Bl}{R}$  et

$$\boxed{U_{Rmax} = F_a \frac{Bl}{2f}}$$

On a intérêt à augmenter la quantité  $B-l$  et à diminuer  $f$ . Ce dernier point est contradictoire avec l'hypothèse de départ, d'où la nécessité d'un compromis, comme souvent en sciences physiques.

### C. APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE

#### C.1.

C.1.1. Le diaphragme limite la quantité de lumière et l'inclinaison des rayons lumineux.

L'obturateur règle le temps de pose ; la pellicule reçoit l'image latente.

C.1.2.  $L = \sqrt{24^2 + 36^2} = 43 \text{ mm}$  donc la distance focale de l'objectif standard est  $f'_2 = 50 \text{ mm}$ .

C.1.3. Lorsque l'appareil est réglé pour photographier un objet à l'infini, la pellicule est dans le plan focal image de l'objectif.

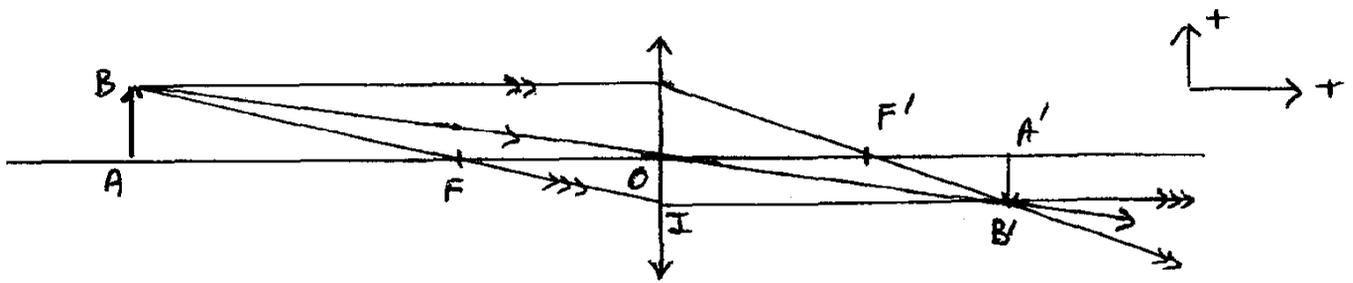
$$\boxed{\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2f'}}$$

Application numérique :

$f'_{\text{mm}}$	24	50	135
$\alpha_{\circ}$	84	46	18

L'objectif «grand angulaire» est celui correspondant à  $f' = 24 \text{ mm}$ .

C.1.4.  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB}$  ; les triangles OIF et ABF sont semblables :



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FO}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{f'}{\overline{FA}}$$

C.1.5. Le grandissement augmente avec  $f'$ , mais le champ angulaire est plus faible.

C.2.

C.2.1. Pour un objet à l'infini, dans la direction de l'axe, on a une image en  $F'$ .

Si l'objet est en A, son image est en  $A'$ .

L'objet et l'image se déplacent dans le même sens, donc  $\overline{F'A'} = \Delta x' > 0$ .

Avec la formule de Newton on obtient directement :

$$\overline{FA} \cdot \Delta x' = -f'^2 \quad \Delta x' = -\frac{f'^2}{\overline{FA}} = \boxed{\frac{f'^2}{x - f'}}$$

C.2.2. Si  $x = 150 f'$        $\Delta x' \approx 0,33 \text{ mm}$ .  
            $x = 10 f'$           $\Delta x' \approx 5,5 \text{ mm}$ .

Dans le premier cas  $\Delta x'$  est suffisamment faible pour que l'on n'ait pas de mise au point à effectuer, contrairement au second cas.

C.3.

C.3.1. Avec les triangles semblables  $IOA'_1$  et  $PA'A'_1$ , on a :

$$\frac{\overline{IJ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OA'_1}}{\overline{A'A'_1}} = \frac{d}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \overline{OA'_1} = \frac{d}{\varepsilon} (\overline{A'O} + \overline{OA'_1})$$

$$\overline{OA'_1} \left(1 + \frac{d}{\varepsilon}\right) = \frac{d}{\varepsilon} \overline{A'O} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{OA'_1}} = \frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{\varepsilon}{d \overline{OA'}}$$

La formule de conjugaison appliquée à  $A_1$  et  $A'_1$  donne :  $\frac{1}{\overline{OA'_1}} = \frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{f'}$ ; de même avec A et

$$A' : \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}$$

Par comparaison des deux expressions donnant  $\frac{1}{\overline{OA'_1}}$ , on a :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} + \frac{\varepsilon}{d\overline{OA}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{\varepsilon}{d\gamma\overline{OA}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{OA_1} = \frac{\overline{OA}}{1 + \frac{\varepsilon}{d\gamma}}}$$

Pour un calcul analogue, on obtient :

$$\boxed{\overline{OA_2} = \frac{\overline{OA}}{1 - \frac{\varepsilon}{d\gamma}}}$$

$$\text{C.3.2. } \overline{A_1A} = \overline{A_1O} + \overline{OA} = \overline{OA} \frac{\varepsilon}{d\gamma} \left( \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{d\gamma}} \right) = \frac{\overline{AO}}{\frac{d|\gamma|}{\varepsilon} - 1} \quad (\text{car } \gamma < 0)$$

$$\text{de même } \overline{AA_2} = \overline{AO} + \overline{OA_2} = \overline{AO} \frac{\varepsilon}{d|\gamma|} \times \frac{1}{\frac{\varepsilon}{d|\gamma|} + 1} = \frac{\overline{AO}}{\frac{d|\gamma|}{\varepsilon} + 1} \quad \frac{d|\gamma|}{\varepsilon} \text{ est supérieur à } 1 :$$

$$\boxed{\overline{A_1A} > \overline{AA_2}}$$

La profondeur de champ en arrière du plan de mise au point est supérieure à celle en avant du plan de mise au point.

$$\text{C.3.3. } \overline{A_1A_2} = \overline{A_1O} + \overline{OA_2} = \overline{OA} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{d\gamma}} - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{d\gamma}} \right] = \boxed{\frac{2\varepsilon}{d\gamma} \times \frac{\overline{OA}}{1 - \frac{\varepsilon^2}{d^2\gamma^2}}}$$

$$\text{C.3.4. } \text{Si } \frac{\varepsilon}{d|\gamma|} < 0,1 \quad \overline{A_1A_2} \approx \frac{2\varepsilon\overline{OA}}{d\gamma}$$

$$\text{pour un objet éloigné } \overline{OA} \approx \overline{FA} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{f'}{\overline{OA}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{A_1A_2} \approx \frac{2\varepsilon\overline{OA}^2}{df'}}$$

C.3.5. *Application Numérique* : pour  $N = 2$  la formule approchée suffit :  $\overline{A_1A_2} = 1,2 \text{ m}$  ; par contre, pour  $N = 11$ , il faut utiliser l'expression complète :  $\overline{A_1A_2} = 11,6 \text{ m}$

Pour un portrait, on peut utiliser une faible profondeur de champ et une grande ouverture.

Pour un paysage, au contraire, il faut une grande profondeur de champ et une petite ouverture.

C.3.6.  $\overline{A_1A_2}$  augmente avec  $\varepsilon$ , avec l'éloignement de l'objet ( $\overline{OA}$ ) et avec le nombre d'ouverture ; la profondeur de champ diminue quand la distance focale augmente. Là encore il y a nécessité d'un compromis entre les différents paramètres.

## D. MICROCALORIMÉTRIE

D.1. La quantité de chaleur  $dQ$ , dégagée entre les instants  $t$  et  $t+dt$  par le phénomène à étudier, a permis pour une part d'augmenter la température de la cellule de  $dT$  et pour une autre part a alimenté les fuites thermiques.

$$\boxed{dQ = \mu dT + k_2(T - T_s) dt}$$

$$\text{D.2. } E = k_1(T - T_s) \quad dE = k_1 dT$$

$$dQ = \mu dT + k_2 (T - T_s) = \boxed{\frac{\mu}{k_1} dE + \frac{k_2}{k_1} E dt}$$

D.3. L'intégration de l'équation précédente donne :  $Q = \frac{\mu}{k_1} (E_2 - E_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{k_2}{k_1} E dt = \boxed{\frac{\mu}{k_1} (E_2 - E_1) + \frac{k_2}{k_1} \mathcal{A}}$

D.4.

D.4.1. Le système étudié est le bloc d'aluminium ; il reçoit de la chaleur entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , donc  $Q_0 < 0$ .

$$Q_0 = \frac{\mu}{k_1} (E_2 - E_1) + \frac{k_2}{k_1} \mathcal{A}_0 \quad \text{mais } E_2 = E_1 = 0$$

$$\boxed{\text{d'où } Q_0 = \frac{k_2}{k_1} \mathcal{A}_0}$$

$$Q_0 = -m \int_{T_1}^{T_s} C_p dT = \boxed{-2,16 \text{ J.}}$$

D.4.2.  $Q_1 = \frac{k_2}{k_1} \mathcal{A}_1$ , car on a encore  $E_2 = E_1 = 0$   $\frac{k_2}{k_1}$  est positif,  $Q_1$  et  $\mathcal{A}_1$  sont de même signe

$$\boxed{Q_1 \text{ est positif}} \quad Q_1 = Q_0 \frac{\mathcal{A}_1}{0} = \boxed{4,36 \text{ J.}}$$

Ces expériences, réalisées dans les laboratoires, permettent de mesurer des quantités de chaleur très faibles, d'où le nom donné à la méthode : microcalorimétrie.

# Agrégation

## OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve C : Problème d'Électricité, d'Électronique, d'Électrotechnique  
et d'Automatique - Session de 1990

### PARTIE I - ÉTUDE DE LA MACHINE SYNCHRONES EN RÉGIME SINUSOÏDAL À FRÉQUENCE VARIABLE

I.1.  $f = p \frac{n}{60}$        $f = 50 \text{ Hz}$        $n = 1000 \text{ tr/min}$   
                           $f = 200 \text{ Hz}$        $n = 4000 \text{ tr/min}$

I.2.

I.2.1.



I.2.2.

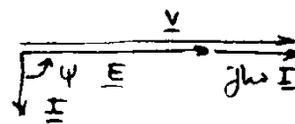
I.2.2.1.

$$P = 3VI \cos \varphi$$

$$P > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$$



$$\psi = -\frac{\pi}{2}$$



$$\psi = +\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2}$$

I.2.2.2.  $P_a = 3VI \cos \varphi = P_c$  car pas de pertes au stator

$$P_c = 3VI \cos \varphi = 3EI \cos \psi \left[ \begin{array}{l} \text{diagramme} = \Delta \\ V \cos \varphi = E \cos \psi \end{array} \right]$$

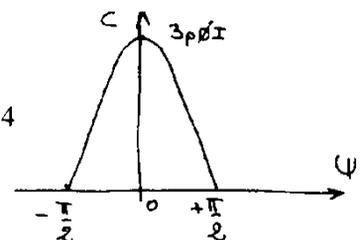
$$= C \Omega_s$$

$$C = \frac{3EI \cos \psi}{\Omega_s} = 3p \frac{E}{\omega} I \cos \psi \text{ or par définition figure 4}$$

$$\frac{E}{\omega} = \emptyset \quad (E = kd \cdot 4,44 N f \emptyset_N)$$

$$C = 3p \emptyset I \cos \psi$$

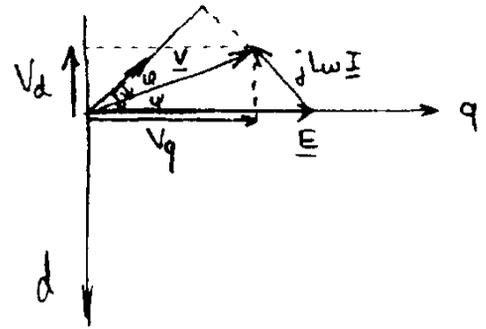
$$C_c \text{ max} = 3p \emptyset I \text{ pour } \psi = 0.$$



I.2.2.3.  $\varphi = \psi - \text{Arc tg. } \frac{V_d}{V_q}$ .

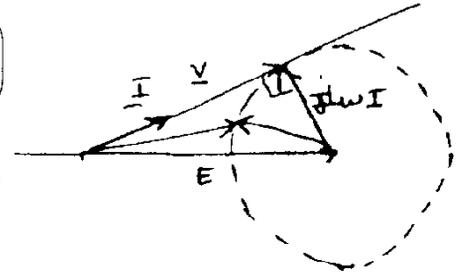
avec  $V_d = -L\omega I \cos \psi$   
 $V_q = E + L\omega I \sin \psi$ .

d'où  $\cos \varphi = \cos \left( \psi - \text{Arc tg } \frac{-L\omega I \cos \psi}{E + L\omega I \sin \psi} \right)$



et encore  $\cos \varphi = \cos \left( \psi - \text{Arc tg } \frac{-LI \cos \psi}{E + LI \sin \psi} \right)$   
 courbe indépendante de  $\Omega$  (ou  $f$ ).

$\cos \varphi = 1$  quand  $V$  est tangent au cercle de rayon  $L\omega I$ . On a alors  $\sin \psi_M = \frac{LI}{\varnothing}$ .



La courbe passe donc par les points  $\psi = \frac{\pi}{2} \cos \varphi = 0$

$\psi = -\frac{\pi}{2} \cos \varphi = 0$

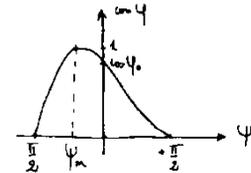
$\psi = \psi_M = -\text{Arcsin } \frac{LI}{\varnothing} \cos \varphi = 1$

$\psi = 0 \cos \varphi_0 = \varnothing \text{ Arctg } \frac{LI}{\varnothing}$

pour  $I = 500 \text{ A}$  et  $J = 175 \text{ A}$ .

$L = 0,825 \text{ mH}$ ,  $\varnothing = 0,589$  l'expression analytique donne  $\varnothing = 0,573$

$\varphi_0 = 35^\circ \quad \psi_M = -44,4^\circ \quad \cos \varphi_0 = 0,819$ .



I.2.2.4. Si on veut avoir un couple max il faut  $I_{\text{max}}$  et  $\psi = 0$  mais alors le facteur de puissance ne sera pas maximal. Si on choisit de travailler à  $\psi_M$  alors on ne disposera pas du couple max. (facteur de puissance important pour dimensionnement du convertisseur).

I.2.2.5.  $V^2 = v_d^2 + v_q^2 \Rightarrow V = \sqrt{(L\omega I \cos \psi)^2 + (E + LI\omega \sin \psi)^2}$

$V = \omega \sqrt{(LI \cos \psi)^2 + (\varnothing + LI \sin \psi)^2}$

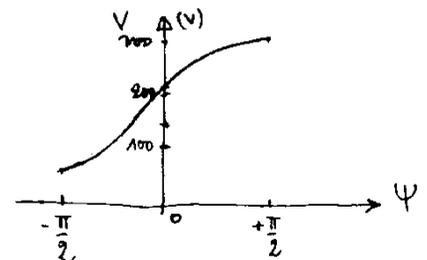
$n = 1000 \text{ tr/min} \quad f = 50 \text{ Hz} \quad \omega = 314 \text{ rd/s} \quad I = 500 \text{ A} \quad J = 175 \text{ A} \quad \varnothing = 0,589$ .

$V = 314 \sqrt{(0,4125 \cos \psi)^2 + (0,589 + 0,4125 \sin \psi)^2}$

•  $\psi = -\frac{\pi}{2} \quad V = \omega (\varnothing - LI) = 55,4 \text{ V}$

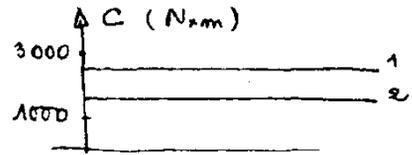
•  $\psi = +\frac{\pi}{2} \quad V = \omega (\varnothing + LI) = 314 \text{ V}$

•  $\psi = 0 \quad V^2 = \omega^2 ((LI)^2 + \varnothing^2) \quad V = 225 \text{ V}$



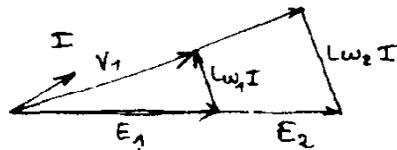
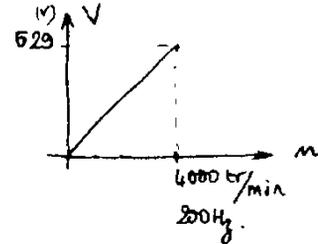
I.2.2.6.  $C = f(n)$  sont des droites paramétrées par I, J et  $\omega$ .

I)	2)
$I = 500 \text{ A}$	$I = 500 \text{ A}$
$J = 175 \text{ A}$	$J = 175 \text{ A}$
$\psi = 0$	$\psi = -44,4^\circ$



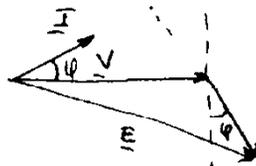
$C = 2650 \text{ N}\cdot\text{m}$      $C = 1894 \text{ N}\cdot\text{m}$

I.2.2.7.  $V = f(n)$   
 $V = \omega \sqrt{(-L \cos \psi)^2 + (\emptyset + LI \sin \psi)^2}$   
 $V = \omega \times \quad \quad \quad 0,421$



Si f double, n double E double  $L\omega I$  et V double. Les grandeurs étant proportionnelles à f le diagramme reste homothétique à lui-même.

I.2.3.



I.2.3.1.  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$ .

I.2.3.2.  $C = \frac{Pe}{\Omega_s} = \frac{3VI \cos \varphi}{\Omega_s}$   
 $E^2 = (V - L\omega \sin \varphi)^2 + (L\omega \cos \varphi)^2$   
 $V = L\omega \sin \varphi + \sqrt{E^2 - (L\omega \cos \varphi)^2}$   
 $C = 3 \cdot pI \cos \varphi \left[ LI \sin \varphi + \sqrt{\emptyset^2 - (LI \cos \varphi)^2} \right]$   
 C ne dépend que de I,  $\varphi$  et  $\emptyset$

I.2.3.3.  $\forall$  le type de commande, le couple est max quand  $\psi = 0$  donc pour la valeur  $\varphi_0$  correspondant à  $\psi = 0$  soit :

$\varphi_0 = \text{Arc tg } \frac{LI}{\emptyset}$ .

I.2.3.4. Ce sont toujours des droites paramétrées par I, J et  $\varphi$ , on retrouve les mêmes que précédemment.

$\varphi = 0 \quad C = 3pI \sqrt{\emptyset^2 - (LI)^2}$

I.2.4.

I.2.4.1.  $V^2 = V_d^2 + V_q^2 = (L\omega \cos \psi)^2 + (E + L\omega \sin \psi)^2$

$$V^2 = \omega^2 \left( (LI \cos \psi)^2 + (\emptyset \omega + L\omega I \sin \psi)^2 \right) \text{ et } \emptyset = KJ \text{ hypothèse de linéarité}$$

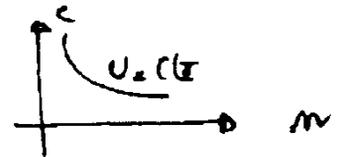
$$V^2 = \omega^2 I^2 \left( (L \cos \psi)^2 + (Kk + L \sin \psi)^2 \right)$$

I.2.4.2.  $C = 3p \emptyset I \cos \psi = 3p Kk I^2 \cos \psi \Rightarrow I^2 = \frac{C}{3p Kk \cos \psi}$   
 $V = Cte \quad k = Cte \quad \psi = C^{te}$

$$C\omega^2 = V^2 \frac{3pKk \cos \psi}{(L \cos \psi)^2 + (Kk + L \sin \psi)^2}$$

avec  $\omega = p\Omega$  et  $p = 3 \quad C\Omega^2 = V^2 \quad Kk \cos \psi$

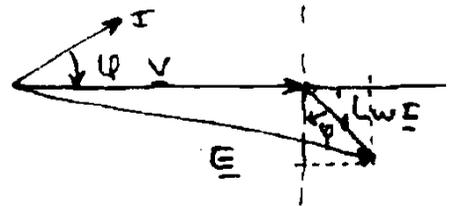
I.2.4.3. Même relation que pour un MCC à excitation série. On retrouve la caractéristique  $C = f(n)$  d'une machine à CC excitation série alimentée à tension constante.



I.2.4.4.  $L = 0,825 \text{ mH} \quad k = 0,54 \quad \psi = -30^\circ \quad K = \frac{\emptyset}{J} = \frac{E}{\omega J} = 3,98 \cdot 10^{-3} \text{ wb}, E = 250 \text{ V pour}$   
 $J = 100 \text{ A} \quad C\Omega^2 = 8,4410^7 \text{ voir figure document réponse.}$

tr/min	n	4000	3000	2000	1000
N x m	C	481	855	1925	7699

I.2.4.5.  $E^2 = (V - L\omega I \sin \varphi)^2 + (L\omega I \cos \varphi)^2$   
 $V = L\omega I \sin \varphi + \sqrt{E^2 - (L\omega I \cos \varphi)^2} \text{ et}$   
 $C\Omega = 3VI \cos \varphi$   
 $V = I \omega \left( (L \sin \varphi + \sqrt{(Kk)^2 - (L \cos \varphi)^2}) \right)$



$$C\omega^2 = V^2 \frac{3p \cos \varphi}{L \sin \varphi + \sqrt{(Kk)^2 - (L \cos \varphi)^2}}$$

$$C\Omega^2 = V^2 \frac{\cos \varphi}{L \sin \varphi + \sqrt{(Kk)^2 - (L \cos \varphi)^2}} \text{ relation de même forme que précédemment.}$$

I.2.4.6.  $V = 670 \text{ V} \quad k = 0,67 \quad K = 3,98 \cdot 10^{-3} \quad \varphi = -30^\circ \quad C\Omega^2 = 1,8108 \text{ voir figure document réponse.}$

tr/min	n	4000	3000	2000	1000
N x m	C	1025	1824	4105	16420

I.2.4.8. Supposons  $I$  et  $\psi = Cte \quad C = C^{te}$  la rame accélère  $\Omega \Rightarrow V$  lorsqu'on atteint  $V = V_{max}$  il faut diminuer  $J$  si on veut pouvoir augmenter  $\Omega$  mais le couple diminue.

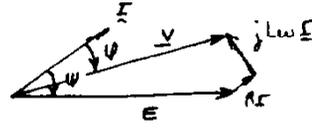
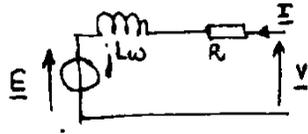
1.3.

I.3.1.

I.3.1.1. La résistance synchrone  $L\omega$  dépend de la vitesse et est d'autant plus faible que la vitesse est faible. Ce sera donc aux faibles vitesses que la résistance statorique ne peut être négligée.

$$\underline{V} = R\underline{I} + jL\omega \underline{I} + \underline{E}$$

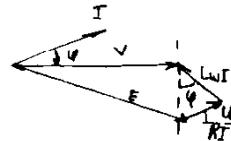
$$P_a = 3VI \cos \varphi$$



I.3.1.2. La puissance électromagnétique ayant toujours la même expression  $P_e = 3EI \cos \psi = C\Omega$  et  $E = \emptyset\omega$ .  $P_e = P_a - P_j$ . On obtient la même expression du couple en fonction de I,  $\emptyset$  et  $\psi$   $C = 3p \emptyset I \cos \psi$ . Les caractéristiques mécaniques  $C = f(n)$  sont inchangées.

I.3.1.3.  $P_e = 3VI \cos \varphi - 3RI^2$

$$C = \frac{3VI \cos \varphi}{\Omega} - \frac{3RI^2}{\Omega}$$



$$E^2 = (V - L\omega I \sin \varphi - RI \cos \varphi)^2 + (L\omega I \cos \varphi - RI \sin \varphi)^2$$

$$V = L\omega I \sin \varphi + RI \cos \varphi + \sqrt{E^2 - (L\omega I \cos \varphi - RI \sin \varphi)^2}$$

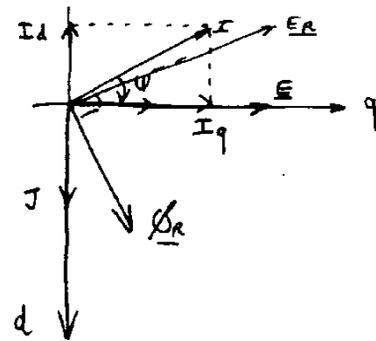
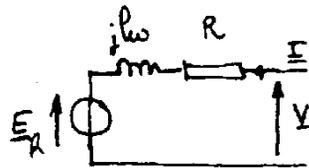
$$C = 3p I^2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{3p I^2 R \cos^2 \varphi}{\omega} + 3p I \cos \varphi \sqrt{\emptyset^2 - \left( LI \cos \varphi - \frac{RI}{\omega} \sin \varphi \right)^2} - \frac{3RI}{\Omega}$$

$I = 500 \text{ A} \quad J = 175 \text{ A}$

$\varphi = 0$  la courbe n'est pas modifiée  $C = 1894 \text{ N} \times \text{m} \quad \varphi = -30^\circ$

tr/min	n	4000	3000	2000	1000	500	100
rd/s	$\Omega$	418,87	314	209,3	104,7	52,35	10,47
N × m	C	2685	2684,6	2684,5	2684	2682	2645

I.3.2.



I.3.2.1.  $I_d = I \sin \psi$   
 $I_q = I \cos \psi$

I.3.2.2.

$$3 E_R I^*$$

$$E_R = j \omega \emptyset_R$$

$\emptyset$  flux créé par J

$$\emptyset_R = \emptyset_d + j \emptyset_q$$

$$\emptyset_d = \emptyset + L_d I_d$$

$$\emptyset_q = L_q I_q$$

$$E_R = j \omega \emptyset_d - \omega \emptyset_q \Rightarrow P_e = \Re \left( 3 (j\omega \emptyset_d - \omega \emptyset_q) (I_d - j I_q) \right)$$

$$I.3.2.3. \quad P_e = 3\omega (\emptyset_d I_q - \emptyset_q I_d) \quad C = 3p (\emptyset_d I_q - \emptyset_q I_d)$$

$$P_e = 3\omega \left( (\emptyset + L_d I \sin \psi) I \cos \psi - L_q I^2 \cos \psi \cos \psi \right)$$

$$P_e = 3\omega \left( \emptyset I \cos \psi + (L_d - L_q) I^2 \sin \psi \cos \psi \right)$$

$$P_e = 3\omega \left( \emptyset I \cos \psi + \left( \frac{L_d - L_q}{2} \right) I^2 \sin 2\psi \right)$$

$$I.3.2.4. \quad C = \frac{P_e}{\Omega} = 3p \left( \emptyset I \cos \psi + \left( \frac{L_d - L_q}{2} \right) I^2 \sin 2\psi \right) = C$$

$$C = 3p \left( KJI \cos \psi + \left( \frac{L_d - L_q}{2} \right) I^2 \sin 2\psi \right) \quad KJ = \emptyset.$$

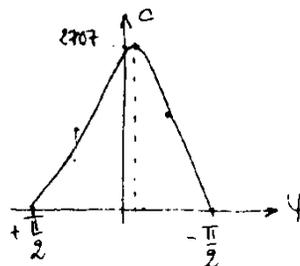
I.3.2.5.      couple «synchron»      couple reluctant  
                  machine sans saillance

$$I.3.2.6. \quad I = 500 \text{ A} \quad J = 175 \text{ A} \quad L_d = 0,950 \cdot 10^{-3} \text{ H} \quad L_q = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ H} \quad \emptyset = 0,589.$$

$$C = 2650 + 281,25 \sin 2\psi.$$

$$\frac{dC}{d\psi} = 0 \quad \text{pour} \quad \psi = 11,3^\circ \quad \hat{C} = 2707 \text{ N}\times\text{m}$$

$\psi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	11,3	$+\frac{\pi}{4}$	$+\frac{\pi}{2}$
C (N×m)	0	1592		2707	1873,8	0



$$I.3.2.7. \quad R \approx 0 \quad I\omega \approx E_R \equiv V \quad V_d = -\omega \emptyset_q = -\omega L_q I \cos \psi.$$

$$V_q = \omega \emptyset_d = \omega \emptyset + L_d \omega I \sin \psi.$$

$$\varphi = \psi - \text{Arctg} \frac{V_D}{V_Q} \quad \cos \varphi = \cos \left( \psi - \text{Arctg} \frac{V_D}{V_Q} \right)$$

$$\frac{V_D}{V_Q} = \frac{-0,35 \cos \psi}{0,589 + 0,475 \sin \psi}$$

$\psi^\circ$	$-90^\circ$	$-70$	$-45$	$-25$	0	$+20$	$+45$	$+70$	$+90^\circ$
$\varphi^\circ$	$-90^\circ$	$-29,9$	$-0,6$	$17,6$	$30,7$	$43,6$	$59,9$	$76,6$	$90^\circ$
$\cos \varphi$	0	0,86	0,999	0,95	0,86	0,72	0,5	0,23	0

I.3.3.

I.3.3.1. L'expression de la puissance électromagnétique  $P_e = 3\omega (\emptyset_d I_q - \emptyset_q I_d)$  et du couple  $C = 3p (\emptyset_d I_q - \emptyset_q I_d)$  restent inchangées mais il n'y a plus linéarité entre courants et flux il faut séparer les ampères-tours sur les axes longitudinal et transversal et en déduire les flux.

I.3.3.2. Sur l'axe q on a  $I_q$  et sur l'axe d on a  $I_{ed} = J + \alpha I d = J + \alpha I \sin \psi$ .

I.3.3.3. Pas de saturation sur q  $\Phi_q = L_q I_q = L_q I \cos \psi$  et sur d on utilise l'expression analytique du flux sur l'axe longitudinal donnée avec la caractéristique à vide.  
 $\Phi_D = a + b I_{ed} + c I_{ed}^2 + d I_{ed}^3 + e I_{ed}^4$ .

I.3.3.4. La démarche est la même que précédemment, on calcule  $\Phi_d, \Phi_q, I_d, I_q$  connaissant  $I, J \psi$  puis le couple.

I.3.3.5.  $I = 500 \text{ A}$

$J = 175 \text{ A}$        $C_e = 3p \left( \Phi_d I \cos \psi - L_q I^2 \cos \psi \sin \psi \right)$

soit

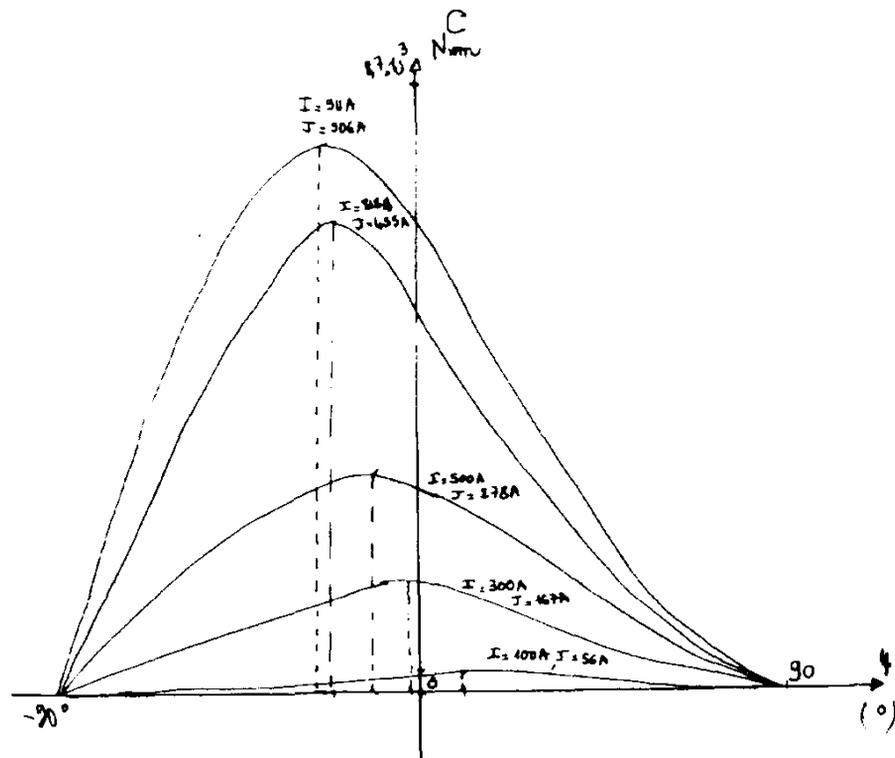
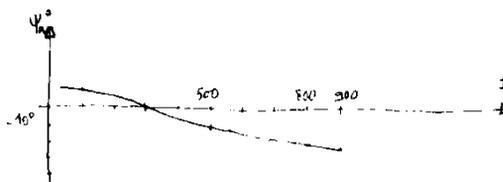
$(k = 0,35)$        $C_e = 3p \left( \Phi_d I \cos \psi - \frac{L_q I^2}{2} \sin 2\psi \right)$        $A = L_q \frac{I^2}{2}$

$I = 500 \text{ A}$	$I = 818 \text{ A}$	$I = 911 \text{ A}$	$I = 911 \text{ A}$
$J = 278 \text{ A}$	$J = 455 \text{ A}$	$J = 556 \text{ A}$	$J = 506 \text{ A}$

soit

$k = 0,556$	$k = 0,556$	$k = 0,61$	$k = 0,556$
-------------	-------------	------------	-------------

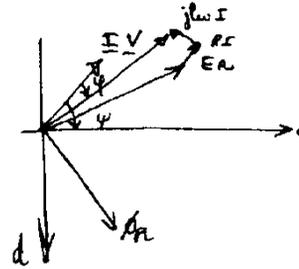
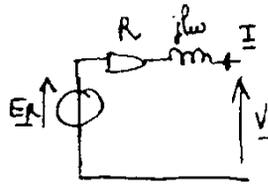
Voir courbes.



I.3.3.6.

Allure des caractéristiques  $C = f(\psi)$  pour différentes valeurs de  $I$  et  $J$ .

1.3.3.7.



$$I_q = I \cos \psi$$

$$I_d = I \sin \psi$$

$$V_d = E_{Rd} + R I_d + \omega L I_q = -\omega L_q I \cos \psi + R I \sin \psi + \omega I \cos \psi$$

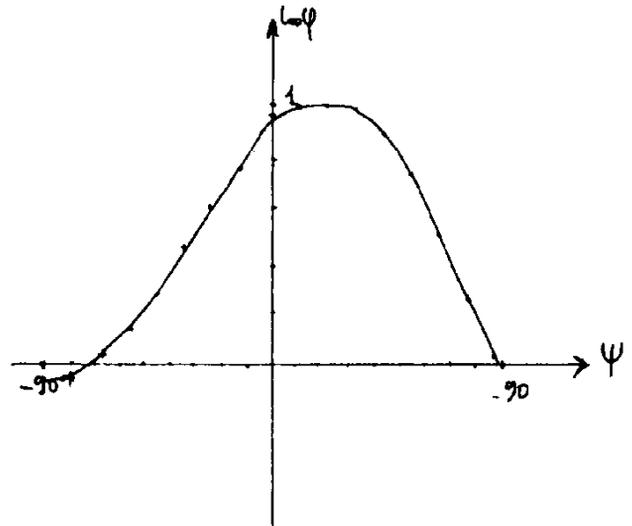
$$V_Q = E_{Rq} R I_q + \omega L I_d = \omega \emptyset + R I \cos \psi + \omega I \sin \psi$$

$$V = \sqrt{V_D^2 + V_Q^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \psi - \text{Arctg} \frac{V_D}{V_Q}$$

$\emptyset_D$  est défini au paragraphe précédent avec  $I_{ed} = J + \alpha \sin \psi$ .

1.3.3.8.  $\varphi = \psi - \text{Arctg} \frac{V_D}{V_Q}$

$\Psi(0)$	$\frac{V_p}{V_q}$	$\varphi$	$\text{Cos } \varphi$
-94	0	-94°	-0,069
-90,7	-0,06	-94	-0,07
-79,4	-0,24	92,8	-0,05
-68	-0,38	-88,8	0,02
-56,7	-0,486	-82,6	0,128
-45,4	-0,54	-73,7	0,279
-34	-0,57	-63,6	0,44
-22,6	-0,578	-52,6	0,6
-11,3	-0,567	-40,8	0,756
0	-0,543	-28,5	0,879
11,3	-0,526	-16,5	0,959
22,6	-0,45	-1,62	0,999
34	-0,388	12,7	0,975
45,4	-0,315	27,9	0,88
56,7	-0,24	43,2	0,725
68	-0,15	59,46	0,508
79,4	-0,06	76	0,24
86,7	-20	86,7	0,05



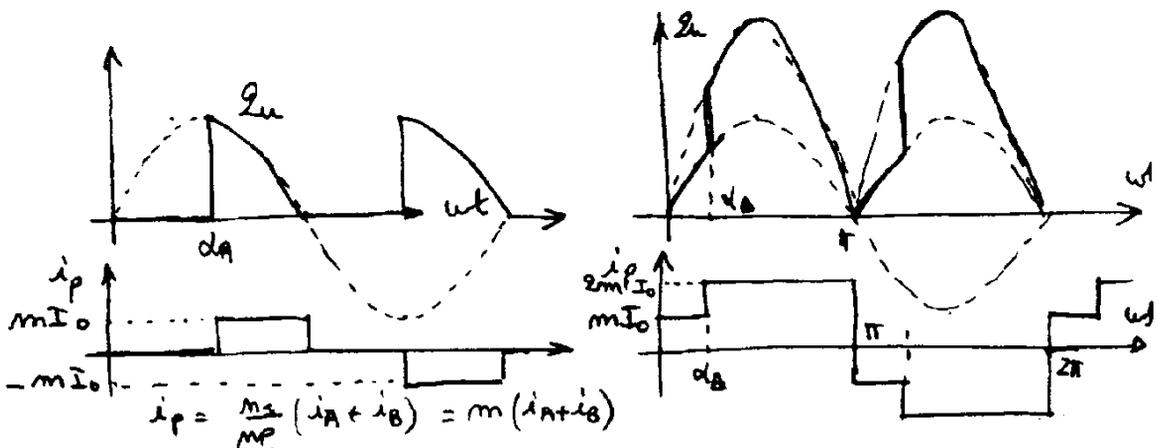
PARTIE 2 - L'ÉTUDE DU CONVERTISSEUR

II.1.

II.1.5. – Le pont P<sub>B</sub> ne pourrait laisser passer I<sub>0</sub> pour  $\alpha_B = \pi \left( P < \frac{P_M}{2} \right)$

– Lorsque les phases de roue libre sont longues c'est-à-dire, lorsque  $\bar{U}$  est faible avec un grand courant (démarrage) ce sont les diodes qui doivent être dimensionnées en conséquence et non les thyristors  $\Rightarrow$  économie.

– On ne peut pas perdre le contrôle de ce type de pont même à  $\alpha$  faible et fort débit inductif lorsqu'on augmente brusquement  $\alpha$ , ce qui n'est pas le cas des ponts mixtes dont les thyristors sont à cathodes communes.



II.1.1. n<sub>s</sub> pour 1 seul secondaire.

$$i_p = \frac{n_s}{n_p} (i_A + i_B) = m (i_A + i_B)$$

II.1.2.  $0 < 2\bar{u} < \frac{2 \times 2V \sqrt{2}}{\pi}$      $0 < 2\bar{u} < 3240 \text{ V}$

$\Rightarrow 0 < U_0 < 1620 \text{ V}$     si  $I_0 \approx 0$

$0 < U_0 < 1620 - 0,075 \times 1200$

$0 < U_0 < 1530 \text{ V}$     si  $I_0 = 1200 \text{ A}$

II.1.3. De 0 à  $\frac{P_M}{2}$  il n'y a que le pont A qui a  $\alpha$  réglable.

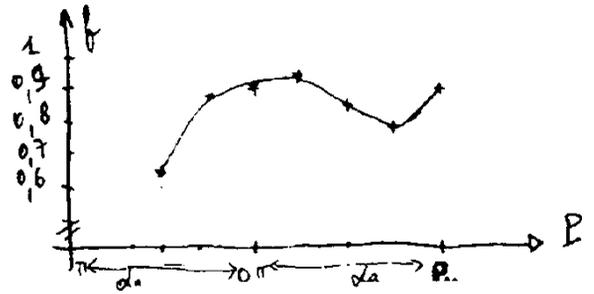
$I_{peff} = m I_0 \sqrt{\frac{\pi - \alpha_A}{\pi}}$  et  $\bar{U} = \frac{V\sqrt{2}}{\pi} (1 + \cos \alpha)$      $\underline{P} = \frac{V I_0 \sqrt{2}}{\pi} (1 + \cos \alpha)$

et  $f = \frac{\sqrt{2} (1 + \cos \alpha_A)}{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi + \alpha_A}}$

$\alpha_a$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
f	0,9	0,887	0,637	0,26	

de  $\frac{P_M}{2}$  à  $P_M$   $I_{peff} = \frac{m I_0}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\alpha_B + 4(\pi - \alpha_B)}$   $\bar{U} = \frac{V\sqrt{2}}{\pi} [3 + \cos \alpha]$   
 $f = \frac{\sqrt{2} (3 + \cos \alpha_B)}{\sqrt{\pi} \sqrt{4\pi - 3 \alpha_B}}$

$\alpha_B$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
f	0,9	0,926	0,85	0,78	0,9



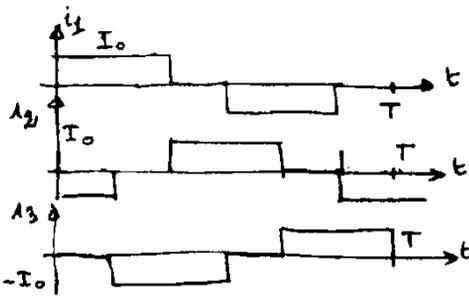
II.1.4. Pour un pont seul contrôlant la même puissance

$$f = \frac{P}{S} + \frac{2 V \sqrt{2} (1 + \cos \alpha) I_0}{\pi \frac{V}{m} 2m I_0 \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\sqrt{\pi}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{(1 + \cos \alpha)}{\sqrt{1 - \alpha}}$$



On retrouve le résultat de la première étude : normal.  
 L'association de ces deux ponts a nettement amélioré le facteur de puissance.

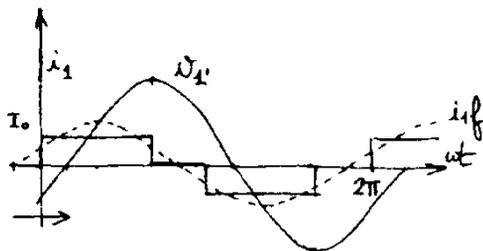
II.2.



II.2.1. ordre d'amorçage 1 6 2 4 3 5 1.

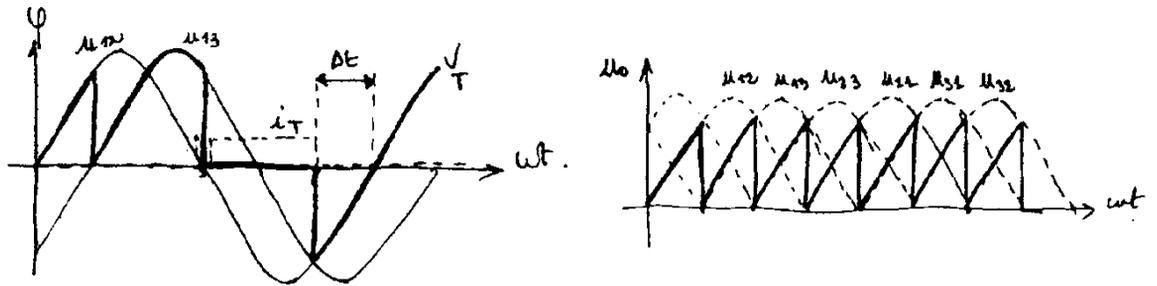
II.2.2.  $I_{eff} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_0 = 0,816 \times I_0$   
 $I_{ref} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_0 = 0,78 I_0$

II.2.3. Graphes non à l'échelle.



$T_5$  ON  $v_T = u_{12}$   
 $T_6$  ON  $v_T = u_{13}$

$i_T =$  partie  $< 0$  de  $i_1$



$u_0$  se construit intervalle par intervalle.

II.2.4.  $\bar{U}_0 = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V \cos \varphi$      $\bar{U}_0 = 2,34 V$      $U_0 = 1620 V$      $V = 693 V$   
 $U_0 = 1530 V$      $V = 654 V$

II.2.5.  $I_{T \text{ eff}}$     courant lissé  $I_0 = 1200 A \text{ max.}$   
 $I_{T \text{ moy}}$

$V_{T \text{ INV max}} \quad \sqrt{6} V_{\text{max}} = 1697 V$

II.2.6. • Amorçage des thyristors : tension positive au moment de l'amorçage des thyristors. (voir  $V_T$ )  $\Rightarrow \varphi < 0$   $i_{Tb}$  avance par rapport à  $v_1$ .

• Extinction des thyristors : pour qu'un thyristor se bloque il faut qu'après  $i_T = 0$ ,  $V_T$  reste  $< 0$  pendant un temps  $\Delta t \geq t_q$ .

nécessité  $\varphi < 0 \Rightarrow i_{Tf}$  avance par rapport à  $v_1$  et angle de garde dans le cas où les sources sont parfaites uniquement lié au temps de désamorçage des thyristors (pas d'empiètement).

Il faut d'autre part que ces tensions aient une amplitude non nulle pour permettre l'extinction des thyristors.

On prévoit donc un fonctionnement  $\neq$  au démarrage de la MS lorsque les tensions sont  $\approx 0$ .

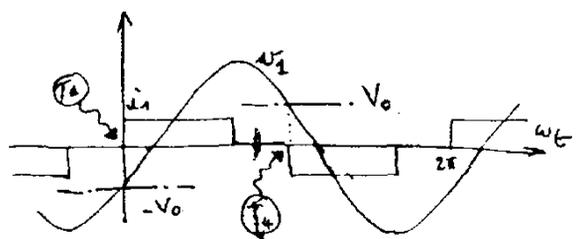
• Réversibilité

Si  $|\varphi| > \frac{\pi}{2}$   $\bar{U}_0 < 0 \Rightarrow$  MS fonctionne en génératrice et le commutateur en redresseur.

$|\varphi| < \frac{\pi}{2}$   $\bar{U}_0 > 0 \Rightarrow$  MS fonctionne en moteur et le convertisseur en commutateur ou onduleur assisté.

• Aucune influence sur la réversibilité car on fait une commande en angle, mais pour l'extinction des thyristors c'est  $\Delta t = \frac{\varphi}{\omega}$  qui importe. Si  $\varphi = \text{Cte}$  et que la fréquence varie, on risque ne plus respecter  $\Delta t > t_q$ .

II.2.7. Les amorçages de  $T_1$  et  $T_4$  sont déterminés grâce à l'intersection de  $v_1$  avec  $v_0$  et  $-v_0$ .



II.2.8.  $P_0 = \bar{U}_0 I_0 = \frac{3\sqrt{6} V}{\pi} \cos \varphi \times I_0$      $P_s = 3V I_{rf} \cos \varphi = \frac{3\sqrt{6} V}{\pi} I_0 \cos \varphi.$

$\eta = 1$  rendement théorique = 1  
 convertisseur parfait.

$f = \frac{P}{S}$      $P = \frac{3 V \sqrt{6}}{\pi} I_0 \cos \varphi$      $S = 3V I_{eff} = 3 V \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} I_0$

$f = \frac{3}{\pi} \cos \varphi$

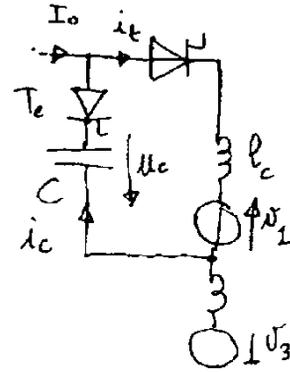
II.3.

II.3.1.

II.3.1.1.

II.3.1.2.  $v_l \approx 0$      $u_c + l_c \frac{di_l}{dt} = 0$

$i_{tl} = i_c + I_0$      $i_c = C \frac{du_c}{dt}.$



$u_c = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{l_c C}}$

$i_c = -C \omega_0 A \sin \omega_0 t + B C \omega_0 \cos \omega_0 t$

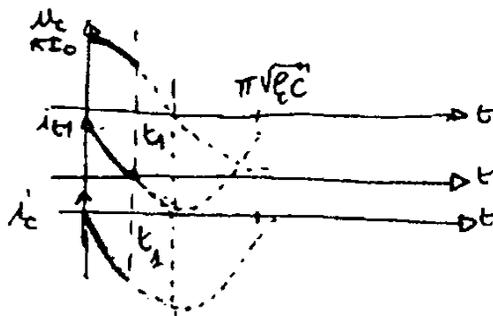
à  $t=0$      $u_{c0} = K I_0$  et  $i_l(0) = I_0 \Rightarrow i_c(0) = 0.$

$u_{c0} = K I_0 = A$      $B C \omega_0 = 0$

$\Rightarrow u_c = K I_0 \cos \omega_0 t.$

$i_c = -K I_0 \omega_0 C \sin \omega_0 t.$

$i_{tl} = I_0 - K I_0 \omega_0 C \sin \omega_0 t.$



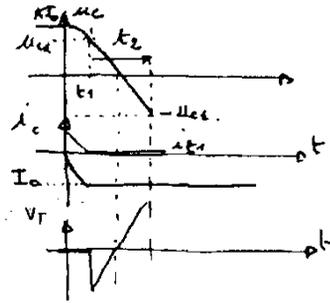
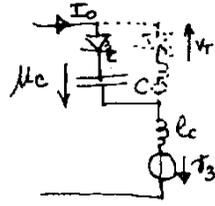
II.3.1.3. Lorsque  $t = t_1, i_{tl} = 0$      $T_1$  se désamorce.

$i_{tl} = 0 \Rightarrow I_0 = K I_0 \omega_0 C \sin \omega t_1$

$\omega_0 t_1 = \text{Arsin} \frac{1}{K C \omega_0}$      $t_1 = \sqrt{l_c C} \text{Arsin} \frac{1}{K C \omega_0}$

et  $u_{c1} = K I_0 \cos \omega_0 t_1$      $t_1 = \sqrt{l_c C} \text{Arsin} \frac{1}{K} \sqrt{\frac{l_c}{C}}$

II.3.1.4. Le condensateur se décharge à courant constant.



II.3.1.5.  $i_c = -I_0 = C \frac{du_c}{dt}$   
 $u_c = -\frac{I_0}{C} t' + u_{c1}$

II.3.1.6. Pour que la prochaine extinction se passe dans les mêmes conditions il faut que le condensateur se charge à la valeur « $u_{c0}$ » =  $-KI_0 \Rightarrow$  graphe symétrique  $\Rightarrow$

$$t_2 = \frac{2u_{c1} C}{I_0}$$

II.3.1.7. Même équation qu'au II.3.1.2.

$$u_c = A' \cos \omega_0 t + B' \sin \omega_0 t$$

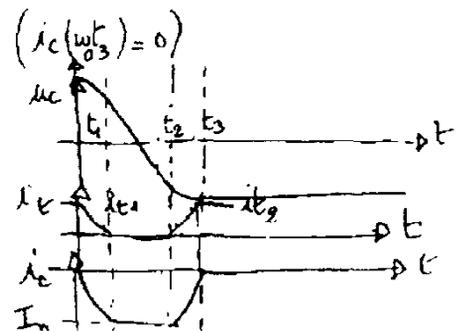
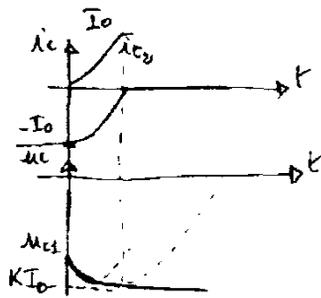
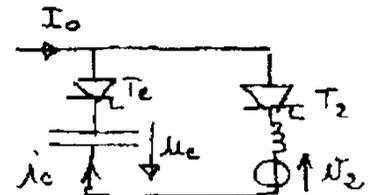
$$i_c = -C\omega_0 A' \sin \omega_0 t + C B' \omega_0 \cos \omega_0 t$$

à  $t=0$   $i_{c2} = 0 \Rightarrow i_c = I_0$  et  $u_c = -u_{c1}$ .

d'où  $u_c = -u_{c1} \cos \omega_0 t - \frac{I_0}{C\omega_0} \sin \omega_0 t$ .

d'où  $i_c = C\omega_0 u_{c1} \sin \omega_0 t - I_0 \cos \omega_0 t$

$$\omega_0 t_3 = \omega_0 t_1$$



Ensemble de la commutation

II.3.1.8.  $\omega_0 = 4783 \text{ rd/S}$  avec  $l_c = 0,186 \text{ mH}$ .

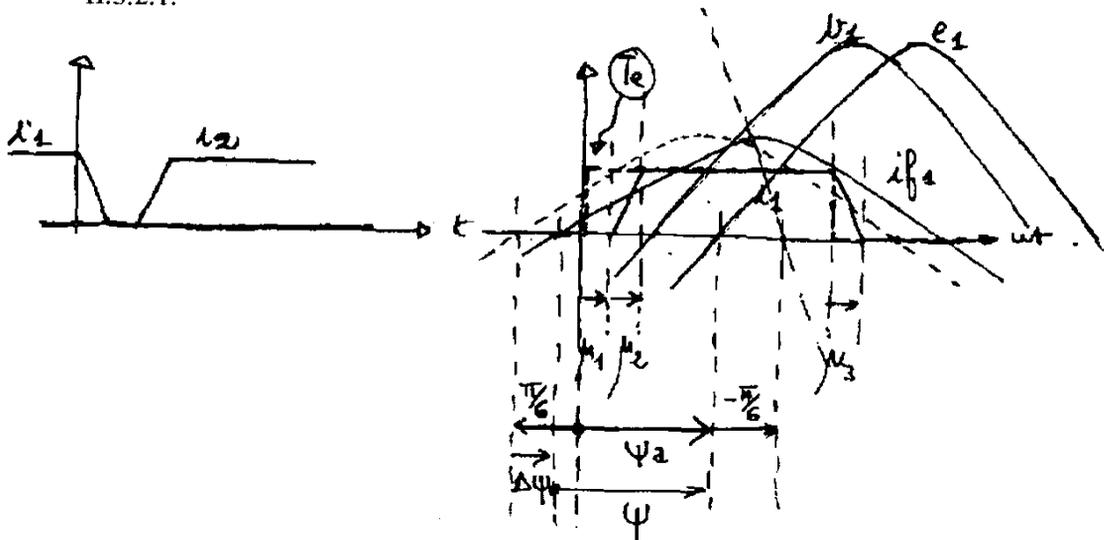
$$t_1 = 0,133 \text{ ms} \quad t_2 = 0,568 \text{ ms} \quad t_3 = t_1 = 0,133 \text{ ms} \quad \omega_0 t_1 = 36 \quad u_{c1} = 1449$$

II.3.1.9. La commutation suivante est l'amorçage de  $T_4$  et l'extinction de  $T_6$ .

Pour cela on amorce  $T'_e$   $u = -KI_0$  impose une tension  $< 0$  aux bornes de  $T_6$  puis on amorce  $T_4$ .

II.3.2.

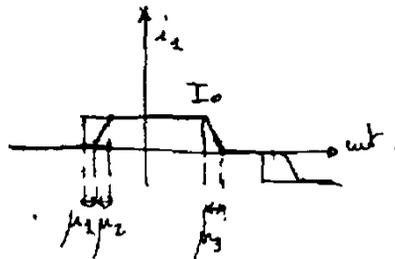
II.3.2.1.



II.3.2.2. On cherche la position du fondamental en décomposant en série de Fourier. On trouve

comme fondamental  $i_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I_0 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\mu_1}{3} - \frac{\mu_2}{3} - \frac{\mu_3}{4}\right) \sin(\omega t - \varphi)$  avec

$$\varphi = \frac{3\mu_1}{4} + \frac{\mu_2}{2} + \frac{\mu_3}{4}.$$



II.3.2.3. D'où  $|\Delta\psi| = \frac{3\mu_1}{4} + \frac{\mu_2}{4} + \frac{\mu_3}{4}$  avec  $\mu_1 = \mu_3$   $|\Delta\psi| = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{2} = \frac{\omega t_c}{2}$  avec  $t_c = t_1 + t_2 + t_3$ .

II.3.2.4.  $\psi_a = \frac{\pi}{6} + \Delta\psi + \psi$  avec  $\Delta\psi = \frac{\omega t_c}{2}$ .

II.4.1. Le caractère inductif des sources empêche les variations brutales de courant  $\exists$  donc un intervalle de temps pendant lequel deux thyristors conduisent simultanément.

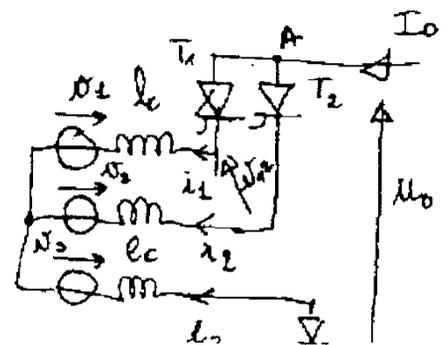
II.4.2.

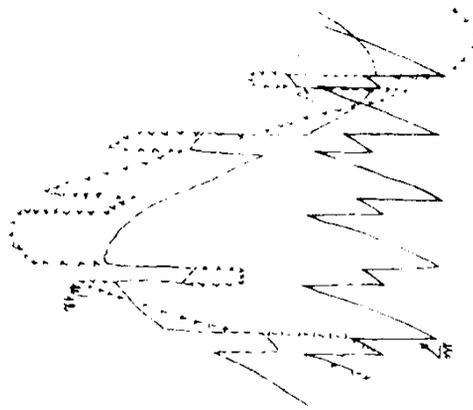
II.4.2.1.  $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = -\frac{v_3}{2}$ .

II.4.2.2.  $i_1 + i_2 = I_0 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = -\frac{di_2}{dt}$ .

$$v' = v_1 + l_c \frac{di_1}{dt} = v_2 + l_c \frac{di_2}{dt}$$

$i_3 = I_0$





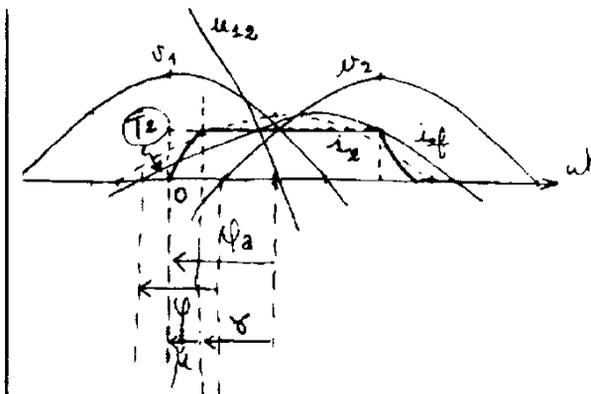
$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad u_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} - v_3 = -\frac{3}{2} v_3$$

II.4.2.3.  $u_{12} = 0$

II.4.2.4. Voir doc.

II.4.2.5.  $l_c \frac{dir}{dt} = v - v_2 = \frac{v_1 + v_2}{2} - v_2 = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{u_{12}}{2}$

prenons comme origine des temps l'amorçage de Th2 alors  $u_{12} = -\hat{U} \sin(\omega t - \varphi_a)$ .



$$2 l_c \frac{dir}{dt} = -\hat{U} \sin(\omega t - \varphi_a)$$

$$i_2 = \frac{\hat{U}}{2 l_c \omega} \cos(\omega t - \varphi_a) + K. \quad K = -\frac{\hat{U}}{2 l_c \omega} \cos(-\varphi_a).$$

II.4.2.6. (Vérifier orientation angles.)

$$i_2 = \frac{\hat{U}}{2 l_c \omega} (\cos(\omega t - \varphi_a) - \cos(-\varphi_a)) \quad \hat{U} = V\sqrt{6}$$

II.4.3.

II.4.3.1. A  $\omega t = \mu \quad i_2 = I_0 \quad I_0 = \frac{\hat{U}}{2 l_c \omega} (\cos(\mu - \varphi_a) - \cos \varphi_a)$

$$\cos(\mu - \varphi_a) - \cos \varphi_a = \frac{2 l_c \omega I_0}{\sqrt{6} V} = \frac{2}{\sqrt{6}} x'' \quad x'' = \frac{l_c \omega I_0}{V}$$

$$\cos(\mu - \varphi_a) - \cos \varphi_a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} x'' \quad \sqrt{\frac{2}{3}} x'' = 0.816 x''.$$

II.4.3.2.  $\gamma$  est l'angle de garde permettant l'extinction des thyristors ; il dépend du tq qui peut lui-même dépendre d'autres grandeurs (courant commuté) et de la fréquence des grandeurs c'est-à-dire de la vitesse de rotation de la machine.

II.4.3.3. 
$$\varphi_a = -\frac{\pi}{6} + \varphi + \frac{\mu}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$\varphi_a = \varphi + \frac{\mu}{2} \quad \varphi_a = +(\mu + \gamma) \quad \mu \text{ et } \gamma < 0.$$

$$\cos(\mu - \varphi_a) - \cos(\varphi_a) = \frac{2 I_c \omega I_0}{\sqrt{6} V}$$

$$\cos\left(\frac{\mu}{2} - \varphi\right) - \cos\left(\varphi + \frac{\mu}{2}\right) = \frac{2 I_c \omega I_0}{\sqrt{6} V} \quad \sin \varphi \sin \frac{\mu}{2} = \frac{I_c \omega I_0}{\sqrt{6} V}$$

$$\sin \frac{\mu}{2} = \frac{I_c \omega I}{\sqrt{6} V \sin \varphi}$$

II.4.3.4.  $V = 513 \text{ V} \quad I_0 = 950 \text{ A} \quad \varphi = -42^\circ \quad \omega = 838 \text{ rd/S} \quad tq = 150 \mu\text{s}.$

$$\mu = -20,2^\circ \quad \varphi_a = \varphi + \frac{\mu}{2} = -52^\circ$$

$$\gamma = \varphi_a - \mu = -32^\circ \quad \Delta t = \frac{\gamma}{\omega} = 666 \mu\text{s} \quad (\text{temps pendant lequel } V_T < 0)$$

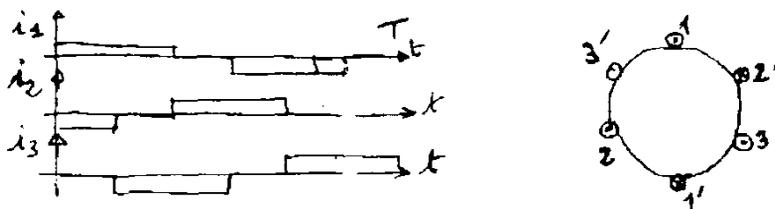
$\Delta t > tq \Rightarrow$  fonctionnement correct.

TROISIÈME PARTIE - L'ÉTUDE DE LA MACHINE SYNCHROME ASSOCIÉE AU CONVERTISSEUR

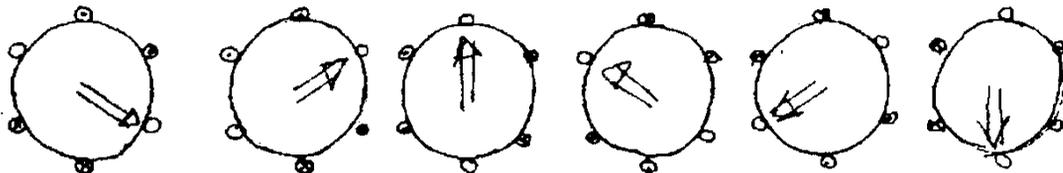
III.1.

III.1.1.

III.1.1.1. Avec les conventions



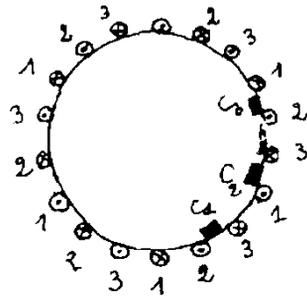
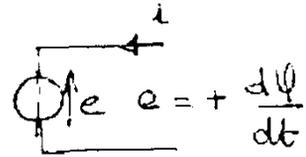
Les positions successives du champ tournant créé par  $i_1, i_2, i_3$  sont au nombre de 6.



A chaque commutation, le champ fait un saut d'un angle  $\theta_c = \frac{\pi}{3}$ .

III.1.1.2.  $\theta_m = \frac{\theta_c}{p} \quad \theta_m = \frac{\pi}{9} = 20^\circ$

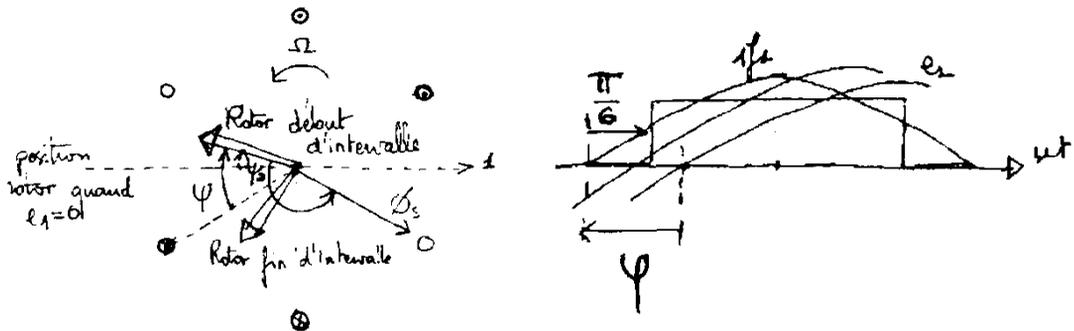
III.1.1.3. Avec la convention la f.é.m. est nulle quand le flux est max < 0.



$C_1, C_2, C_3$  sont séparés d'un angle de  $40^\circ$ .

III.1.1.4.

III.1.1.4.1. Angle entre position flux stator et flux rotor.



III.1.1.4.2.  $\theta = -\omega t - \psi + \frac{2\pi}{3}$

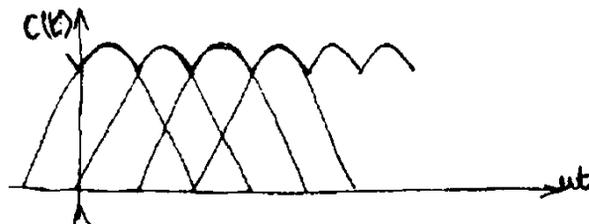
III.1.1.4.3.  $C(t) = K \Phi_R \Phi_S \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \psi - \omega t\right)$ .

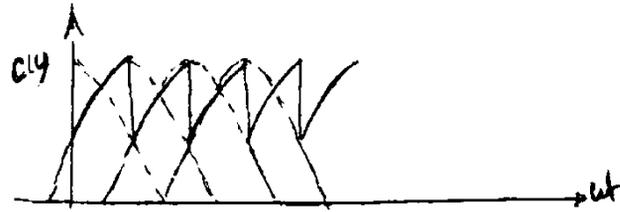
$\Phi_R = KJ$  hypothèse linéaire.

$\Phi_S = kI_0$

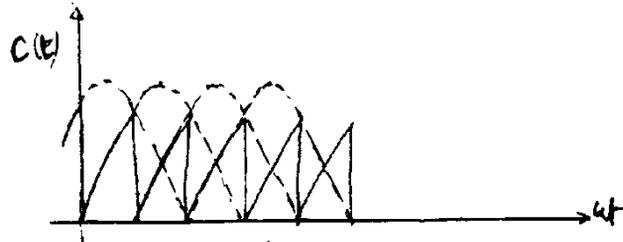
ou  $C(t) = K \Phi_R \Phi_S \cos\left(\frac{\pi}{6} - \psi - \omega t\right)$ .

III.1.1.4.4.  $\psi = 0 \quad C(t) = K \Phi_S \Phi_R \cos\left(\frac{\pi}{6} - \omega t\right)$  de 0 à  $\frac{\pi}{3}$  par translation dans les autres intervalles.





$$\psi = -\frac{\pi}{6} \quad C(t) = K \varnothing_S \varnothing_R \cos\left(\frac{\pi}{3} - \omega t\right)$$



$$\psi = -\frac{\pi}{3} \quad C(t) = K \varnothing_S \varnothing_R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)$$

Ondulation minimale pour  $\psi = 0$       Pulsation fond =  $6 \omega$

III.1.1.4.5.

III.1.1.4.5.1. La valeur moyenne de  $C(t)$  est

$$\bar{C}(t) = C = \frac{K \varnothing_R \varnothing_S \times 3}{\pi} \cos \psi = \frac{A \varnothing I_0 3}{\pi} \cos \psi.$$

Or on a trouvé  $C = 3p \varnothing I \cos \psi$  d'où  $A = p \sqrt{6} = 3 \sqrt{6}$

$$= 3p \varnothing \frac{I_0 \sqrt{6}}{\pi} \cos \psi.$$

III.1.1.4.5.2.  $C(t) = K \frac{\varnothing_R \varnothing_S}{\pi} 3 \cos \psi \left[ 1 + \sum C_k \cos(\omega t - 6 k \omega t) \right]$   
translation du 0

$$C_k = \frac{2}{36 k^2 - 1} \sqrt{1 + k^2 36 \operatorname{tg}^2 \psi}$$

$$C_1 = \frac{2}{36 - 1} \sqrt{1 + 36 \operatorname{tg}^2 \psi} = 0,206 \quad 20 \%$$

III.1.1.4.5.3.	fr = 12 MHz	6 f = 12 Hz	f = 2 Hz	v = 3 km/h
		12 f = 12 Hz	f = 1 Hz	v = 1,5 km/h
		18 f = 12 Hz	f = $\frac{2}{3}$ Hz	v =

III.1.2.

III.1.2.1.  $i_d = \frac{2}{3} \left[ I_0 \left[ \cos(\Theta) - I_0 \cos\left(\Theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \right]$

$$\Theta = \psi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \omega t.$$

$$i_q = \frac{2}{3} \left[ I_0 \sin[\Theta] - I_0 \sin\left(\Theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$= \psi - \frac{5\pi}{6} + \omega t.$$

$$i_d = \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \psi + \omega t\right)$$

$$i_q = -\frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \psi + \omega t\right)$$

III.1.2.2.  $I_d = \bar{i}_d = \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \psi + \omega t\right) dt = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin \psi = I_d$

$$I_q = \bar{i}_q = \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \psi + \omega t\right) dt = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \psi = I_q$$

III.1.2.3.  $\varphi_d(t) = \emptyset + Ld id(t) + \varphi_{ad}(t)$   
 $\varphi_q(t) = Lq iq(t) + \varphi_{aq}(t).$

$\varphi_{ad}(t)$  et  $\varphi_{aq}(t)$  sont les composantes transversale et longitudinale de flux créé par les amortisseurs de Leblanc.

III.1.2.4. Si les amortisseurs de Leblanc sont parfaitement efficaces le flux  $\varphi_a$ , compense exactement les variations de flux dues à la progression par saut du champ statorique. On peut alors dire que les flux  $\varphi_d$  et  $\varphi_q$  sont constants et égaux à leurs valeurs moyennes.

$$\varphi_d(t) = \emptyset d = \sqrt{2} \emptyset + Ld Id = \sqrt{2} \emptyset + Ld \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin \psi$$

$$\varphi_q(t) = Lq I_q = Lq \times \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \psi.$$

III.1.2.5.

III.1.2.5.1.  $C(t) = \frac{3}{2} p (\emptyset_d I_q - \emptyset_q i_d).$

$$C(t) = \frac{3}{2} p \left[ \left( \sqrt{2} \emptyset + Ld \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin \psi \right) \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \psi + \omega t\right) \right. \\ \left. \left[ -Lq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \psi \times \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \cos\left(-\frac{2\pi}{3} + \psi + \omega t\right) \right] \right].$$

dans la zone linéaire  $\emptyset = KJ$ .

III.1.2.5.2.  $\bar{C} = 3p \left[ \sqrt{2} \emptyset \frac{\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \psi + \frac{6 I_0^2}{\pi^2} \left( \frac{Ld - Lq}{2} \right) \sin 2 \psi \right]$  on retrouve le résultat de l'étude en sinusoïdal avec  $I = I_0 \frac{\sqrt{6}}{\pi}$ .

III.1.2.5.3. Le couple présente une ondulation minimale lorsque  $C(0) = C\left(\frac{\pi}{3}\right).$

$$C(0) = \frac{3}{2} p \left( -\sqrt{2} \emptyset + Ld \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin \psi \right) I_0^2 \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \psi\right)$$

$$-Lq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \psi \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$C(0) = \frac{3}{2} p \left[ \left( -\sqrt{2} \emptyset - Ld \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin \psi \right) \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \sin \left( -\frac{2\pi}{3} + \psi \right) \right. \\ \left. \left[ -Lq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0^2 \cos \left( -\frac{2\pi}{3} + \psi \right) \cos \psi \right] \right].$$

$$C\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} p \left[ \left( -\sqrt{2} \emptyset - Ld \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin \psi \right) \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \sin \left( -\frac{\pi}{3} + \psi \right) \right. \\ \left. \left[ -Lq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0^2 \cos \left( -\frac{\pi}{3} + \psi \right) \cos \psi \right] \right].$$

$$C(0) = C\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow .$$

$$-\left( \emptyset + Ld \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin \psi \right) \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \sin \left( -\frac{2\pi}{3} + \psi \right) - Lq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ I_0^2 \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \psi \right) = \left( -\emptyset + Ld \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin \psi \right) \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \sin \left( -\frac{\pi}{3} + \psi \right) \\ - Lq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0^2 \cos \left( -\frac{\pi}{3} + \psi \right)$$

$$\sqrt{2} \emptyset \left[ \sin \left( -\frac{2\pi}{3} + \psi \right) - \sin \left( -\frac{\pi}{3} + \psi \right) \right] = 2 \emptyset \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} \cos \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$Ld \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin \psi \left[ \sin \left( -\frac{2\pi}{3} + \psi \right) - \sin \left( -\frac{\pi}{3} + \psi \right) \right] \\ = Ld \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \psi.$$

$$Lq \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos \psi \left[ \cos \left( -\frac{2\pi}{3} + \psi \right) - \cos \left( -\frac{\pi}{3} + \psi \right) \right] \\ = -Lq \times \frac{2\sqrt{3}}{\pi} I_0 \times 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin \left( \psi - \frac{\pi}{6} \right) \cos \psi.$$

$$\sqrt{2} \frac{\emptyset}{2} \sin \psi + Ld \frac{\sqrt{3}}{\pi} I_0 \sin^2 \psi + Lq \frac{\sqrt{3}}{\pi} I_0 \cos^2 \psi = 0 \quad \text{avec } \emptyset = KJ$$

$$\underline{Kk} \sin \psi + \sin \psi (Ld - Lq) + Lq = 0 \quad \emptyset = Kk \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_0.$$

$$\sin^2 \psi + \frac{Kk}{(Ld - Lq)} \sin \psi + \frac{Lq}{(Ld - Lq)} = 0 \quad k = 0,57$$

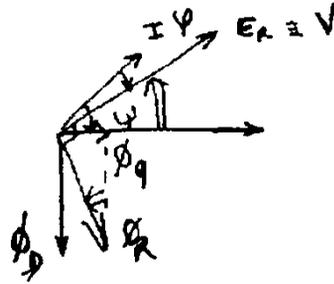
$\psi = \text{Arc sin } \dots\dots\dots$

$$k = 0,57 \quad \sin^2 \psi + 9 \sin \psi + 2,8 = 0 \quad \psi = -8^\circ$$

$$k = 0,45 \quad \sin^2 \psi + 7,164 \sin \psi + 2,8 = 0 \quad \psi = -12^\circ$$

III.1.2.6.

III.1.2.6.1. On néglige résistance et inductance de fuite statoriques d'où  $V \equiv E_R$ .



$$\psi = \varphi - \text{Arctg} \cdot \frac{\Phi_Q}{\Phi_D} \qquad \frac{\Phi_Q}{\Phi_D} = \text{tg} (\varphi - \psi).$$

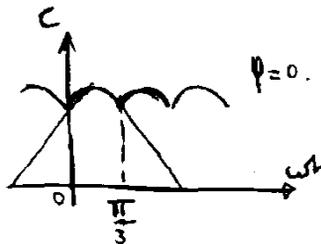
III.1.2.6.2.  $C_e(t) = \frac{3}{2} p [\Phi_D i_q - \Phi_Q i_d]. \qquad \Phi_{DQ} = \sqrt{\Phi_D^2 + \Phi_Q^2}$

$$C_e(t) = \frac{3}{2} p \sqrt{\Phi_D^2 + \Phi_Q^2} \left[ \frac{\Phi_D}{\sqrt{\Phi_D^2 + \Phi_Q^2}} i_q - \frac{\Phi_Q}{\sqrt{\Phi_D^2 + \Phi_Q^2}} i_d \right].$$

$$C_e(t) = \frac{3}{2} p \Phi_{DQ} [\cos (\varphi - \psi) i_q - \sin (\varphi - \psi) i_d].$$

$$C_e(t) = -\frac{3}{2} p \Phi_{DQ} \frac{2\sqrt{3}}{3} I_0 \sin \left( -\frac{2\pi}{3} + \varphi + \omega t \right) = p \Phi_{DQ} \sqrt{3} I_0 \cos \left( \varphi + \omega t - \frac{\pi}{6} \right).$$

III.1.2.6.3. L'ondulation est minimale pour  $\varphi = 0$  soit  $\cos \varphi = 1$ . Ceci rejoint le désir d'avoir un grand facteur de puissance.



III.1.2.7. Dans le cas de la saturation, on pourrait réutiliser les résultats précédents avec  $L_d$  et  $K$  variables avec  $I_d$  et  $J$ .

III.2.

III.2.1. Couple et fort couple.

III.2.2. Machine synchrone limite  $P_{max}$ ,  $I_{max}$ ,  $V_{max}$ ,  $J_{max}$ .

Convertisseur  $V_{max}$   $I_{max}$  et fonctionnement assurant blocage th  $\Delta t > t_q$ .

Échauffement stator I Échauffement rotor J.

III.2.3.

III.2.3.1. I pas trop grand donc régler la commande J pour être dans les conditions de couple max.

III.2.3.2. Ondulation de couple min.

III.2.3.3.  $\cos \varphi = 1$  pour la MS.

Ces critères ne sont pas toujours compatibles.

III.2.4.

III.2.4.1. I, J,  $\psi$  en CA I, J,  $\varphi$  en CN.

III.2.4.2. En CA on peut travailler à  $\varphi = 0$ .

En CN il faut assurer  $\gamma \gg \frac{tq}{10}$ , il faudra donc augmenter l'angle  $\psi$  jusqu'à ce que la commutation naturelle soit possible c'est-à-dire retarder les tensions par rapport au courant. Si on augmente  $\psi$  alors qu'on était réglé à  $C_{max}$ , il y a une chute de couple.

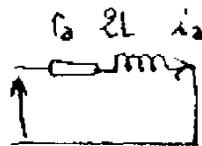
III.3.

III.3.1.	v km/h	V (v)	cos $\varphi$	C Nxm
	20	81	0,962	6570
	40	153	0,97	6640
	60	212	0,99	6650
	80	235	0,86	5981

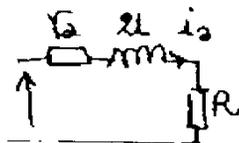
III.3.2.	v km/h	$\mu$	$\gamma$	$\varphi$	$\psi$	C Nxm
	150	-18°	-38,2	-47,2	-1,18	3994
	200	-16°	-36,2	-44,2	-1,11	3587
	250	-4,9°	-31,8	-34	-0,94	3175
	300	-17,6°	-13,3	-22,2	0,7	2500

#### QUATRIÈME PARTIE - L'ÉTUDE DE L'ENSEMBLE MODIFIÉ UTILISÉ AU FREINAGE

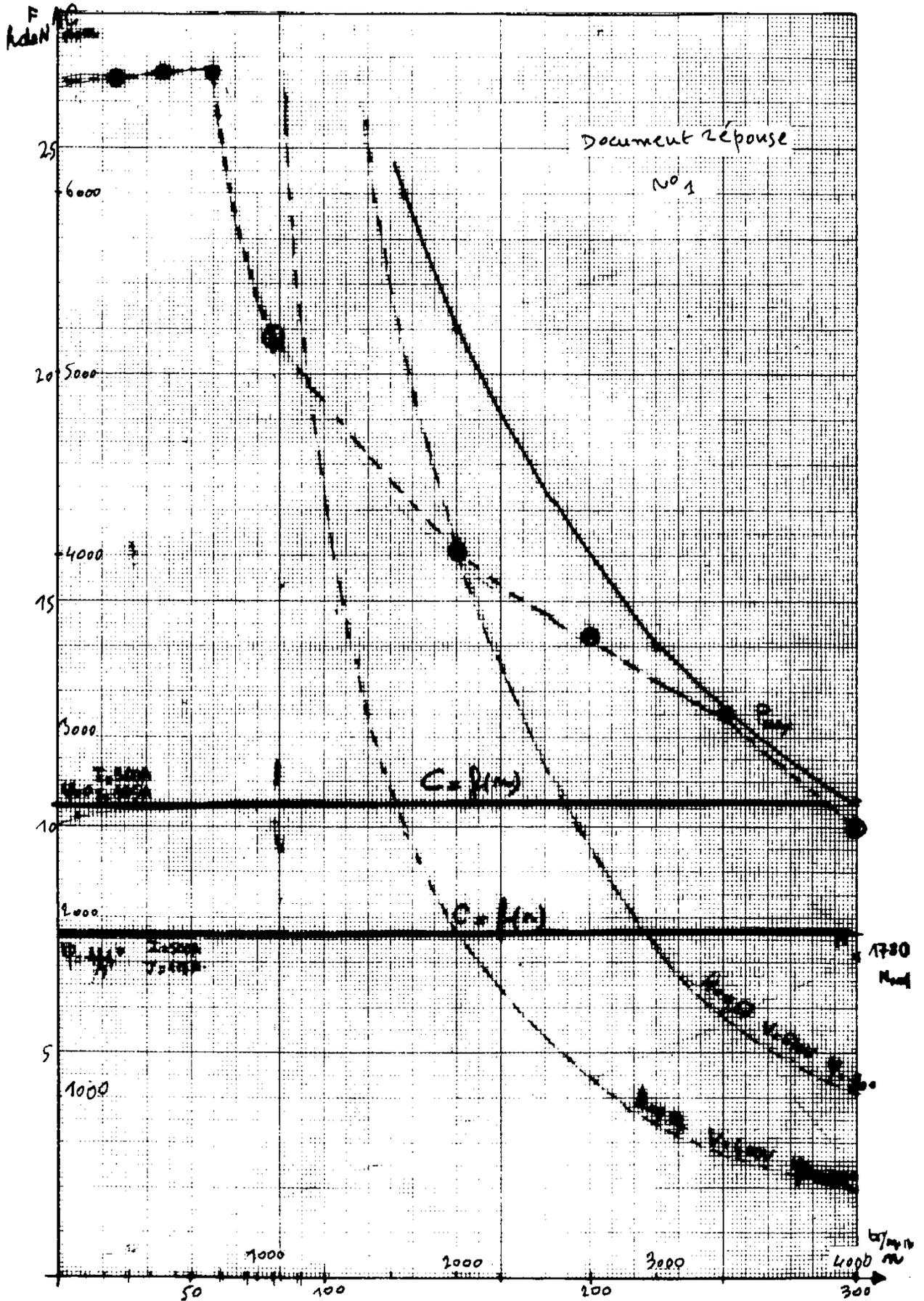
IV.1.



IV.1.1. De 0 à  $\delta t$  
$$2 U_0 = r_a i_a + 2L \frac{di_a}{dt}$$



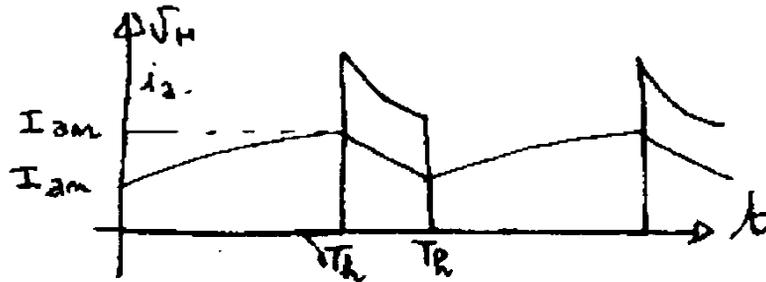
De  $\delta t$  à T 
$$2 U_0 = r_a i_a + R_i i_a + 2L \frac{di_a}{dt}$$



IV.1.2. De 0 à  $\delta T$  
$$i_a = \left( I_{am} - \frac{2U_0}{r_a} \right) e^{-\frac{t}{\tau} + \frac{2U_0}{r_a}} \quad \text{avec } \tau = \frac{2L}{r_a}$$

De  $\delta t$  à  $T$  
$$i_a = \left( I_{am} - \frac{2U_0}{R+r_a} \right) e^{-\frac{t-\delta T}{\tau'} + \frac{2U_0}{r_a+R}} \quad \text{avec } \tau' = \frac{2L}{R+r_a}$$

IV.1.3.



IV.1.4. 
$$I_{am} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\delta T}{\tau}} e^{-\frac{(1-\delta)T}{\tau'}}} \left[ \frac{2U_0}{r_a} \left( 1 - e^{-\frac{\delta T}{\tau}} \right) + \frac{2U_0}{R+r_a} e^{-\frac{\alpha T}{\tau}} \left( 1 - e^{-\frac{(1-\delta)T}{\tau'}} \right) \right]$$

$$T = T_h$$

$$I_{am} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\delta T}{\tau}} e^{-\frac{(1-\delta)T}{\tau'}}} \left[ \frac{2U_0}{R+r_a} \left( 1 - e^{-\frac{(1-\delta)T}{\tau'}} \right) + \frac{2U_0}{r_a} e^{-\frac{(1-\delta)T}{\tau'}} \left( 1 - e^{-\frac{\delta T}{\tau}} \right) \right]$$

IV.1.5. Si  $\tau > T_h$  et  $\tau' < T_h$  un DL à l'ordre 1 donne :  $I_{aM} = I_{am} = \frac{2U_0}{r_a + (1-\delta)R}$  courant parfaitement lissé.

IV.1.6.

IV.1.6.1. 
$$I_a = I_{aM} = I_{am} = \frac{2U_0}{r_a + (1-\delta)R}$$

IV.1.6.2. 
$$\bar{V}_H = 2U_0 - r_a \bar{i}_a \quad \text{car} \quad \bar{U}_{2L} = 0$$

$$V_H = \frac{2U_0(1-\delta)R}{r_a + (1-\delta)R}$$

IV.1.6.3. En linéarisant l'exponentielle 
$$I_{aM} = \left( I_{am} - \frac{2U_0}{r_a} \right) \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right) + \frac{2U_0}{r_a}$$

$$\Delta i_a = \frac{2U_0}{2Lf} \frac{\delta(1-\delta)R}{r_a + (1-\delta)R}$$

$$\frac{\Delta i_a}{I_a} = \frac{\delta (1 - \delta) R}{2 L f}$$

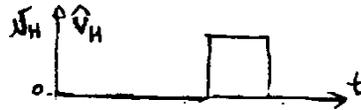
$$\left( \frac{\Delta i_a}{i_a} \right)_{\max} = \frac{R}{4 f \times 2 L} \quad \text{pour } \delta = \frac{1}{2}$$

$$\left( \frac{\Delta i_a}{I_a} \right)_{\max} = \frac{2,725}{4 \times 300 \times 45 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-2}$$

IV.1.7.

IV.1.7.1.  $\Delta i_a$  faible  $I_a = i_a$   $V_H = (1 - \delta) \hat{V}_H$   $\hat{V}_H = \frac{2 U_0 R}{r_a + (1 - \delta) R}$  ou  $\hat{V}_H = R I_a$ .

IV.1.7.2.  $I_R = (1 - \delta) I_a$ .



IV.1.7.3.  $I_{R_{\text{eff}}} = I_a \sqrt{1 - \delta}$ .

IV.1.8.  $R_{\text{eq}} = r_a + (1 - \delta) R$

$0,17 < \alpha < 0,94$   $1,02 \Omega < R_{\text{eq}} < 3,12 \Omega$   $\alpha = 0,17$   $R_{\text{eq}} = 3,12 \Omega$   
 $\alpha = 0,94$   $R_{\text{eq}} = 1,02 \Omega$

Grâce au rapport cyclique on peut faire varier  $R_{\text{eq}}$  et maintenir par exemple  $I_a = \text{Cte}$  en phase de freinage.

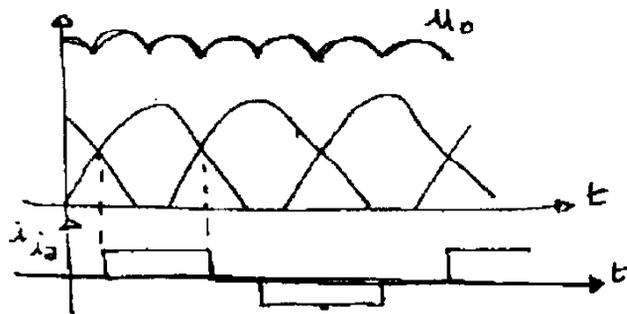
IV.1.9.  $P_{2U_0} = 2 U_0 I_a = \frac{(2 U_0)^2}{r_a + (1 - \delta) R}$   
 $P_R = (1 - \delta) \frac{\hat{V}_H^2}{R} = \frac{(1 - \delta) (2 U_0)^2 R}{(r_a + (1 - \delta) R)^2}$

La différence est la puissance dissipée par effet joule dans  $r_a$  soit  $P_{jra} = r_a \frac{(2 U_0)^2}{(r_a + (1 - \delta) R)^2}$ .

IV.2.

IV.2.1.

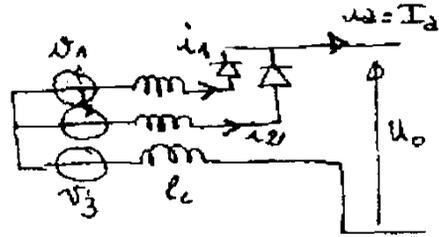
IV.2.1.1.



6 calottes de sinusoides.

$$IV.2.1.2. \quad \bar{U}_0 = \frac{3 \hat{U}_0}{\pi} = \frac{3 \sqrt{6} V}{\pi} \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_a$$

$$I_{reff} = I = \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_a$$



IV.2.2.

$$IV.2.2.1. \quad u_0 = v_1 * l_c \frac{di_1}{dt} - v_3$$

$$u_0 = v_2 * l_c \frac{di_r}{dt} - v_3$$

$$2u_0 = v_1 + v_2 * l_c \left( \frac{di_r}{dt} + \frac{di_l}{dt} \right) - 2v_3$$

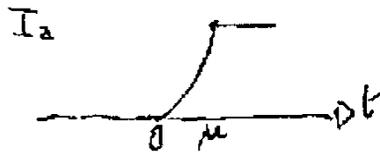
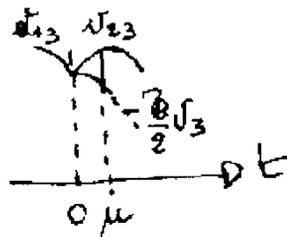
$$u_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} - v_3 = -\frac{3}{2} v_3$$

IV.2.2.2.  $\bar{U}_{00}$  = valeur moyenne sans empîtement.

$$\bar{U}_0 = \bar{U}_{00} - \frac{3}{\pi} \int_0^\mu (v_{23} - u_0) d\theta$$

$$\bar{U}_a = \bar{U}_{00} - \frac{3}{\pi} \int_0^\mu l_c \frac{di_1}{dt} d\theta$$

$$i_1 = \frac{V \sqrt{6}}{2 l_c \omega} (1 - u)$$



$$\bar{U}_0 = \bar{U}_{00} - \frac{3}{\pi} l_c \omega I_a$$

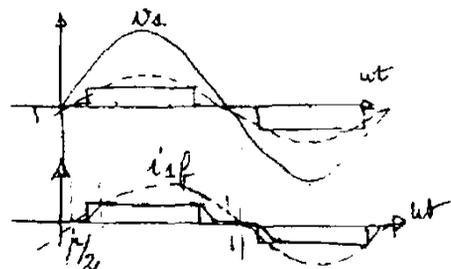
$$\hat{U} = V \sqrt{6} \int_0^\mu l_c \omega \frac{di_1}{d\theta} d\theta = \int_0^\mu \frac{\hat{U} \sin \omega t}{2} d\theta$$

$$1 - \cos \mu = \frac{2 l_c \omega I_a}{V \sqrt{6}}$$

IV.2.2.3.  $i_{1f}$  : fondamental.

$$P = \sqrt{3} U I_1 \cos \frac{\mu}{2}$$

$$P = 3 V I_1 \cos \frac{\mu}{2}$$



$$S = 3 V_{\text{eff}} \quad \text{et} \quad f = \frac{P}{S} = \frac{3V \sqrt{6} I_a \sqrt{3}}{\pi 3V \sqrt{2} I_a} \cos \frac{\mu}{2}$$

$$f = \frac{3}{\pi} \cos \frac{\mu}{2}$$

IV.3.

IV.3.1.

IV.3.1.1.  $P_{\text{méca}} = 75000 \times \frac{300}{3,6} = 6,25 \text{ MW}$ .

Pour deux machines :  $P_{\text{méca}} = 1,56 \text{ MW}$ .

$P_{\text{elR}} = 1,46 \text{ MW}$ .

$\delta = \text{Cte} \Rightarrow R_{\text{eq}} = \text{Cte}$  avec  $P_{\text{el}} = \text{Cte} \Rightarrow I_a = \text{Cte}$

$$\delta = 0,17 \quad I_a = \sqrt{\frac{P}{R_{\text{eq}}}} = 685 \text{ A} \quad \text{et} \quad 2 U_0 = \text{Cte} = 2136 \text{ V} \\ U_0 = 1068 \text{ V}$$

IV.3.1.2.  $U_0 = \frac{3 \sqrt{6} V}{\pi} - \frac{3 I_c \omega}{\pi} I_a$  avec  $f = 0,656 \text{ v}$  ou  $\omega = 4,122 \text{ v}$ .

$$U_0 = \frac{3 \sqrt{6}}{\pi} V - \frac{3 I_c}{\pi} 4,122 I_a \times v \quad v \text{ en km/h.}$$

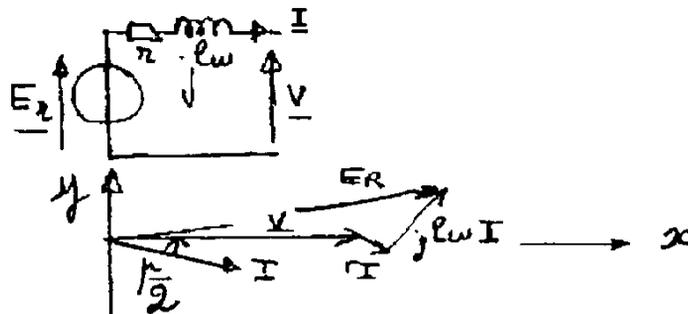
IV.3.1.3.  $V = 456,6 + 0,2144 v$  avec  $U_0 = 1068 \text{ V}$   $I_c = 186 \mu\text{H}$

$$\cos \mu = 1 - \frac{2 I_c \times 4,122 v}{\sqrt{6} V} I_a \quad I_a = 685 \text{ A}$$

$v \text{ (km/h)}$	300	250	200	156	$\cos \mu = 1 - 0,429 \frac{v}{V}$
$V \text{ (v)}$	521	510	499	490	
$\mu \text{ (}^\circ\text{)}$	41	37,8	34	30,3	
$\mu/2 \text{ (}^\circ\text{)}$	20,5	18,9	17	15,15	
$l\omega \text{ (W)}$	0,173	0,144	0,115	0,09	

Connaissant  $V$  il faut remonter à  $E_R$  puis  $J_R$  et  $J$  en raisonnant sur le fondamental de  $i$

$$\underline{E}_R = \underline{V} + r \underline{I} + j l \omega \underline{I} \quad \text{avec} \quad I = \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_a = 534 \text{ A.}$$



$$l\omega = 1 \times 4,122 \text{ v} \\ l = 0,140 \text{ mH} \\ r = 9,21 \text{ m}\Omega$$

$$E_{Rx} = V + rI \cos \frac{\mu}{2} + 1 \times 4,122 v I \sin \frac{\mu}{2}$$

$$E_{Ry} = -rI \sin \frac{\mu}{2} + 1 \times 4,122 v I \cos \frac{\mu}{2}$$

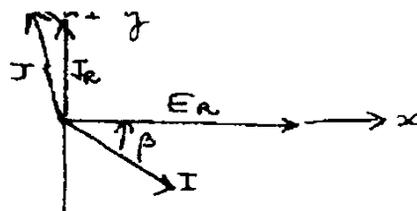
km/h	v	300	250	200	156
tr/min	n	4000	3333	2666	2080
V	$E_R$	564	545	525	509
A	$I_R$	122	142	200	375

$$\beta = \frac{\mu}{2} + \text{Arctg} \frac{E_{Ry}}{E_{Rx}}$$

$$\underline{J} = J_R - \alpha I$$

$$J_x = -\alpha I \cos \beta$$

$$J_y = J_R + \alpha I \sin \beta$$



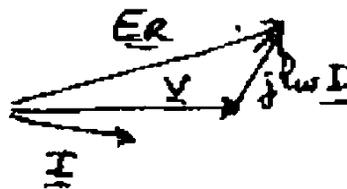
(km/h)	v	300	250	200	156
(°)	$\beta$	29	26,4	23,3	20,2
(A)	J	260	272	316	467

IV.3.2.

IV.3.2.1.  $F = Cte \Rightarrow$  couple des machines synchrones constant. On effectue donc un freinage à couple constant  $J = Cte$   $E = K\phi\Omega$  décroît linéairement.

IV.3.2.2. C'est  $\delta$  qui est le paramètre de réglage.

IV.3.2.3.  $I_a$  et  $J = Cte$  donc  $J_R = Cte \Rightarrow E_R$  décroît linéairement avec v.  
 $E_R$  et  $\omega I$  décroissent linéairement  $\Rightarrow V$  décroît  
 $\mu$  reste constant  $\Rightarrow$  linéairement avec v



$$U_0 = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V - \frac{31_c I_a}{\pi} 4,122 v \quad \text{est fonction linéaire de la vitesse.}$$

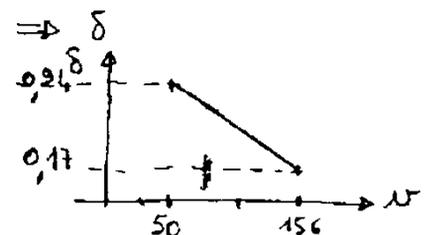
IV.3.2.4.  $2 U_0 = \text{Req} I_a \quad \text{Req} = \frac{2 U_0}{I_a} = r_a + (1 - \delta) R \Rightarrow \delta$

Req est une fonction linéaire de la vitesse

$\Rightarrow \delta$  est une fonction linéaire de la vitesse

pour  $\delta = 0,94 \quad I_a = 685 \text{ A}$

$\text{Req} = 1,02 \Omega \quad 2 U_0 = 689 \text{ V} \quad \text{et} \quad v = 51 \text{ km/h.}$



IV.3.2.5.  $P_R = R I_{\text{Reff}}^2 = R I_a^2(1 - \delta)$  et  $\delta$  est fonction linéaire de  $v$ , donc  $P_R$  est fonction linéaire de  $v$ .

156 km/h pour	$\delta = 0,17$	$P = 1,06 \text{ MW}$	(0,4 MW sont dissipés dans $r_a$ ).
51 km/h pour	$\delta = 0,94$	$P = 77 \text{ kW}$ .	

IV.3.2.6.  $I_H = I_a = 685 \text{ A}$      $\hat{V}_H = RI_a = 1867 \text{ V}$     elles sont constantes.

IV.3.2.7. La chute de tension dans la résistance statorique à basses vitesses devient plus importante, elle n'est donc plus négligeable.

IV.3.3. Toutes les grandeurs décroissent et tendent vers 0.